České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Matematika ve starověké Babylónii

Vít Heřman

Praha, 22.2.2008

Obsah:

Úvod

Ve starověku se matematické poznání začalo nezávisle rozvíjet na několika místech, v počátcích více méně nezávisle. V současné době je nám nejvíce známa matematika řecká, ze které vychází i moderní matematika evropská, ovšem i další starověké civilizace dosáhly překvapujících výsledků. V této seminární práci bych chtěl popsat základní rysy matematiky mezopotámské, speciálně pak starobabylónské, s jejímž dědictvím se setkáváme (aniž bychom to vždy věděli) prakticky každý den.

Historický kontext

Datování starobabylónského období je z pochopitelných důvodů ne zcela přesné. Jako období vlády tzv. *první babylónské dynastie* se udávají roky 1959 až 1659 př. n. l. Z pohledu matematiky je pak obvzláště zajímavá přibližně druhá polovina tohoto období - od vlády krále Chammurabiho. V této době dosáhl Babylón jako stát největšího rozmachu a stal se nejvýznamnější silou celé blízkovýchodní oblasti. Jednalo se o stát s pevnou mocenskou i sociální hierarchií, vyspělý po stránce kulturní i hospodářské. Všechny tyto skutečnosti přispěly k rozvoji vzdělávání, včetně pro nás zajímavé matematiky.

Dostupné historické zdroje

Zdaleka nejpoužívanějším záznamovým médiem byla v Mezopotámii hliněná tabulka, na kterou se psalo do špičky seříznutým rákosem. To dalo vzniknout tzv. *klínovému písmu.* Tento původně sumerský vynález je pravděpodobně nejstarším písemným systémem na světě a převzala ho valná většina starověkých kultur na blízkém východě. Hliněné tabulky se ukázaly jako poměrně odolný materiál a do dnešní doby se jich zachovalo značné množství. V dalším textu však budu jakýkoliv dochovaný záznam označovat jako *text*, protože pojem tabulka bude použit v úplně jiném vyznamu.

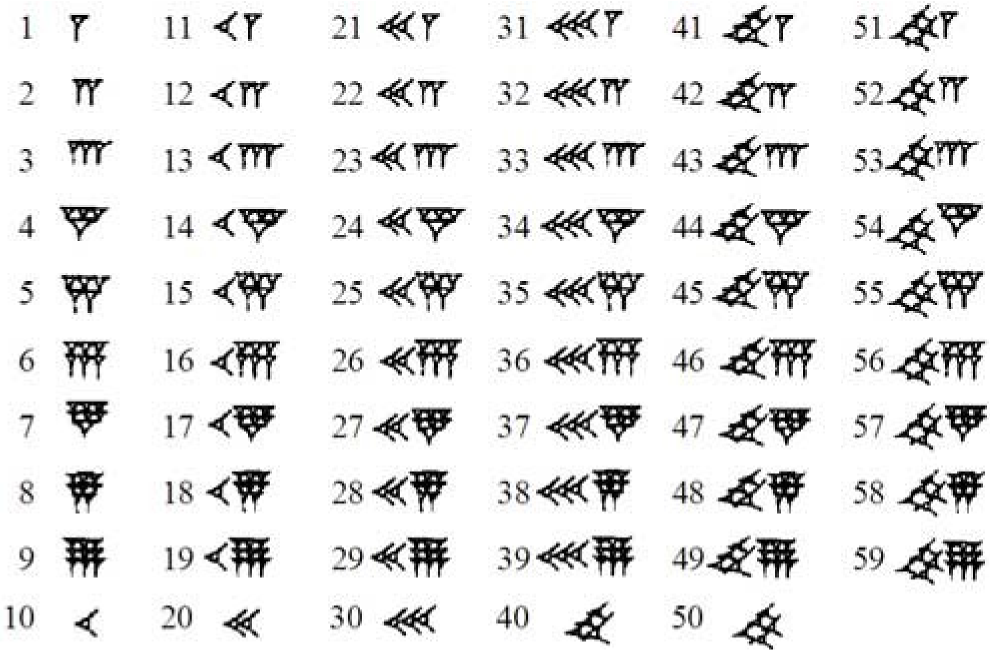
V současnosti je objeveno, zpracováno a přeloženo několik stovek starobabylónských matematických textů, které tradičně rozdělujeme do dvou skupin - texty tabulkové a texty úlohové. Tabulkové texty obsahují, jak již název napovídá, nejrůznější tabulky - násobků, převrácených hodnot, druhých mocnin a také druhých a třetích odmocnin, pythagoreiských trojic a mnohé další. Úlohové texty pak obsahují konkrétní problémy - dnes bychom je nazvali slovními úlohami. Většina těchto textů byla určena pro použití v písařských školách, což poněkud znesnadňuje naše pokusy jim porozumět - tabulky často používají specializovanou slovní zásobu a předpokládá se, že je měl doprovázet výklad učitele.

