ROVNICE MATEMATICKÉ FYZIKY (01RMF)

ZÁPISKY Z PŘEDNÁŠEK AKADEMICKÉHO ROKU 2015/2016

BORIS ODLOŽILÍK & PETR VÁLA

Tyto zápisky vznikly jako záznam přednášky rovnic matematické fyziky doc. Milana Krbálka. Důvodem k jejich pořízení byla zejména modifikace vykládané látky v daném akademickém roce, a její podstatné odchýlení od jiných dostupných ucelených materiálů. Zápisky prošly kontrolou doc. Krbálka i autorů, avšak to jistě nestačilo k odhalení všech chyb. S případnými připomínkami a objevenými chybami se laskavě obraťte na autory.

Disclaimer:
Dokument ještě neprošel posledním čtením, a ačkoli již nějaké kontroly proběhly (a hrubé chyby by tudíž neměly být přítomny), buďte při jeho čtení obezřetní.

BORIS.ODLOZILIK@FJFI.CVUT.CZ
PETR.VALA@FJFI.CVUT.CZ

FJFI ČVUT
8. BŘEZNA 2016

Obsah

1. přednáška (29.9.2015) - základní pojmy, snaha o prehilbertovy prostory, faktorové funkce

1 Hilbertův prostor

1.1 Značení

$\mathscr{C}^n(M)$ je třída všech funkcí, které mají na množině M spojité derivace až do řádu n, přičemž $\mathscr{C}(M) = \mathscr{C}^0(M)$. Nachází-li se index nula dole $\mathscr{C}_0^n(M)$, pak M je kompakt. Symbol $\mathscr{C}_0^n$ značí všechny funkce třídy $\mathscr{C}^n(\mathbf{E}^r)$, které mají libovolný, ale kompatní nosič. $\mathscr{L}(G)$ je třída lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině G. Třída funkcí majících Lebesgueův integrál na G se značí $\mathscr{L}^\star(G)$. Třídu Lebesgueovsky lokálně integrabilních funkcí značíme $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$ a definujeme ji v následujícím textu.

1.2 Úmluva

Symbol G bude nadále reprezentovat $r-$dimenzionální *oblast*, tj. otevřenou a souvislou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^r$. Dále symbol J bude označovat *kompakt*, tj. uzavřenou a omezenou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^r$. Funkcí budeme rozumět zobrazení $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$.

1.3 Úmluva

V celém následujícím textu budeme předpokládat, že je zadána klasická a úplná Lebesgueova míra $\lambda(X) : \mathscr{M}_\lambda \mapsto \mathbf{R}^\star$ generovaná ve všech dimenzích klasickou vytvořující $\varphi(x) = x$. Tudíž soustava $\mathscr{M}_\lambda$ všech $\lambda-$měřitelných podmnožin množiny $\mathbf{E}^r$ je $\sigma-$algebrou a $\lambda(X)$ je na ní $\sigma-$aditivní mírou. Systém $\{\mathbf{E}^r, \mathscr{M}_\lambda, \lambda(X)\}$ je tedy pro nás nyní výchozím prostorem s úplnou mírou.

1.4 Definice

Nechť $r \in \mathbf{N}$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{R}^r$. *Heavisideovou* `[hevisajdovou]` funkcí budeme rozumět funkci $\Theta(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0,1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad x_1 > 0 \ \wedge\ x_2 > 0 \ \wedge \dots \wedge\ x_r > 0 \\ 0 & \dots \quad x_1 \leqslant 0 \ \vee\ x_2 \leqslant 0 \ \vee \dots \vee\ x_r \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Centrovanou Heavisideovou funkcí budeme rozumět funkci $\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0,1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad x_1 > \mu_1 \ \wedge\ x_2 > \mu_2 \ \wedge \dots \wedge\ x_r > \mu_r \\ 0 & \dots \quad x_1 \leqslant \mu_1 \ \vee\ x_2 \leqslant \mu_2 \ \vee \dots \vee\ x_r \leqslant \mu_r. \end{cases} \tag{1.2}$$

1.5 Definice

Dirichletovou funkcí budeme rozumět funkci

$$\mathfrak{D}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad \vec{x} \in \mathbf{Q}^r \\ 0 & \dots \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^r \backslash \mathbf{Q}^r. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.6 Poznámka

Funkce $f(\vec{x})$ je, podle věty 5.3.45 a důsledku 5.3.46 v [5], na G lebesgueovsky integrabilní právě tehdy, když je λ-měřitelná a její absolutní hodnota je lebesgueovsky integrabilní. Platí tedy ekvivalence

$$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}(G,\mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(G,\mu) \;\wedge\; f(x) \in \Lambda_\mu(G).$$

Budeme-li tedy mluvit o měřitelných funkcích, tak platí, že

$$f(x) \in \mathscr{L}(G,\mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(G,\mu)$$

1.7 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *lokálně integrabilní* na G a označíme symbolem $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}\big(G,\mu(X)\big)$ nebo zkráceně $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$, jestliže pro každý bod $\vec{c} \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}\big(\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})\big)$, tj.

$$\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

1.8 Věta

Nechť G je oblast v $\mathbf{E}^r$. Funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ je lokálně integrabilní na G právě tehdy, když pro každou kompaktní množinu $J \subset G$ platí, že

$$\int_J f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve, že pokud pro každou kompaktní množinu $J \subset G$ platí, že integrál $\int_J f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ konverguje, pak je $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na G
- zvolme tedy libovolně bod $\vec{c} \in G$
- jelikož G je otevřená, jistě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})}$, $K \subset G$, K je kompakt a $\vec{c} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$
- integrál $\int_K f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ ale existuje z předpokladu
- $\mathrm{bd}(K)$ je $\mu-$nulová množina, neboť se jedná o plášť r-rozměrné koule, a z teorie Lebesgueova integrálu tudíž platí, že $\int_K f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$, a navíc jsme $\vec{c}$ volili libovolně.
- pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na G
- zvolme K jako libovolnou kompaktní množinu, která je podmnožinou oblasti G
- podle teorie míry jistě $K \in \mathscr{M}_\mu$, neboť $\mathbf{E}^r \backslash K \in \mathscr{S}_r \subset \mathscr{M}_\mu$, a $\mathscr{M}_\mu$ je σ-algebra
- Borelova věta ale říká, že z každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny lze vybrat pokrytí konečné, tj. existuje soustava oblastí $\{G_k : k \in \hat{n}\}$ tak, že $\cup_{k=1}^n G_k \supset K$ a $G_k = \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)$ pro jisté body $\vec{x}_k \in K$
- všechny integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ ale existují z předpokladu této implikace
- dále také existují (jak víme z teorie Lebesgueova integrálu všechny integrály) $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_\ell)} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ pro $k, \ell \in \hat{n}$
- existují rovněž integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap K} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$, což společně garantuje existenci integrálu $\int_K f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$
- tímto je důkaz dokončen

1.9 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\langle .|.\rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže splňuje tzv. *axiomy skalárního součinu*:

- *levá linearita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\alpha \in \mathbf{C}$ platí $\langle \alpha f + g|h\rangle = \alpha\langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle$
- *hermiticita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^\star$
- *pozitivní definitnost:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|f\rangle \geqslant 0$ a navíc $\langle f|f\rangle = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$.

Dvojici $\big\{\mathcal{V}, \langle .|.\rangle\big\}$ nazýváme *prehilbertovským prostorem.*

1.10 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor funkcí nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\| \,.\, \| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *normou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy normy*:

- *nulovost:* $\|f\| = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- *trojúhelníková nerovnost:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí: $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$
- *homogenita:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\lambda \in \mathbf{C}$ platí: $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$.

Dvojici $\{\mathcal{V}, \|.\|\}$ nazýváme *normovaným prostorem*.

1.11 Definice

Mějme normovaný lineární prostor $\{\mathcal{V}, \|.\|\}$, který je úplný na metrice $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. O takovém prostoru řekneme, že je Banachův, a označíme jej $\mathfrak{B}$.

1.12 Definice

Nechť $p \geqslant 1$ je pevně zvolený parametr. Pak třídu všech měřitelných funkcí $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$, pro něž

$$\int_G \left|f(\vec{x})\right|^p \mathtt{d}\lambda(\vec{x}) \in \mathbf{R},$$

označujeme symbolem $\mathscr{L}_p(G)$. Neboli

$$\mathscr{L}_p(G) = \left\{ f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C} : \int_G \left|f(\vec{x})\right|^p \mathtt{d}\lambda(\vec{x}) \in \mathbf{R} \right\}.$$

1.13 Věta

Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G)$. Potom $f(\vec{x})g^\star(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(G)$.

Důkaz:

- stačí si uvědomit, že $|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})| \leqslant \frac{1}{2}|f(\vec{x})|^2 + \frac{1}{2}|g(\vec{x})|^2$
- jelikož oba členy součtu patří do $\mathscr{L}(G)$, tak ze srovnávacího kritéria plyne, že také $|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})| \in \mathscr{L}(G)$
- je vhodné si zopakovat poznámku 1.6 a uvědomit si, že pro měřitelné funkce platí $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}(G) \Leftrightarrow |f(\vec{x})| \in \mathscr{L}(G)$

1.14 Poznámka

Vztahy $\int_G f(x)g^\star(x)w(x)\,\mathtt{d}x$, resp. $\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})w(\vec{x})\,\mathtt{d}\vec{x}$ však na některých vektorových prostorech skalární součin nedefinují. Jedním z takových prostorů je např. prostor $\mathscr{L}_1(0,1)$. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ do prostoru $\mathscr{L}_1(0,1)$ patří, neboť

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathtt{d}x = 2,$$

ale integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathtt{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathtt{d}x$$

nekonverguje. Podobně také prostory $\mathscr{L}(G)$ nebo $\mathscr{L}_1(G)$ pro $G = (0, \infty)$ negenerují spolu s operací $\int_0^\infty f(x)g^\star(x)\,\mathtt{d}x$ prehilbertovský prostor.

$\mathscr{L}_2(G)$ také není prehilbertovský, protože není splněn axiom pozitivní definitnosti skalárního součinu, tedy neplatí, že

$$\left\langle f(x) | f(x) \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

Může totiž existovat $f(x) \neq 0$ taková, že bude $\int_a^b f(x)f^\star(x)\mathtt{d}x = 0$. Například tak, že má nenulovou hodnotu na množině míry nula.