Charakter babylónské matematiky

Hlavními impulsy pro rozvoj matematiky v Babylónii (a Mesopotámii obecně) byly potřeby tzv. chrámového hospodářství (shromažďování zemědělských přebytků v chrámech a palácích, potřeba vést účetní záznamy) a stavitelství (kupříkladu problémy kvadrutry kruhu nebo odmocniny ze dvou). Z toho vyplývá veskrze praktický ráz matematického poznání. Matematika nebyla v Babylónii vědou v dnešním slova smyslu, neměla systematický teoretický základ a chyběl jí například koncept důkazu. Přesto dosáhla pozoruhodných výsledků - viz níže.

Na rozdíl od Řeků, kteří vycházeli téměř vždy z geometrických problémů a pokud to bylo možné, vždy volili geometrický postup řešení, orientovali se Babylóňané spíše na numerické výpočty a problémy. Proto bývá někdy babylónská matematika označována jako „algebraická“ (oproti řecké „geometrické“), toto označení však není příliš přesné. Pravděpodobně vhodnější by byl termín „algoritmická“, protože naprostá vetšina dochovaných textů podává návod na řešení určitého problému, ještě častěji pak skupinu řešených příkladů podobného charakteru. Zobecňování postupů a hledání teoretických výsledků, tak jak to bylo běžné v matematice řecké, není možné z dochovaných pramenů doložit.

Babylónci používali poziční číselnou soustavu, konkrétně *sexagesimální* (šedesátkovou). Její pozůstatky dnes můžeme vidět v např. v měření času či úhlové míře. Číslice byly psány klínopisem, existovaly dva znaky pro zápis číslic - pro jednotky a desítky. V babylónském pojetí šedesátkové soustavy tedy existuje jakýsi desítkový sub-základ. Tento ovšem souvisí pouze s grafickou reprezentací znaků v klínovém písmu, v samotné matematice se neprojevuje. Pro nulu nebyl speciální znak, písaři většinou prostě nechali v zápisu širší mezeru. To vede k nejednoznačnostem při čtení těchto textů, často je třeba konkrétní hodnotu upřesnit z kontextu. Až později, v době novobabylónské, se začala pro nulu používat tečka. Výhodou této soustavy je např. to, že 60 má 12 dělitelů, tedy mnoho zlomků je velice jednoduchých a má konečnou reprezentaci. Čísla která beze zbytku dělí 60 označujeme jako *regulární* čísla - jsou to čísla 5-hladká.



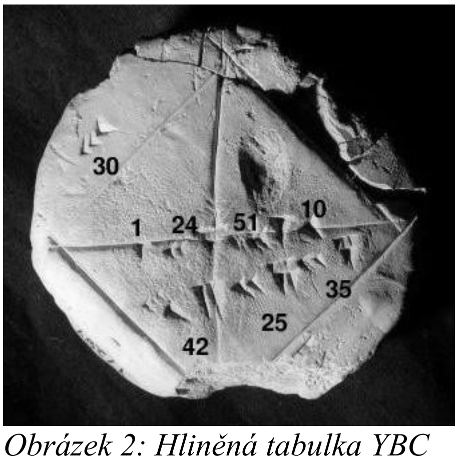
Obrázek 1: Babylónské číslovky v klínovém písmu, svislý znak značí 1,vodorovný 10

Z dochovaných poznatků je zřejmé, že nebyl znám algoritmus pro dělení velkých čísel. Místo toho se užívalo násobení převrácenou hodnotou a tabulek těchto převrácených hodnot (jsou dochovány tabulky převrácených hodnot i pro čísla v řádu miliard). V těchto tabulkách však nenajdeme zlomky s neregulárním jmenovatelem, s těmito zlomky babylónští matematici pracovat neuměli a používali různé odhady - např: $\frac{1}{13}=\frac{7}{91}\approx 7\times\frac{1}{90}=7\times\frac{40}{3600}$ a přípisek „...protože číslem 13 nelze dělit“.

Výraz $\frac{40}{3600}$ má zjevně konečnou sexagesimální reprezentaci.