1.15 Poznámka

Zavedeme-li na prostoru $\mathscr{L}_2(G)$ zobrazení $\langle f|g\rangle : \mathscr{L}_2(G) \times \mathscr{L}_2(G) \mapsto \mathbf{C}$ předpisem

$$\langle f|g\rangle = \int_G f(\vec{x})\, g^\star(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

pak toto zobrazení není skalárním součinem, neboť není splněn axiom pozitivní definitnosti z definice skalárního součinu. Rovnost $\langle f|f\rangle = 0$ by podle něho měla být splněna tehdy a jen tehdy, pokud $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$, tedy pokud $f(\vec{x})$ je ryze nulová funkce. Snadno ale nahlédneme, že pro Dirichletovu funkci platí rovnost $\mathfrak{D}^2(\vec{x}) = \mathfrak{D}(\vec{x})$, a tudíž (podle teorie Lebesgueova integrálu)

$$\langle \mathfrak{D}|\mathfrak{D}\rangle = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\, \mathfrak{D}^\star(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0.$$

1.16 Poznámka

Od termínu funkce nyní přejděme k faktorové funkci, resp. faktorovému prostoru funkcí. Třídu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň jsou mezi sebou vzájemně μ-ekvivalentní, tj. liší se pouze na množině míry nula, nazveme *faktorová skupina funkcí*. Třídu všech funkcí, které jsou měřitelné a zároveň ekvivalentní s nulovou funkcí ($f(\vec{x}) = o(\vec{x})$) označíme symbolem $\mathcal{F}_0$. Do třídy $\mathcal{F}_0$ tedy patří i Dirichletova funkce $\mathfrak{D}(\vec{x})$. Libovolného zástupce z vybrané faktorové skupiny funkci nazveme *faktorovou funkcí*. Pro jednoduchost budeme nadále používat termín funkce, ale mějme pořád na paměti, že jde jen o jednoho vybraného zástupce celé skupiny funkcí.

1.17 Definice

Faktorovou funkcí $\hat{f}(\vec{x})$ nazveme množinu všech funkcí, jež jsou vzájemně $\mu-$ekvivalentní s vybranou měřitelnou funkcí $f(\vec{x}) \in \Lambda(G)$, tj.

$$\hat{f}(\vec{x}) := \{g(\vec{x}) \in \Lambda(G) : g(\vec{x}) \sim f(\vec{x})\}.$$

Množinu všech faktorových funkcí nazveme *faktorovým prostorem* nad G a označíme $\mathcal{F}(G)$.

1.18 Poznámka

Tedy funkce $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ z předešlé definice se liší pouze na množině nulové míry. Dále si uvědomme, že integrál všech prvků faktorové funkce na dané oblasti G má stejnou hodnotu. Má tedy smysl definovat

$$\int_G \hat{f}(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) := \int_G f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

kde $f(\vec{x})$ je libovolný zástupce faktorové funkce $\hat{f}(\vec{x})$.

1.19 Definice

Nechť $p \geqslant 1$. Symbolem $\mathbb{L}_p(G)$ označíme množinu všech (faktorových) funkcí $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$, pro něž $|f(\vec{x})|^p \in \mathscr{L}(G)$, tedy

$$\int_G |f(\vec{x})|^p\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty.$$

1.20 Poznámka

Podle předchozí definice tedy symbolem $\mathbb{L}_2(G)$ označujeme

$$\mathbb{L}_2(G) = \left\{ \hat{f}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C} : \int_G \left|\hat{f}(\vec{x})\right|^2 \mathrm{d}\lambda(\vec{x}) \in \mathbf{R} \right\}.$$

Symbolem $\mathbb{L}_2^{(w)}(G)$ označujeme

$$\mathbb{L}_2^{(w)}(G) = \left\{ \hat{f}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C} : \int_G \left|\hat{f}(\vec{x})\right|^2 w(\vec{x})\, \mathrm{d}\lambda(\vec{x}) \in \mathbf{R} \right\},$$

kde $w(\vec{x})$ je kladná a omezená funkce na G.

2. přednáška (5.10.2015) - Hilbertův prostor, konvergence, spojitost skalárního součinu, konvoluce, hustota

1.21 Věta

$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G) \wedge H \subset G \wedge \mu(H) < +\infty \Rightarrow f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(H)$.

Důkaz:

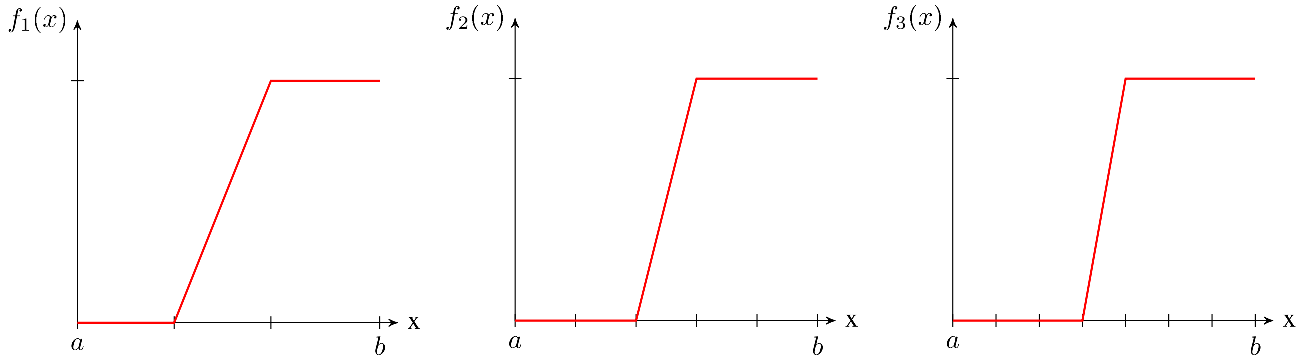
- chceme ukázat $\int_H |f(\vec{x})| \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$
- z předpokladů plyne, že $H \in \mathscr{M}_\lambda$ a dále využijeme srovnávací kritérium
- $\int_H |f(\vec{x})| \mathrm{d}\vec{x} = \int_G |f(\vec{x})| \chi_H(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x} \leqslant \overbrace{\frac{1}{2}\int_G |f(\vec{x})|^2 \mathrm{d}\vec{x}}^{\in \mathbf{R}} + \overbrace{\frac{1}{2}\int_G \chi_H(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}}^{\frac{1}{2}\lambda(H)}$

1.22 Důsledek

Pro $H \in \mathscr{M}_\lambda$, pro které $\lambda(H) < +\infty$, platí $\mathscr{L}_2(H) \subsetneq \mathscr{L}_1(H)$.

1.23 Poznámka

Víme, že $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ je prehilbertovský prostor, a že skalární součin je definován integrálem $\int_a^b f(x) g^\star(x) w(x) \mathrm{d}x = \langle f | g \rangle_w$. Otázkou je, zda-li je také hilbertovským prostorem.



Obrázek 1: Posloupnost funkcí vyvracejících úplnost prostoru$\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$

Není, jak ilustruje posloupnost na obrázku 1. Ačkoli je cauchyovská, nemá limitu v $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$, což je spor s definicí úplnosti. Dalším příkladem může být posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbf{Q}$, kde $(a_n)_{n=1}^\infty$ je cauchyovská, ale $\lim_{n\to\infty}(a_n)$ v množině $\mathbf{Q}$ neexistuje.

1.24 Věta

Prostor faktorových funkcí $\mathbb{L}_2(G)$ se skalárním součinem $\langle f|g\rangle = \int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$ je Hilbertův. Váhový prostor je pak: $\langle f|g\rangle_w = \int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})w(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$, přičemž požadavky na váhu jsou následující: $0 < w(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$, omezená na G.

Několik případů nejčastěji užívaných vah:

- Legendreova váha: $G \in (a,b); w(x) = \Theta(x-a)\Theta(b-x)$,
- Laguerrova váha: $G \in (0,+\infty); w(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$,
- ERROR: Spouštění systémových příkazů je zakázáno (viz Nastavení) váha: $G \in (-\infty,+\infty); w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1.25 Poznámka

Analytická funkce je taková funkce $g(x) \in \mathscr{A}(-1,1)$, která má Taylorův rozvoj: $g(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k$ a obor konvergence $\mathcal{O}$ alespoň $(-1,1)$. Funkce $g(\vec{x})$ je tedy v podstatě lineární kombinace analytických funkcí, a to nekonečně mnoha.

1.26 Značení

$\mathcal{H}\ldots$ funkcionální Hilbertův prostor (nejčastěji $\mathbb{L}_2(G)$ nebo $\mathbb{L}_2^{(w)}(G)$).

1.27 Poznámka

Dříve ([2],[3]) byly definovány 3 typy konvergence:

- bodová: $f_n(\vec{x}) \xrightarrow{G} f(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\forall\vec{x} \in G)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon)$,
- stejnoměrná: $f_n(\vec{x}) \overset{G}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(n > n_0 \wedge \vec{x} \in G \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon)$,
- podle normy: $f_n(\vec{x}) \rightharpoonup f(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow \|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \varepsilon)$.

Poznamenejme, že ve výrazu konvergence podle normy je skryt Lebesgueův integrál.

1.28 Věta

$f_n(\vec{x}) \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \Rightarrow f_n(\vec{x}) \rightharpoonup f(\vec{x})$ pro skalární součin definovaný vztahem $\int_a^b f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$.

Důkaz: viz skripta [2].

1.29 Věta

$f_n(\vec{x}) \overset{G}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \wedge \mu(G) < +\infty \Rightarrow f_n(\vec{x}) \overset{\mathbb{L}_2(G)}{\rightharpoonup} f(\vec{x})$.

Důkaz:

- použitím definice dostáváme: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\left(n > n_0 \wedge \vec{x} \in G \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\mu(G)}}\right)$
- $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\|^2 = \langle f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\rangle = \int_G |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2\mathrm{d}\vec{x} \leqslant \mu(G)\sup|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$

1.30 Věta – *o spojitosti skalárního součinu*

Nechť $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí z Hilbertova prostoru a $\mathrm{limnorm}_{n\to\infty} f_n(\vec{x}) = f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n|g\rangle = \langle f|g\rangle \wedge \lim_{n\to\infty}\langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle.$$

Důkaz:

- z definice limity $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|}$ pro případ, kdy $\|g\| \neq 0$
- $|\langle f_n|g\rangle - \langle f|g\rangle| = |\langle f_n - f|g\rangle| \leqslant \|f_n - f\|\|g\| < \varepsilon$
- toto platí ve všech případech kromě $\|g\| = 0$, kdy je však důkaz triviální.

1.31 Definice

Pro funkcionální řadu $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a její částečný součet $s_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$ definujme *součet podle normy* takto:

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}} f_n(\vec{x}) \equiv \operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} s_n(\vec{x}) = s(\vec{x}) \in \mathcal{H}.$$

1.32 Věta

$f_n(\vec{x}), s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ a $\underline{\sum}_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$ a $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Pak platí: $\sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n|g\rangle = \langle s|g\rangle \equiv \langle \underline{\sum}_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})|g\rangle$.

Důkaz:

- aplikací posloupnosti částečných součtů na větu
- $\sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n(\vec{x})|g(\vec{x})\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})|g(\vec{x})\right\rangle = \left\langle s(\vec{x})|g(\vec{x})\right\rangle = \left\langle \operatorname{limnorm}_{n\to\infty} s_n(\vec{x})|g(\vec{x})\right\rangle = \left\langle \underline{\sum}_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})|g(\vec{x})\right\rangle$

1.33 Příklad

Ověřte, zda $\|f\|_\sigma = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$ je/není normou na $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$. Pokud ano, rozhodněte, zda je $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$ s touto normou úplný (Banachův).

2 Konvoluce klasických funkcí

2.1 Definice

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$, pak definujeme

$$(f \star g)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s})\mathrm{d}\vec{s},$$

pokud pravá strana existuje a patří do $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$.

2.2 Věta – *existenční věta pro konvoluci*

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak $(f \star g)(\vec{x})$ existuje a navíc $(f \star g)(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- $\int_{\mathbf{E}^r} |(f \star g)(\vec{x})|\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r}\left|\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s}\right|\mathrm{d}\vec{x} \leqslant \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{s})||g(\vec{x}-\vec{s})|\,\mathrm{d}\vec{s}\,\mathrm{d}\vec{x}$
- po použití Fubiniho věty zavedeme lineární substituci $\vec{y} = \vec{x}-\vec{s}$; $\mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{d}\vec{x}$, kde $|\Delta_\Phi| = 1$
- $\int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{s})| \underbrace{\int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{y})|\,\mathrm{d}\vec{y}}_{\in\mathbf{R}}\,\mathrm{d}\vec{s} = \underbrace{\int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{s})|\,\mathrm{d}\vec{s}}_{\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{y})|\,\mathrm{d}\vec{y} \in \mathbf{R}$

2.3 Věta

Konvoluce jako operace v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ je bilineární a komutativní.

Důkaz:

- komutativita: $(f \star g)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = \left|\begin{array}{cl} \vec{y} & = \vec{x}-\vec{s} \\ \mathrm{d}\vec{y} & = \mathrm{d}\vec{s} \end{array}\right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}+\vec{y})g(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = (g \star f)(\vec{x})$
- bilinearita: podobně, rozepsáním konvoluce z definice, dojdeme k $((f+\alpha g) \star h)(\vec{x}) = (f \star h)(\vec{x}) + \alpha(g \star h)(\vec{x})$

2.4 Poznámka

Ačkoli by se na první pohled mohlo zdát, že konvoluce jen v jednom rozměru bude antikomutativní, není tomu tak díky následujícímu výpočtu:

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s = \left|\begin{array}{cl} y & = x-s \\ \mathrm{d}y & = \mathrm{d}s \end{array}\right| = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(x+y)g(y)\,\mathrm{d}y = (g \star f)(x).$$

2.5 Příklad

Spočítejme konvoluci dvou Heavisideových funkcí $\Theta(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$.

$$(\Theta \star \Theta)(x) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(s)\Theta(x-s)\,\mathrm{d}s = \Theta \int_0^x 1\,\mathrm{d}s = \Theta(x)x$$

Z toho plyne, že existuje konvoluce i pro funkce, které nejsou z $\mathscr{L}_1$. Pro dvé obecné funkce s Heavisideovou funkcí pak:

$$f(x) = \Theta(x)F(x); \qquad g(x) = \Theta(x)G(x)(f \star g)(x) = \Theta(x)\int_0^x F(s)G(x-s)\,\mathrm{d}s$$

2.6 Definice

Řekneme, že $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je hustotou pravděpodobnosti (hustotou), pokud $(\forall \vec{x} \in \mathbf{E}^r)(f(\vec{x}) \geqslant 0) \wedge \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 1$.

2.7 Poznámka

Výše uvedená definice hustoty pravděpodobnosti je pouze povrchní. Pro naše účely bude ale postačující.

2.8 Věta

Jsou-li $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ hustoty, pak $(f \star g)(\vec{x})$ je rovněž hustotou. Tedy všechny hustoty leží v $\mathscr{L}_1$, a tudíž mají konvoluci.

3. přednáška (6.10.2015) - konvoluce, báze ve funkcionálních Hilbertových prostorech

2.9 Věta

Nechť jsou dány hustoty pravděpodobnosti $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Pak jejich konvoluce $(f \star g)(\vec{x})$ existuje a navíc je také hustotou pravděpodobnosti.

Důkaz:

- o hustotách $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ je známo, že patří do $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$, protože tam patří všechny hustoty
- fakt, že do $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ patří také jejich konvoluce víme díky existenční větě 2.2
- chceme tedy ještě ukázat, že i konvoluce $(f \star g)(\vec{x})$ je hustotou pravděpodobnosti
- díky nerovnosti
$$(f \star g)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} \geqslant 0$$
víme, že je splněna nezápornost hustoty
- ověřme, že $\int_{\mathbf{E}^r}(f \star g)(\vec{x}) = 1$
$$\int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s})\mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x}-\vec{s})\mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\mathrm{d}\vec{s}\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = 1,$$
přičemž jsme v první rovnosti použili Fubiniovu větu a ve druhé rovnosti substituci $\vec{y} = \vec{x} - \vec{s}$
- integrály $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\mathrm{d}\vec{s}$ a $\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y}$ jsou z definice hustoty rovny jedné a tedy $(f \star g)(\vec{x})$ je opravdu také hustotou pravděpodobnosti

2.10 Věta

Nechť $f(x), g(x) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ jsou hustoty pravděpodobnosti. Nechť dále platí, že $\int_{\mathbf{R}} xf(x)\mathrm{d}x = \mu_1$ a $\int_{\mathbf{R}} xg(g) = \mu_2$. Potom
$$\int_{\mathbf{R}} x(f \star g)(x)\mathrm{d}x = \mu_1 + \mu_2.$$

Důkaz:

- z definice konvoluce platí s využitím Fubiniovy věty, že
$$\int_{\mathbf{R}} x(f \star g)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} x\int_{\mathbf{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(s)\int_{\mathbf{R}} xg(x-s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
- provedeme substituci $y = x - s$ a s využitím věty o separabilitě dostaneme
$$\int_{\mathbf{R}} f(s)\int_{\mathbf{R}}(y+s)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(s)yg(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(s)sg(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \mu_2 + \mu_1$$
- poslední rovnost platí protože $f(x), g(x)$ jsou hustoty

2.11 Příklad

Nechť
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Vypočtěme konvoluci $(f \star g)(x)$. Z definice konvoluce a ze vztahu $\int_{\mathbf{R}} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ vyvozujeme sadu rovností

$$f(x) \star g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-s-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} y = s-\mu_1 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y-\mu_1-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left|\ \lambda := x-\mu_1-\mu_2\ \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{\sigma_2 y^2 + \sigma_1(y-\lambda)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\left(y - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\lambda\right)^2 + \lambda^2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right)\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(y - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\lambda\right)^2\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}z^2}\,\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

2.12 Věta – *o posunutí v konvoluci*

Nechť jsou dány libovolné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a vektor $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$. Pak platí

$$f(\vec{x}+\vec{b}) \star g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \star g(\vec{x}+\vec{b}) = \big(f \star g\big)(\vec{x}+\vec{b}).$$

Důkaz:

- není pravděpodobně obtížné nahlédnout, že
$$\big(f \star g\big)(\vec{x}+\vec{b}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}+\vec{b}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{x}) \star g(\vec{x}+\vec{b})$$
- dále
$$f(\vec{x}+\vec{b}) \star g(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}+\vec{b})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = \left| \begin{array}{c} \vec{s}+\vec{b} = \vec{r} \\ \mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{r} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{r})g(\vec{x}+\vec{b}-\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{x}) \star g(\vec{x}+\vec{b})$$
- přitom existence všech dotčených integrálů je garantována větou o existenci konvoluce (2.2)

2.13 Věta – *o derivaci konvoluce*

Nechť jsou dány měřitelné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r) \cap \mathscr{C}_0^1$. Pak platí

$$f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(f \star g\big).$$

Důkaz:

- pokud si derivaci konvoluce z definice rozepíšeme na $\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{x}$, tak uvidíme, že jde vlastně o záměnu derivace a integrálu
- abychom mohli zaměnit derivaci a integrál tak musíme ověřit, že daný integrál alespoň pro jednu hodnotu parametru konverguje (platí), že dané funkce jsou měřitelné (předpoklad) a že existuje příslušná integrabilní majoranta, což ověříme v následujícím bodě
- jelikož spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého maxima tak lze psát $\left|f(\vec{s})\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}-\vec{s})\right| \leqslant K\,|f(\vec{s})|$,
- o $f(\vec{s})$ ale víme, že patří do $\mathscr{L}_1$, a tudíž hledaná majoranta existuje a tím je důkaz dokončen

2.14 Definice

Řekneme, že množina S z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ je ortonormální, pokud pro každou funkci $f(\vec{x}) \in S$ je $\|f(\vec{x})\| = 1$ a zároveň pro každé dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in S$ takové, že $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$ platí rovnost $\langle f|g\rangle = 0$.

2.15 Věta

Je-li S ortonormální množina v $\mathcal{H}$, pak všechny její prvky tvoří lineárně nezávislý soubor.

Důkaz:

- postupujeme metodou sporu
- kdyby funkce z S byly lineárně závislé, tak by existovala nenulová funkce $f_\ell(\vec{x})$ taková, že ji nakombinujeme

$$f_\ell(\vec{x}) = \sum_{k=1, k\neq\ell}^{n} \alpha_k f_k(\vec{x})$$

- aplikujeme-li skalární násobení, tak dostaneme

$$\langle f_\ell|f_\ell\rangle = \sum_{k=1, k\neq\ell}^{n} \alpha_k \langle f_\ell(\vec{x})|f_k(\vec{x})\rangle = 0$$

- z axiomu pozitivní definitnosti ale odtud vyplývá, že $f_\ell(x) = o(\vec{x})$, což je zřetelný spor

2.16 Věta – *Besselova nerovnost*

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ je zvolena libovolně. Označme $a_k := \langle g|f_k\rangle$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2. \tag{2.4}$$

Důkaz:

- zvolme funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ libovolně
- pak platí série rovností , resp. nerovností

$$0 \leqslant \left\| g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|^2 = \left\langle g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \,\middle|\, g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^\star \langle g|f_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} a_k \langle f_k|g\rangle +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_k^\star a_\ell \langle f_\ell|f_k\rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^\star a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^\star + \sum_{k=1}^{n} a_k^\star a_k = \|g\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

2.17 Definice

Řekneme, že množina S je maximální ortonormální množina v $\mathcal{H}$, pokud pro jakoukoliv ortonormální množinu $S' \supset S$ platí, že $S = S'$.