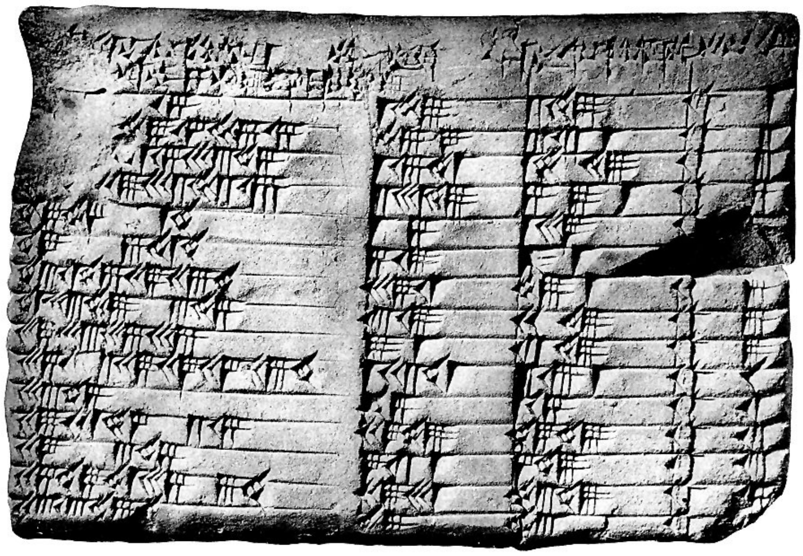
Nejdůležitější výsledky

- Pro násobení velkých čísel se používal vzorec $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$, který násobení převáděl na sčítání a odčítání a použití tabulky druhých mocnin.
- Kvadratické rovnice se řešily postupem velice podobným dnešnímu vzorci $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$. Soudě podle dochovaných záznamů, pracovalo se s rovnicemi ve tvaru $x^2+bx=c$ a bylo známé řešení $x=\frac{-b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}$ kde *b,c* nemusí být nutně celá, ovšem *c* musí být kladné. Použita byla vždy kladná hodnota odmocniny, protože tento výsledek dával smysl při řešení problémů reálného světa.
- Dochovaly se i záznamy o řešení některých tvarů kubických rovnic. Např. tvar $ax^3+bx^2=c$ se převedl na tvar $\left(\frac{ax}{b}\right)^3+\left(\frac{ax}{b}\right)^2=\frac{ca^2}{b^3}$ a následnou substitucí $\left(\frac{ax}{b}\right)=y$ na tvar $y^3+y^2=\frac{ca^2}{b^3}$,který již byl snadno řešitelný pomocí tabulek pro hodnoty n^3+n^2 které existovaly a dochovaly se.
- Běžně byly řešeny soustavy lineárních rovnic metodou, která přibližně odpovídá Gaussovo eliminaci.
- Pro výpočet odmocnin se používal algoritmus známý dnes jako *babylónská metoda*. Jedná se o rekurzivní metodu. Chceme-li vypočítat hodnotu $\sqrt{A}$ začneme odhadem hodnoty odmocniny, tento označíme jako x_0 . Posloupnost zadaná rekurentním vzorcem $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})$ pak konverguje k $\sqrt{A}$. Konvergence byla pro praktické potřeby tehdejší doby poměrně rychlá a vetšinou stačilo pouze malé množství iterací algoritmu.



Obrázek 2: Hliněná tabulka YBC 7289, ukazující výpočet odmocniny z čísla 2, s přesností na 6 desetiných míst

- Víme, že pro běžné potřeby se používala aproximace $\pi \approx 3$, ovšem existují doklady o přesnějším odhadu $\pi \approx 3{,}125$.
- Pythagorova věta byla známá a používaná, jsou dochovány tabulky s předpočítanými pythagorejskými trojicemi. Dále existují doklady o využívání Thaletovy věty.



Obrázek 3: Slavná tabulka Plimpton 322, bývá interpretována jako seznam pythagorejských trojic

Je na místě poznamenat, že všech těchto výsledků dosáhli babylónští matematici bez jakéhokoliv formálního algebraického zápisu!

Závěr

Z výše popsaného je zjevný důraz, který byl kladen na řešení problémů reálného světa. Neexistují doklady o systematické teoretické práci ani pokusech o abstrakci od reálných problémů, důkazy nejpíše neexistovaly vůbec nebo jen velmi vzácně. Geometrie byla podružná, největší důraz byl kladen na numerické postupy. Často nebylo ani jasné rozlišení mezi přibližným a přesným výsledkem. I přes všechny tyto problémy a nedostatky však lze babylónské matematické poznání označit za velmi rozsáhlé a ve své době zcela jistě unikátní - podobných výsledků v té době dosahovali pouze matematici v Egyptě, ovšem jejich záběr nebyl zdaleka tak široký. Společně s vyspělou astronomii, stavitelstvím, zemědělstvím, kulturou a náboženstvím tak matematika podává svědectví o mimořádné vyspělosti této kultury, která v mnoha ohledech předběhla zbytek světa často o více než 1000 let.

Použité zdroje

- N. Nováková, L. Pecha, F. Rahman - Základy starobabylonštiny, Karolinum, Praha, 2000
- Wikipedia - http://en.wikipedia.org/
- An overview of Babylonian mathematics - http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_mathematics.html
- Babylonian Mathematics - http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/egypt_babylon/babylon.pdf