2.18 Věta

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ je (spočetná) ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ zvolena libovolně. Označme $a_k = \langle g|f_k\rangle$. Pak existuje limita

$$\operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) =: h(\vec{x}) \in \mathcal{H}.$$

Navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle g - h|f_k\rangle = 0$.

Důkaz:

- pro funkci $h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x})$ platí jednoduchá rovnost

$$\left\| h_{n+p}(\vec{x}) - h_n(\vec{x}) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(\vec{x}) \right\|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2, \tag{2.5}$$

  kde bylo využito kolmosti a normality funkcí v systému S
- z Besselovy nerovnosti plyne, že pro jakékoli $n \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2$
- protože $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$ je řadou s nezápornými členy a je omezená, jistě také konverguje
- proto ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro indexy $n > n_0$ a $p \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 < \varepsilon^2$
- z nerovnosti (2.5) pak lehce vyvodíme, že posloupnost $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská
- a protože $\mathcal{H}$ je prostorem Hilbertovým, je $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ rovněž konvergentní (ve smyslu normy)
- existuje tudíž $h(\vec{x}) = \operatorname{limnorm}_{n\to\infty} h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- pro pevné $k \in \mathbf{N}$ a $n > k$ je zřejmě $\langle g - h_n | f_k \rangle = 0$
- užijeme-li v předešlém vztahu limitní přechod $n \to \infty$ a aplikujeme-li větu o spojitosti skalárního součinu (1.30), plyne odsud, že $\langle g - h | f_k \rangle = 0$ pro všechny $k \in \mathbf{N}$

4. přednáška (12.10.2015) - báze Hilbertova prostoru, Legendreovy polynomy, lineární operátory

2.19 Poznámka

Pomocné vzorce:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha(x)\sin^\beta(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)} \tag{2.6}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

.

2.20 Definice – *báze Hilbertova prostoru*

Libovolnou maximální ortonormální množinu v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nazveme bází v $\mathcal{H}$.

2.21 Poznámka

Povšimněme si, že oproti číselným tělesům je zde požadavek na ortonormalitu báze (oproti ortogonalitě).

2.22 Definice

Řekneme, že Hilbertův prostor je separabilní, existuje-li v něm báze, která má spočetně mnoho prvků.

2.23 Věta

Nechť $\mathcal{H}$ je separabilní Hilbertův prostor a $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ jeho báze. Nechť pro libovolné $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnosti $\langle g|f_k\rangle = 0$ pro všechny $k \in \mathbf{N}$. Pak $g(\vec{x}) = 0$.

<u>*Důkaz:*</u>

- důkaz provedeme sporem
- $\underbrace{g(\vec{x}) = 0}_{\|g\|\neq 0} \Rightarrow h(\vec{x}) = \dfrac{g(\vec{x})}{\|g\|} \neq 0$
- z toho ale plyne, že $\langle h|f_k\rangle = 0 \quad \forall k$
- tedy $S \cup \{h(\vec{x})\} \supset S$ a je ON množina, což je spor s maximalitou množiny S

2.24 Věta – *o Fourierově rozvoji*

Nechť $\mathcal{H}$ je separabilní Hilbertův prostor a $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ jeho báze. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ je zvoleno libovolně, ale pevně. Označme $a_k = \langle g|f_k\rangle$. Pak

$$g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}). \tag{2.7}$$

Důkaz:

- dokázali jsme $h(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(\vec{x})$
- nyní je S maximální
- je-li $\langle h - g|f_k\rangle = 0$ pro všechna k a pro S maximální, pak $h(\vec{x}) - g(\vec{x}) = 0 \Rightarrow h(\vec{x}) = g(\vec{x})$.

2.25 Definice

Rovnost (2.7) diskutovaná v předchozí větě je tzv. *Fourierův rozvoj* a její koeficienty a_k nazýváme fourierovými koeficienty funkce $g(\vec{x})$ (přidružené k bázi).

2.26 Věta – *o Parsevalově vzorci*

Nechť je $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ báze v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každé dvě funkce $g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí:

$$\langle g|h\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k^\star,$$

kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$ a $b_k = \langle h|f_k\rangle$.

Důkaz:

- výjdeme z věty o Fourierově rozvoji

$$g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}), \quad h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k(\vec{x})$$

- proto platí

$$\langle g|h\rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(\vec{x}) \Big| \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k(\vec{x}) \Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n b_k^\star \langle f_n(\vec{x})|f_k(\vec{x})\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k^\star$$

2.27 Věta – *o Parsevalově rovnosti*

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ je báze v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\|g(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^2, \tag{2.8}$$

kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$.

Důkaz:

- jde o přímý důsledek věty o parsevalově vzorci

2.28 Definice

Rovnost (2.8) nazýváme *Parsevalovou rovností.*

2.29 Poznámka

Známe 4 základní typy bází:

- trigonometrická - je představována goniometrickými funkcemi

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Legendreova}\\ \bullet\ \text{Laguerrova}\\ \bullet\ \text{Hermiteova}\end{array}\right\} - \text{polynomy}$$

2.30 Příklad

Goniometrická báze je dána množinou $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}; k \in \mathbf{N} \right\}$ na prostoru $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ a skalárním součinem $\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathtt{d}x$.
Důkaz báze je poměrně dlouhý a na přednášce nebude probírán. Největším úskalím je jednak dokázání toho, že přidáním jakékoli funkce přijdeme o ON systém a také toho, že po odebrání funkce není báze kompletní.

2.31 Příklad

Pokusme se zkonstruovat Legendreovy polynomy na $\mathbb{L}_2(-1, 1)$ se skalárním součinem $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathtt{d}x$. Začněme připomenutím jednodušší úlohy z MAB3:

Je dán $[1, x, x^2]_\lambda$, jak najít jeho ON alternativu?

1. pro $f_1(x) = a$ hledejme a
   - $\|f_1\|^2 = \int_{-1}^{1} a^2\,\mathtt{d}x \overset{!}{=} 1 \Rightarrow 2a^2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   - tedy $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. pro $f_2(x) = bx + c$ hledejme b, c
   - $\langle f_1|f_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} (bx + c)\,\mathtt{d}x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow c = 0$
   - $\|f_2\|^2 = \int_{-1}^{1} b^2x^2\,\mathtt{d}x \overset{!}{=} 1 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{3}{2}}$
   - tedy $f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$
3. pro $f_3(x) = dx^2 + ex + f$ hledejme d, e, f
   - víme, že $\langle f_1|f_3 \rangle = \langle f_2|f_3 \rangle \overset{!}{=} 0$
   - dále, $\|f_3\|^2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \deg(f_3) = 2$

<u>Obecná konstrukce:</u>
Mějme $\deg(L_n) = n \Rightarrow L_0(x) = f_1(x); L_1(x) = f_2(x); \ldots$
Dále, $L_n(x) = \frac{\mathtt{d}^n}{\mathtt{d}x^n}[Y(x)]$ a $\deg(Y) = 2n$.

1. požadavek ortogonality: $\langle L_n|p\rangle = 0$ pro libovolný polynom, pro který $\deg(p) < n$.

$$\langle L_n|p\rangle = \langle Y^{(n)}|p\rangle = \int_{-1}^{1} Y^{(n)}(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = p & v' = Y^{(n)} \\ u' = p' & v = Y^{(n-1)} \end{matrix}\right| =$$

$$= \left[Y^{(n-1)}(x)p(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Y^{(n-1)}(x)p'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = p' & v' = Y^{(n-1)} \\ u' = p'' & v = Y^{(n-2)} \end{matrix}\right| =$$

$$= \left[Y^{(n-1)}(x)p(x) - Y^{(n-2)}(x)p'(x)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} Y^{(n-2)}(x)p''(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{\left[Y^{(n-1)}(x)p(x) - Y^{(n-2)}(x)p'(x) + \ldots + (-1)^{n+1}Y(x)p^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1}}_{\text{chceme} \overset{!}{=} 0} +$$

$$+ (-1)^n \int_{-1}^{1} Y(x)\underbrace{p^{(n)}(x)}_{=0}\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} 0$$

Této rovnosti lze docílit tak, že volíme $Y(x) = A(x-1)^n(x+1)^n, \quad A \neq 0$.
Tedy $L_n(x) = A\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$.

2. požadavek normality $(A = ?)$

$$\|L_n(x)\|^2 = \langle Y^{(n)}|Y^{(n)}\rangle \overset{!}{=} 1$$

$$\langle Y^{(n)}|Y^{(n)}\rangle = \int_{-1}^{1} Y^{(n)}(x)Y^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = Y^{(n)} & v' = Y^{(n)} \\ u' = Y^{(n+1)} & v = Y^{(n-1)} \end{matrix}\right| =$$

$$= \underbrace{\left[Y^{(n)}(x)Y^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} Y^{(n+1)}(x)Y^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = Y^{(n+1)} & v' = Y^{(n-1)} \\ u' = Y^{(n+2)} & v = Y^{(n-2)} \end{matrix}\right| = \underbrace{[\cdots]}_{=0} + \int_{-1}^{1} Y^{(n+2)}(x)Y^{(n-2)}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} \underbrace{Y^{(2n)}(x)}_{(2n)!} Y(x)\,\mathrm{d}x = A^2(-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{matrix} x & = \sin u \\ \mathrm{d}x & = \cos u\,\mathrm{d}u \end{matrix}\right| = 2A^2(2n)! \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} \cos u\,\mathrm{d}u =$$

$$= 2A^2(2n)! \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n+1}\,\mathrm{d}u \overset{(2.6)}{=} 2A^2(2n)! \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2+2n+1}{2}\right)} =$$

$$= A^2(2n)! \frac{n!\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}} = 2A^2\frac{(2n)!(2n)!!}{(2n+1)!!} = 2A^2\frac{(2n)!!(2n-1)!!(2n)!!}{(2n+1)!!} =$$

$$= 2A^2\frac{[(2n)!!]^2}{2n+1} \overset{!}{=} 1$$

Tedy $A = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{1}{(2n)!!}$.

Tyto polynomy řeší Legendreovu obyčejnou diferenciální rovnici (po dosazení): $(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$.

2.32 Poznámka

Laguerrovy polynomy jsou definovány na $\mathbb{L}_2^{(\mathrm{e}^{-x})}(0,+\infty)$ se skalárním součinem $\langle f|g\rangle_w = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Lze je zapsat ve tvaru $L_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$. Skutečně jde o polynomy, neboť exponenciální členy se ve výsledku vyruší.
Hermiteovy polynomy jsou bází na $\mathbb{L}_2^{(\mathrm{e}^{-x^2})}(-\infty,+\infty)$ se skalárním součinem $\langle f|g\rangle_w = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

3 Lineární operátory nad separabilními Hilbertovými prostory

3.1 Základní pojmy

Operátorem rozumíme zobrazení $\hat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$. V celém dalším textu budeme vždy předpokládat, že $\mathcal{H}$ je separabilním Hilbertovým prostorem. Definiční obor je pak $\mathrm{Dom}(\hat{L}) = \{f(\vec{x}) \in \mathcal{H} : \hat{L}(f) \in \mathcal{H}\}$. Uvědomme si, že oproti číselným funkcím, ve kterých by funkční hodnota pro x, nepatřící do svého definičního oboru, prostě neexistovala, je zde situace jiná. Obraz funkce může existovat mimo hilbertovský prostor, tudíž v tomto případě bude určení definičního oboru mnohem zásadnější.

3.2 Definice

Řekneme, že operátor $\hat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je lineární, pokud:

1. $\forall f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H} : \hat{L}(f+g) = \hat{L}(f) + \hat{L}(g)$
2. $\forall f(\vec{x}) \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbf{C} : \hat{L}(\alpha f) = \alpha \hat{L}(f)$

3.3 Poznámka

V dalším textu budeme termínem operátor vždy rozumět lineární operátor.

3.4 Definice

Bilineární forma příslušná $\hat{L}$ je zobrazení $qq(f,g) : \mathrm{Dom}(\hat{L}) \times \mathrm{Dom}(\hat{L}) \mapsto \mathbf{C}$ definované předpisem $qq(f,g) = \langle \hat{L}f|g\rangle$.

3.5 Definice

Kvadratická forma příslušná $\hat{L}$ je zobrazení $q(f) : \mathrm{Dom}(\hat{L}) \mapsto \mathbf{C}$ definované předpisem $q(f) = qq(f,f) = \langle \hat{L}f|f\rangle$.

3.6 Definice

Typy definitnosti operátoru $\hat{L}$:

- $\hat{L} \rhd 0$ (je pozitivně definitní) $\Leftrightarrow \forall f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\hat{L})\backslash\{0\} : \langle \hat{L}f|f\rangle > 0$,
- $\hat{L} \trianglerighteq 0$ (je pozitivně semidefinitní) $\Leftrightarrow \forall f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\hat{L})\backslash\{0\} : \langle \hat{L}f|f\rangle \geqslant 0 \wedge \exists f(\vec{x}) \neq 0$ tak, že $\langle \hat{L}f|f\rangle = 0$,
- $\hat{L} \lhd 0$ (je negativně definitní) $\Leftrightarrow \forall f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\hat{L})\backslash\{0\} : \langle \hat{L}f|f\rangle < 0$,
- $\hat{L} \trianglelefteq 0$ (je negativně semidefinitní) $\Leftrightarrow \forall f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\hat{L})\backslash\{0\} : \langle \hat{L}f|f\rangle \leqslant 0 \wedge \exists f(\vec{x}) \neq 0$ tak, že $\langle \hat{L}f|f\rangle = 0$,
- $\hat{L} \lhd \rhd 0$ (je indefinitní) $\Leftrightarrow \exists f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\hat{L})$ tak, že $\langle \hat{L}f|f\rangle > 0 \wedge \langle \hat{L}g|g\rangle < 0$.

3.7 Definice

Řekneme, že $\hat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je hermitovský (hermitovsky sdružený, samosdružený), pokud $\forall f, g \in \mathrm{Dom}(\hat{L}) : \langle \hat{L}f|g\rangle = \langle f|\hat{L}g\rangle$.

3.8 Poznámka

V dalším textu se omezíme na případ, kdy $\mathrm{Dom}(\hat{L}) = \mathcal{H}$.

3.9 Věta

Je-li $\hat{L}$ hermitovský a $\mathrm{limnorm}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{H}$ a $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Pak $\lim_{n\to\infty}\langle \hat{L}f_n|g\rangle = \langle \hat{L}f|g\rangle$.

Důkaz:

- $\lim_{n\to\infty}\langle \hat{L}f_n(x)|g(x)\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n(x)|\hat{L}g(x)\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} f_n(x)|\hat{L}g(x)\rangle = \langle f(x)|\hat{L}g(x)\rangle = \langle \hat{L}f(x)|g(x)\rangle$.

3.10 Poznámka

Všimněme si, že se věta vůbec nezmiňuje o platnosti $\lim_{n\to\infty} \hat{L}(f_n) = \hat{L}(f)$. Řešíme pouze číselnou posloupnost $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, kde $\omega_n = \langle \hat{L} f_n | g \rangle$.

5. přednáška (13.10.2015) - operátory a jejich hermitovskost, spojitost operátoru

3.11 Definice – *Integrální operátor (jako příklad lineárního operátoru)*

Nechť je dána omezená oblast $G \subset \mathbf{E}^r$ a funkce $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{C}(\overline{G} \times \overline{G})$. Pak operátor $\widehat{K}$ definovaný předpisem

$$\widehat{K} := \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) \ \bullet \ \mathtt{d}\vec{y}$$

budeme nazývat *Fredholmovým integrálním operátorem* se spojitým jádrem $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$. Za definiční obor integrálního operátoru $\widehat{K}$ lze klást Hilbertův prostor $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(G)$ nebo Banachův prostor $\mathscr{C}_\sigma(\bar{G})$. To prokážeme časem.

3.12 Poznámka

Černý puntík v předchozí definici značí působení operátoru na funkci. Tedy na místo puntíku píšeme funkci, na kterou operátorem působíme. $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ nazýváme jádrem operátoru $\widehat{K}$.

3.13 Poznámka

Na otázku, kdy může být $\widehat{K}$ hermiteovský, odpovídá následující série rovností.

$$\left\langle f \mid \widehat{K}g \right\rangle = \int_G f(\vec{x}) \left(\int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) g(\vec{y}) \mathtt{d}y \right)^\star \mathtt{d}x = \int_G \int_G f(\vec{x}) \mathscr{K}^\star(\vec{x},\vec{y}) g^\star(\vec{y}) \mathtt{d}x\mathtt{d}y = \left| \begin{array}{c} \vec{x} \to \vec{y} \\ \vec{y} \to \vec{x} \end{array} \right| =$$

$$= \int_G \int_G \mathscr{K}^\star(\vec{y},\vec{x}) f(\vec{y}) g^\star(\vec{x}) \mathtt{d}x\mathtt{d}y$$

$$\left\langle \widehat{K}f \mid g \right\rangle = \int_G \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) f(\vec{y}) g^\star(\vec{x}) \mathtt{d}y\mathtt{d}x$$

Pokud má být tedy $\widehat{K}$ hermiteovský, tak musí platit $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \mathscr{K}^\star(\vec{y},\vec{x})$ skoro všude v G. Vzhledem k tomu, že $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ je spojité, pak rovnost skoro všude splývá s klasickou rovností. Pokud by rovnost neplatila, tak nemůže platit ani $\left\langle \widehat{K}f \mid g \right\rangle = \left\langle f \mid \widehat{K}g \right\rangle$. Povšimněme si, že pro reálné funkce stačí zkoumat symetrii záměny proměnných.

3.14 Věta

Nechť je dán hermiteovský operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každou konvergentní (ve smyslu konvergence podle normy) řadu funkcí $\sum_{n=1}^\infty f_n(\vec{x})$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k součtu $s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\sum_{n=1}^\infty \left\langle \widehat{L}(f_n) | g \right\rangle = \left\langle \widehat{L}(s) | g \right\rangle.$$

Důkaz: – studenti samostatně

3.15 Věta

Operátor $\widehat{L}$ je hermiteovský $\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{H} : \left\langle \widehat{L}f \mid f \right\rangle \in \mathbf{R}$.

Důkaz:

- věnujme se nejdříve implikaci zleva doprava

$$\left\langle \hat{L}f \mid f \right\rangle = \left\langle \hat{L}f \mid f \right\rangle^{\star} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\left\langle \hat{L}f \mid f \right\rangle\right) = 0$$

- při důkazu druhé implikace výjděme z

$$\left\langle \hat{L}(f+g) \mid f+g \right\rangle = \left\langle \hat{L}f \mid f \right\rangle + \left\langle \hat{L}f \mid g \right\rangle + \left\langle \hat{L}g \mid f \right\rangle + \left\langle \hat{L}g \mid g \right\rangle$$

$$\left\langle \hat{L}(f+\mathtt{i}g) \mid f+\mathtt{i}g \right\rangle = \left\langle \hat{L}f \mid f \right\rangle - \mathtt{i}\left\langle \hat{L}f \mid g \right\rangle + \mathtt{i}\left\langle \hat{L}g \mid f \right\rangle + \left\langle \hat{L}g \mid g \right\rangle$$

- první a poslední člen v obou výše uvedených rovnostech jsou jistě čísla z $\mathbf{R}$
- z předpokladu víme, že $\left\langle \hat{L}(f+g) \mid f+g \right\rangle \in \mathbf{R}$ a se znalostí první rovnosti ve druhém bodu důkazu zjistíme

$$-\mathrm{Im}\left(\left\langle \hat{L}f \mid g \right\rangle\right) = \mathrm{Im}\left(\hat{L}g \mid f\right)$$

- z předpokladu víme, že $\left\langle \hat{L}(f+ig) \mid f+ig \right\rangle \in \mathbf{R}$ a se znalostí druhé rovnosti ve druhém bodu důkazu zjistíme

$$\mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{L}f \mid g \right\rangle\right) = \mathrm{Re}\left(\hat{L}g \mid f\right)$$

- nakonec tedy platí

$$\left\langle \hat{L}f \mid g \right\rangle = \mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{L}f \mid g \right\rangle\right) + \mathtt{i}\mathrm{Im}\left(\left\langle \hat{L}f \mid g \right\rangle\right) = \mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{L}g \mid f \right\rangle\right) - \mathtt{i}\mathrm{Im}\left(\left\langle \hat{L}g \mid f \right\rangle\right) = \left\langle \hat{L}g \mid f \right\rangle^{\star} = \left\langle f \mid \hat{L}g \right\rangle$$

3.16 Poznámka

Je-li $\hat{L}$ (libovolně) definitní, pak je hermiteovský. Operátor obecně ale nemusí být definitní. Například pokud $\langle \hat{L}f|f \rangle = 8\mathtt{i}$, pak nemá smysl o definitnosti hovořit.

3.17 Definice

Řekneme, že operátory $\hat{L}, \hat{K}$ komutují, pokud pro všechny funkce $f(\vec{x})$ z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ platí $\hat{K}\hat{L}(f) = \hat{L}\hat{K}(f)$.

3.18 Věta

Jsou-li $\hat{K}, \hat{L}$ hermiteovské operátory, které komutují, pak také $\hat{K}\hat{L}$ a $\hat{L}\hat{K}$ jsou hermiteovské operátory.

Důkaz:

- z definice hermiteovskosti a komutativity platí

$$\left\langle \hat{K}\hat{L}f \mid g \right\rangle = \left\langle \hat{L}\hat{K}f \mid g \right\rangle = \left\langle \hat{K}f \mid \hat{L}g \right\rangle = \left\langle f \mid \hat{K}\hat{L}g \right\rangle$$

- protože uvedená rovnost platí pro všechny funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, je tvrzení dokázáno

3.19 Definice

Nechť je zadán lineární operátor $\hat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ na separabilním Hilbertově prostoru. Nechť uspořádaná dvojice (λ, g) splňuje vlastnosti

1. λ je komplexní číslo,
2. $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$,
3. $\hat{L}g = \lambda g$.

Pak λ označíme za *vlastní hodnotu* operátoru $\hat{L}$, $g(\vec{x})$ za *vlastní funkci* operátoru $\hat{L}$ přidruženou k vlastní hodnotě λ. Množinu všech vlastních hodnot operátoru $\hat{L}$ nazveme *spektrem operátoru* $\hat{L}$ a označíme symbolem $\sigma(\hat{L})$.

3.20 Poznámka

Pro naše účely budeme používat pojem spektrum v zúženém smyslu (viz předchozí definice). Správně bychom měli specifikovat, že jde o tzv. bodové spektrum. Existuje totiž více typů spekter, ale touto problematikou se zde zabývat nebudeme.

3.21 Věta

Nechť $\widehat{L}$ je hermiteovský. Potom $\sigma(\widehat{L}) \subset \mathbf{R}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- $\left\langle \widehat{L}f \mid f \right\rangle = \left\langle \lambda f \mid f \right\rangle = \lambda \left\langle f \mid f \right\rangle$
- to znamená, že $\lambda = \frac{\left\langle \widehat{L}f|f \right\rangle}{\left\langle f|f \right\rangle} \in \mathbf{R}$

3.22 Věta

Nechť je $\widehat{L}$ pozitivně (resp. negativně) definitní. Potom $\sigma(\widehat{L}) \subset \mathbf{R}^+$ (resp. $\sigma(\widehat{L}) \subset \mathbf{R}^-$).

<u>*Důkaz:*</u>

- mějme $\widehat{L} \rhd 0$, tedy $\langle \widehat{L}f|f \rangle \in \mathbf{R}^+; \quad \forall f(\vec{x}) \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$
- protože $\langle f|f \rangle \in \mathbf{R}^+$, dostáváme $\lambda = \dfrac{\langle \widehat{L}f|f \rangle}{\langle f|f \rangle} \in \mathbf{R}^+$
- pro $\widehat{L} \lhd 0$ je důkaz obdobný

3.23 Věta

Nechť $\widehat{L}$ je hermiteovský a $\mu, \lambda \in \sigma(\widehat{L}), \mu \neq \lambda$ Dále nechť $h(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ jsou vlastní funkce přidružené k vlastním číslům μ, λ. Pak $\left\langle g \mid \vec{h} \right\rangle = 0$.

<u>*Důkaz:*</u>

- platí následující rovnosti $\left\langle \widehat{L}g \mid h \right\rangle = \left\langle g \mid \widehat{L}h \right\rangle = \left\langle \mu g \mid h \right\rangle = \left\langle g \mid \lambda h \right\rangle$
- ze zadání víme, že $\mu \neq \lambda$, přičemž navíc $\lambda = \lambda^\star$ a má-li platit $(\mu - \lambda^\star)\left\langle g \mid h \right\rangle = 0$, tak musí platit, že $\left\langle g \mid h \right\rangle = 0$

3.24 Věta

Nechť $\widehat{L}$ je hermiteovský a $\mu \in \sigma(\widehat{L})$ je pevně zvoleno. Označme $W_\mu := \{g(\vec{x}) \in \mathcal{H} : \widehat{L}g = \mu g\} \cup \{0\}$. Pak W_μ je vektorový prostor.

<u>*Důkaz:*</u>

- využijeme znalosti, že $\mathcal{H}$ je vektorový prostor a ověříme jenom uzavřenost třídy W_μ na násobení a sčítání
- vezměme $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in W_\mu \backslash \{0\}$ a $\alpha \in \mathbf{C}$
- důkaz završují rovnosti $\widehat{L}(f + \alpha g) = \widehat{L}f + \alpha \widehat{L}g = \mu f + \alpha \mu g = \mu(f + \alpha g)$

3.25 Definice

Geometrickou násobností vlastního čísla μ nazýváme dimenzi prostoru W_μ. Vlastní číslo nazveme prostým, pokud je jeho geometrická násobnost rovna jedné. Nedegenerovaný operátor je takový operátor, jehož všechny vlastní hodnoty mají geometrickou násobnost rovnou jedné. V opačném případě takový operátor nazýváme degenerovaným.

3.26 Definice

Operátor $\widehat{L}$ nazveme spojitým právě tehdy, když $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \parallel f - g \parallel < \delta \Rightarrow \parallel \widehat{L}f - \widehat{L}g \parallel < \epsilon$.

3.27 Poznámka

Tato definice je ekvivalentní s: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) : \|h\| < \delta \Rightarrow \|\widehat{L}(h)\| < \varepsilon$.

3.28 Věta

Nechť $\operatorname{limnorm}_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ a $\widehat{L}$ je spojitý. Potom $\operatorname{limnorm}_{n\to\infty} \widehat{L}(h_n) = \widehat{L}(h)$.

Důkaz:

- stačí si připomenout definici konvergence podle normy a spojitosti operátoru (předchozí definice)

3.29 Věta

Nechť $\widehat{L}$ je spojitý a $\underline{\sum}_{n=1}^{\infty} h_n(x) = s(x)$. Potom $\underline{\sum}_{n=1}^{\infty} \widehat{L}(h_n) = \widehat{L}(s)$.

Důkaz:

- důsledek předchozí věty (po převodu tvrzení na konvergenci částečných součtů podle normy)

3.30 Příklad

Ukažme, že $\widehat{L} = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}x}$ na $\mathbb{L}_2(0,1)$ není spojitý.

$$\| x^n \|^2 = \| x^n - 0 \|^2 = \left\langle x^n \mid x^n \right\rangle = \int_0^1 x^2 n \mathtt{d}x = \frac{1}{2n+1} \to 0 \Rightarrow x^n \rightharpoonup 0.$$

Můžeme tedy zvolit n_0 tak, aby pro každé $\varepsilon > 0$ byla splněna podmínka $\|x^n\| < \varepsilon$. Podívejme se ale co se stane, když na x^n zapůsobíme operátorem $\widehat{L}$, tehdy totiž $\widehat{L}(x^n) = nx^{n-1}$ a

$$\| nx^{n-1} \| = \left\langle nx^{n-1} \mid nx^{n-1} \right\rangle = \int_0^1 n^2 x^{2n-2} = \frac{n^2}{2n-1} \to \infty \Rightarrow \widehat{L}(x^n) \nrightarrow 0.$$

Tedy posloupnost $\left(\widehat{L}(x^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ podle normy nekonverguje, ačkoli posloupnost $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ ano.

6. přednáška (19.10.2015) - omezenost operátoru, čistě bodové spektrum, Fredholmův integrální operátor

3.31 Definice

$\hat{L}$ je omezený, existuje-li $K \in \mathbf{R}_0^+$ tak, že $\forall f(\vec{x}) \in \mathcal{H} : \|\hat{L}f\| \leqslant K\|f\|$.

3.32 Věta

$\hat{L}$ je omezený $\Leftrightarrow$ $\hat{L}$ je spojitý.

<u>*Důkaz:*</u>

- dokažme nejprve implikaci zleva doprava
  - chceme ukázat, že $\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\|h(\vec{x})\| < \delta \Rightarrow \|\hat{L}(h)\| < \varepsilon\big)$
  - $\|\hat{L}(h)\| \leqslant K\|h\| \leqslant K\delta = \varepsilon$
- nyní dokážeme opačnou implikaci
  - zvolme libovolně, ale pevně $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0$ při splnění $\|\hat{L}(h)\| < \varepsilon$
  - zvolme $c \in (0, \delta)$

$$h(\vec{x}) = \frac{cf(\vec{x})}{\|f\|} \Rightarrow \|h\| = c < \delta \overset{spoj.}{\Rightarrow} \|\hat{L}(h)\| < \varepsilon$$

$$\left\|\hat{L}(h)\right\| = \left\|\hat{L}\left(\frac{cf(\vec{x})}{\|f\|}\right)\right\| = \frac{c}{\|f\|}\left\|\hat{L}f(\vec{x})\right\| < \varepsilon$$

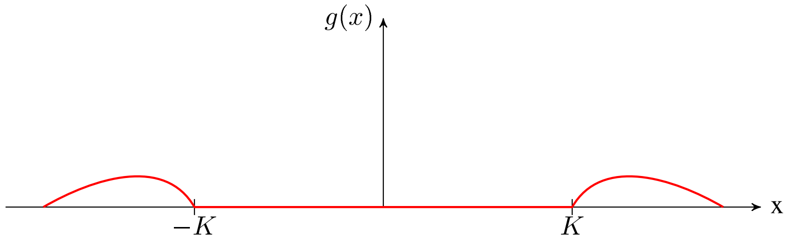
$$\left\|\hat{L}f\right\| < \frac{\varepsilon\|f\|}{c} \Rightarrow K = \frac{\varepsilon}{c}$$

3.33 Příklad

Mějme lineární operátor $\hat{L} = x$, jehož $\mathrm{Dom}(\hat{L}) = \mathbb{L}_2(\mathbf{R})$. Ukažme, že takový operátor není omezený. Kdyby omezený byl, pak

$$\exists K > 0 : \|\hat{L}g\| \leqslant K\|g\| \quad \forall g(x) \in \mathbb{L}_2(\mathbf{R}),$$
$$\|\hat{L}g\|^2 \leqslant K^2\|g\|^2,$$
$$\langle\hat{L}g|\hat{L}g\rangle \leqslant K^2\langle g|g\rangle,$$
$$\int_{\mathbf{R}} x^2|g(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant K^2\int_{\mathbf{R}}|g(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{\mathbf{R}} \underbrace{(K^2 - x^2)}_{<0}\underbrace{|g(x)|^2}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad \forall g(x) \in \mathbb{L}_2(G),$$

což je spor. Jelikož má uvedená rovnost platit $\forall g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, nemůže žádné takové $K \geqslant 0$ existovat. Volbou funkce $g(\vec{x})$ podle níže uvedeného obrázku totiž lze poměrně snadno docílit toho, že $\int_{\mathbf{R}} (K^2 - x^2)|g(x)|^2 \, \mathrm{d}x < 0$, což je spor. Z toho tedy plyne, že $\widehat{L}$ není omezený $\Rightarrow$ $\widehat{L}$ není spojitý.



Obrázek 2: Graf funkce g

3.34 Věta – *Hellingerův-Toeplitzův teorém*

Je-li $\widehat{L}$ hermitovský operátor a $\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathcal{H}$, pak je $\widehat{L}$ omezený.

3.35 Definice

Řekneme, že $\widehat{L}$ je operátorem s čistě bodovým spektrem, pokud:

1. $\widehat{L}$ je omezený,
2. v $\mathcal{H}$ existuje báze vytvořená pouze z vlastních funkcí operátoru $\widehat{L}$.

3.36 Věta – *o spektru operátoru s čistě bodovým spektrem*

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ je báze v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, tvořená vlastními funkcemi operátoru $\widehat{L}$ s čistě bodovým spektrem. Označme μ_k vlastní číslo příslušné vlastní funkci $f_k(\vec{x})$. Nechť $U = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$. Pak $\sigma(\widehat{L}) = U$.

Důkaz:

- sporem
- $\exists \lambda \in \sigma(\widehat{L}) \backslash U \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} : \lambda \neq \mu_n \Rightarrow \exists g(x) \in \mathcal{H} : \widehat{L}(g) = \lambda g \quad (g \neq 0)$
- $\widehat{L}$ je s čistě bodovým spektrem $\Rightarrow g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}); \quad a_k = \langle g | f_k \rangle$
- $$\widehat{L}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x})\Big) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) \quad \Big| \widehat{L} \text{ omezený } \Rightarrow \widehat{L} \text{ spojitý}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{L}(f_k(\vec{x})) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x})$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_k f_k(\vec{x}) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k(\mu_k - \lambda) f_k(\vec{x})}_{❶} = 0$$

  Členy $\mu_k - \lambda$ a $f_k(\vec{x})$ ve výrazu ❶ jsou oba různé od 0. Chceme ukázat, že také $a_1 = a_2 = \cdots = 0$. Pro spor předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbf{N}$ je $a_n \neq 0$.
- výraz ❶ přenásobíme $|f_n(\vec{x})\rangle$, čímž obdržíme $a_n(\mu_n - \lambda)1 = 0 \Rightarrow a_n = 0$, což je spor s uvažovaným $a_n \neq 0$

3.37 Důsledek

Z předchozího vyplývá, že $\mathrm{card}(S) \leqslant \aleph_0$ a také $\mathrm{card}(\sigma(\widehat{L})) \leqslant \aleph_0$. Odtud plyne, že buď různých vlastních hodnot je konečně mnoho a geometrická násobnost je nejvýše spočetná, nebo že různých vlastních hodnot je spočetně mnoho a geometrická násobnost je konečná. Nemůže však být spočetně mnoho různých vlastních hodnot se spočetnou násobností, neboť to by vedlo na nespočetnou množinu.

3.38 Definice

Nechť $\widehat{L}$ je operátor s čistě bodovým spektrem a $\lambda_k \in \mathbf{C}$ jeho vlastní čísla s násobnostmi rovnými číslům ν_k. Unfoldovaným (rozbaleným) spektrem rozumíme vektor

$$\sigma_{unf}(\widehat{L}) = (\overbrace{\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1}^{\nu_1\text{-krát}}, \overbrace{\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2}^{\nu_2\text{-krát}}, \ldots),$$

přičemž se předpokládá uspořádání $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$. Operátorovou bází rozumíme množinu ortonormálních funkcí (citovanou v definici operátoru s čistě bodovým spektrem), seřazenou odpovídajícím způsobem podle indexování unfoldovaného spektra, tj. $\widehat{L}(f_k) = \lambda_k f_k$.

3.39 Věta

Operátor s čistě bodovým spektrem, pro který $\sigma(\widehat{L}) \subset \mathbf{R}$, je hermitovský.

Důkaz:

- stačí ukázat, že $\forall g(\vec{x}) \in \mathcal{H} : \langle \widehat{L}g|g\rangle \in \mathbf{R}$
- operátor s čistě bodovým spektrem $\Rightarrow g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x})$
- pak

$$\langle \widehat{L}g|g\rangle = \Big\langle \widehat{L}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x})\Big)\Big| \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell f_\ell(\vec{x})\Big\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{omezenost } \widehat{L} \\ \Downarrow \\ \text{spojitost } \widehat{L} \end{array} \right| = \Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k f_k(\vec{x})\Big| \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell f_\ell(\vec{x})\Big\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle a_k \lambda_k f_k(\vec{x}) | a_\ell f_\ell(\vec{x})\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k a_k^{\star} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{|a_k|^2}_{\in \mathbf{R}} \in \mathbf{R}$$

- studenti sami rozmyslí, proč řada $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2$ jistě konverguje

3.40 Poznámka

Fourierovým rozvojem funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ podle operátorové báze (operátoru s čistě bodovým spektrem), rozumíme rovnost $g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x})$ přičemž $f_k(\vec{x}) \in S$ a $a_k = \langle g|f_k\rangle$. Přitom S je operátorovou bází z definice 3.38.

3.41 Věta – *o separabilitě jádra integrálního operátoru*

Nechť je dán Fredholmův integrální operátor s čistě bodovým spektrem, jehož $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathbb{L}_2(G)$. Nechť $\sigma_{unf}(\widehat{K}) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ a $B = \{\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}), \ldots\}$ je příslušná operátorová báze. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|$ konverguje. Pak integrální jádro takového operátoru může být přepsáno do tvaru

$$\mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell \varphi_\ell(\vec{x}) \varphi_\ell^{\star}(\vec{y}).$$

Důkaz:

- Fredholmův operátor $\widehat{K} = \int_G \mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y}) \bullet \mathrm{d}\vec{y}$, kde $G \subset \mathbf{E}^r$ je omezená oblast a $\mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathscr{C}(\bar{G} \times \bar{G})$ je jádro operátoru.
- $g \in \mathbb{L}_2(G) = \mathcal{H}; \quad g(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(\vec{x}); \quad \varphi_k(\vec{x}) \in B$
- chceme $\forall g(\vec{x}) \in \mathcal{H} \quad \widehat{K}g = \int_G \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell \varphi_\ell(\vec{x}) \varphi_\ell^{\star}(\vec{y}) g(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}$

$$\widehat{K}g = \widehat{K}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(\vec{x})\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{K}(\varphi_k(\vec{x})) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \varphi_k(\vec{x}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_G g(\vec{y}) \varphi_k^{\star}(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}}_{a_k} \lambda_k \varphi_k(\vec{x}) \stackrel{❶}{=} \int_G \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(\vec{x}) \varphi_k^{\star}(\vec{y})}_{\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})} g(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}$$

- v posledním výraze jsme obdrželi separabilní funkci, validitu záměny sumy a integrálu v rovnosti ❶ ověříme Weierstrassovým kritériem
$$\|\lambda_k \varphi_k(\vec{x})\varphi_k^\star(\vec{y})g(\vec{y})\| \leqslant \underbrace{\|g\| \cdot 1 \cdot 1 \cdot |\lambda_k|}_{\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|g\|}$$
- pravá strana předchozí nerovnosti konverguje z předpokladu věty, tedy záměna sumy s integrálem byla oprávněná a $\mathscr{K}$ je separabilní funkce.

3.42 Poznámka

Povšimněme si, že z předpokladů předchozí věty je tedy $\widehat{K}$ hermiteovský. Dále si povšimněme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|$ musí konvergovat například proto, že vlastních čísel je konečně mnoho, nebo že v unfoldovaném spektru je spočetně mnoho nul a ostatních vlastních čísel jen konečně.

4 Integrální rovnice

4.1 Definice

Fredholmova integrální rovnice je výraz
$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y})\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}), \tag{4.9}$$
kde

$\varphi(\vec{x})$	...	neznámá funkce,
$\mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$	...	jádro integrálního operátoru,
$\mu \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$	...	parametr integrální rovnice,
$f(\vec{x})$	...	pravá strana.

Z pohledu integrálního operátoru jde o rovnici $\varphi(\vec{x}) = \mu\widehat{K}(\varphi(\vec{x})) + f(\vec{x})$. Je-li $\mathscr{K}$ spojitá funkce na kompaktním $\mathscr{C}(\bar{G} \times \bar{G})$, pak ji nazýváme spojitým jádrem.

4.2 Věta

Nechť je operátor $\widehat{K}$ definován na Banachově prostoru $\mathfrak{B} = \mathscr{C}_\sigma(\bar{G})$, nebo na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(G)$, tedy $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathfrak{B}$ nebo $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathcal{H}$. Pak platí $\mathrm{Ran}(\widehat{K}) \subset \mathfrak{B}$ nebo $\mathrm{Ran}(\widehat{K}) \subset \mathcal{H}$.

7. přednáška (20.10.2015) - mez jádra, omezenost Fredholmova operátoru, metoda postupných aproximací

4.3 Definice

Nechť je zadána integrální rovnice (4.9) se spojitým jádrem $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}):\ G\times G\mapsto \mathbf{C}$. Pak reálné číslo

$$\mathtt{M} := \max_{(\vec{x},\vec{y})\in\overline{G}\times\overline{G}} \left|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\right|$$

nazýváme *mezí jádra* $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$. Dále definujeme *objem oblasti G* jako $\mathtt{V} = \lambda_r(G) \in \mathbf{R}$.

4.4 Definice

Řekneme, že $\widehat{K}$ má *separabilní jádro*, pokud existují lineárně nezávislé a spojité funkce $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}),\ldots,g_n(\vec{x}) : \overline{G}\mapsto\mathbf{C}$ a lineárně nezávislé a spojité funkce $h_1(\vec{y}), h_2(\vec{y}),\ldots,h_n(\vec{y}) : \overline{G}\mapsto\mathbf{C}$ tak, že pro všechny funkce $\varphi(\vec{x})\in\mathcal{H}$ platí

$$\widehat{K}(\varphi(\vec{x})) = \int_G \sum_{k=1}^{n} g_k(\vec{x}) h_k^\star(\vec{y})\varphi(\vec{y})\mathtt{d}\vec{y}.$$

4.5 Věta

Fredholmův integrální operátor se spojitým jádrem je omezený v Banachově prostoru $\mathscr{C}_\sigma(\overline{G})$.

<u>*Důkaz:*</u>

- chceme ukázat, že $\exists W\in\mathbf{R}_0^+ : \forall\varphi(\vec{x})\in\mathscr{C}_\sigma(\overline{G}) : \|\widehat{K}\varphi\|_\sigma \leqslant W\|\varphi\|_\sigma$
- dále platí série rovností

$$\|\widehat{K}(\varphi)\|_\sigma = \max_{\vec{x}\in\overline{G}} |\widehat{K}\varphi| = \max_{\vec{x}\in\overline{G}} \left|\int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{y})\mathtt{d}\vec{y}\right| = \max_{\vec{x}\in\overline{G}} \int_G \left|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\right|\cdot\left|\varphi(\vec{y})\right|\mathtt{d}\vec{y}$$

- z definice 4.3 víme, že můžeme omezit jádro operátoru $\widehat{K}$, pokud navíc provedeme odhad integrálu

$$\int_G |\varphi(\vec{y})\mathtt{d}y| \leqslant \lambda(G)\max_{\vec{x}\in\overline{G}}|\varphi(\vec{x})|,$$

  tak dostaneme nerovnost

$$\max_{\vec{x}\in\overline{G}}\int_G \left|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\right|\cdot\left|\varphi(\vec{y})\right|\mathtt{d}\vec{y} \leqslant \mathtt{M}\cdot\lambda(G)\cdot\max_{\vec{x}\in\overline{G}}|\varphi(\vec{x})| = \mathtt{MV}\|\varphi\|_\sigma$$

- stačí tedy volit $W = \mathtt{MV}$

4.6 Věta

Fredholmův integrální operátor se spojitým jádrem je omezený na $\mathbb{L}_2(G)$.

Důkaz:

- postup bude podobný jako v důkazu předchozí věty, jen je třeba dát pozor na to, že nyní se nacházíme na prostoru $\mathbb{L}_2(G)$, a proto budeme používat příslušně pozměněnou normu
- platí, že

$$\| \hat{K}\varphi \|^2 = \langle \hat{K}\varphi \mid \hat{K}\varphi \rangle = \int_G |\hat{K}\varphi|^2 \, \mathtt{d}\vec{x} = \int_G \left(\left| \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{y})\, \mathtt{d}\vec{y} \right| \right)^2 \mathtt{d}\vec{x} = \int_G \left| \langle \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) \mid \varphi(\vec{y}) \rangle \right|^2 \mathtt{d}\vec{x}$$

- použijeme-li Schwarz-Cauchy-Buňakovského nerovnost, tak dostaneme

$$\int_G \left| \langle \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) \mid \varphi(\vec{y}) \rangle \right|^2 \mathtt{d}\vec{x} \leqslant \int_G \|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\|^2 \cdot \|\varphi(\vec{y})\|^2 \mathtt{d}\vec{x}$$

- pokud vezmeme do úvahy to, že $\|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\|^2 = \int_G |\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})|^2 \mathtt{d}\vec{y} \leqslant \mathtt{M}^2 \cdot \lambda(G)$, tak dostaneme nerovnosti

$$\int_G \|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\|^2 \cdot \|\varphi(\vec{y})\|^2 \mathtt{d}\vec{x} \leqslant \| \varphi(\vec{y}) \|^2 \int_G \mathtt{M}^2 \lambda(G) \mathtt{d}\vec{x} = \mathtt{M}^2 \mathtt{V}^2 \|\varphi(\vec{y})\|^2$$

- opět tedy volbou $W = \mathtt{MV}$ završíme důkaz

4.7 Věta

Fredholmův integrální operátor je lineární a omezený na Banachově prostoru $\mathscr{C}_\sigma(\overline{G})$ i na prostoru $\mathbb{L}_2(G)$. Pokud navíc pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \overline{G}$ platí, že $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \mathscr{K}^\star(\vec{y},\vec{x})$, pak je operátor navíc také hermiteovský.

4.8 Věta

Spektrum Fredholmova operátoru $\sigma(\hat{K})$ se spojitým jádrem je omezená množina.

Důkaz:

- vyjdeme-li z definice omezeného operátoru, tak víme, že platí rovnost $\|\hat{K}\varphi\| \leqslant W \| \varphi \|$
- odtud plyne, že

$$W \geqslant \frac{\|\hat{K}\varphi\|}{\|\varphi\|} = \frac{|\lambda| \|\varphi\|}{\| \varphi\|} = |\lambda|$$

- to ale neznamená nic jiného, než že spektrum operátoru $\hat{K}$ musí být omezené
- leží totiž v Gaussově rovině v kruhu o poloměru $r = W$

4.9 Poznámka

Proveďme několik úvah o spektru Fredholmova integrálního operátoru $\hat{K}$ se separabilním jádrem.

1. $$\hat{K}\varphi(\vec{x}) = \int_G \sum_{k=1}^{n} g_k(\vec{x}) h_k^\star(\vec{y})\varphi(\vec{y})\mathtt{d}\vec{y} = \lambda\varphi(\vec{x})$$

2. Označíme-li $\int_G h_k^\star(\vec{y})\varphi(\vec{y})\mathtt{d}\vec{y} := \mathtt{C}_k \in \mathbf{R}$, tak rovnost z bodu 1) přejde do tvaru

$$\lambda\varphi(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \mathtt{C}_k g_k(\vec{x})$$

3. Přenásobíme rovnost v bodě 2) funkcí $h^\star_\ell(\vec{x})$ a dále ji celou přeintegrujeme přes G podle $\vec{x}$. Tak dostaneme
$$\lambda \mathtt{C}_\ell = \sum_{k=1}^{n} \mathtt{C}_k \underbrace{\int_G h^\star_\ell(\vec{x}) g_k(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}}_{\beta_{\ell k}}$$

4. Z předchozího bodu pomocí maticového zápisu získáme
$$0 = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11}-\lambda & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22}-\lambda & \dots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm}-\lambda \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}} \cdot \begin{pmatrix} \mathtt{C}_1 \\ \mathtt{C}_2 \\ \vdots \\ \mathtt{C}_m \end{pmatrix},$$
přičemž $\mathbf{B} = (\beta_{\ell k})^m_{\ell,k=1}$ a $\mathbf{I}$ je jednotková matice.

5. Jestliže platí, že $\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = 0$, pak soustava má řešení a vlastní čísla matice B jsou vlastními čísly operátoru. Potom tedy (není-li nula ve spektru operátoru $\widehat{K}$) platí, že $\sigma(\widehat{K}) = \sigma(\mathbf{B})$. Vlastní čísla budou reálná, pokud matice $\mathbf{B}$ bude symetrická, jinak mohou být také komplexní.

Rovnost z bodu 2) lze ale také (kromě uvedeného) naplnit tak, že $\lambda = 0$ a funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ je volena tak, aby $\varphi(\vec{x}) \perp h_k(\vec{x})\ \forall k \in \hat{n}$. Pak totiž $\forall k \in \hat{n} : \mathtt{C}_k = \int_G h^\star_k(\vec{y})\varphi(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = 0$ a rovnice $\lambda\varphi(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \mathtt{C}_k g_k(\vec{x})$ je splněna. Nula má tedy mezi vlastními čísly zvláštní postavení.

4.10 Poznámka

Při převodu jádra integrálního operátoru s čistě bodovým spektrem na separabilní alternativu (viz věta 3.41) ale nulová vlastní čísla nejsou zajímavá, neboť se v sumě $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{\ell=1}^\infty \lambda_\ell \varphi_\ell(\vec{x})\varphi^\star_\ell(\vec{y})$ neprojevují.

4.11 Recept z knihy *"Vlastní čísla a Fredholmova integrální rovnice"*

Nadále předpokládejme separabilní a spojité jádro operátoru $\widehat{K}$. Pak lze psát
$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \sum_{k=1}^n g_k(\vec{x}) h^\star_k(\vec{y})\varphi(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}) = \mu \sum_{k=1}^n \mathtt{C}_k g_k(\vec{x}) + f(\vec{x}.)$$
Přenásobením funkcí $h^\star_\ell(\vec{x})$ a přeintegrováním přes celou oblast G dostaneme
$$\mathtt{C}_\ell = \mu \sum_{k=1}^n \mathtt{C}_k \underbrace{\int_G h^\star_\ell(\vec{x}) g_k(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}}_{\beta_{k\ell}\in\mathbf{C}} + \underbrace{\int_G h^\star_\ell(\vec{x}) f(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}}_{\omega_\ell\in\mathbf{C}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathtt{C}_\ell = \mu \sum_{k=1}^n \mathtt{C}_k \beta_{k\ell} + \omega_\ell.$$
Přejdeme-li k maticovému zápisu, dostaneme
$$\begin{pmatrix} \mu\beta_{11}-1 & \mu\beta_{12} & \dots & \mu\beta_{1n} \\ \mu\beta_{21} & \mu\beta_{22}-1 & \dots & \mu\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu\beta_{n1} & \mu\beta_{n2} & \dots & \mu\beta_{nn}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathtt{C}_1 \\ \mathtt{C}_2 \\ \vdots \\ \mathtt{C}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}.$$

Rozlišme nyní několik případů.

1. Pravá strana není nulovým vektorem. Potom je pro řešitelnost úlohy nezbytné, aby $\det(\mu\mathbf{B}-\mathbf{I}) \neq 0$. Dále víme, že $\mu \neq 0$. Vzpomeňme si také, jak vypadal determinant pro vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ (byl to $\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = 0$). Z těchto úvah plyne, že pokud $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(\mathbf{B})$, pak má soustava právě jedno řešení.

2. Soustava nemá řešení, pokud pravá strana není nulovým vektorem a $\frac{1}{\mu} \in \sigma(\mathbf{B})$.

3. Pokud je pravá strana nulovým vektorem, což může nastat tehdy, když $f(\vec{x}) \perp h_k(\vec{x})\ \forall k \in \hat{n}$, pak soustava má řešení jen tehdy, když $\frac{1}{\mu} \in \sigma(\mathbf{B})$.

4.12 Poznámka

Číslo $\mu \in \mathbf{C}$ splňující rovnost $\mu\widehat{K}(\varphi) = \varphi$ se někdy nazývá charakteristickým číslem operátoru $\widehat{K}$. Vztah mezi vlastními čísly a charakteristickými čísly je tedy popsán vztahem:

$$\lambda \in \sigma(\widehat{K})\backslash\{0\} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}.$$

Přechodem od vlastních čísel k číslům charakteristickým se často odstraňují problémy s existencí nulových vlastních čísel.

4.13 Věta

Operátory $\widehat{K}^k$ jsou omezené jak na $\mathscr{C}_\sigma(\overline{G})$, tak i na $\mathbb{L}_2(G)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- platí, že
$$\|\widehat{K}^k(\psi)\| \leqslant \|\widehat{K}(\widehat{K}^{k-1}(\psi))\| \leqslant \mathtt{MV}\|\widehat{K}^{k-1}(\psi)\| =\leqslant \mathtt{M}^2\mathtt{V}^2\|\widehat{K}^{k-2}(\psi)\| \leqslant \mathtt{M}^k\mathtt{V}^k\|\psi\|$$
- stačí tedy volit $W = \mathtt{M}^k\mathtt{V}^k$

4.14 Metoda postupných aproximací

Mějme rovnici $\varphi(\vec{x}) = \mu\widehat{K}\varphi(\vec{x}) + f(\vec{x})$. Posloupností postupných aproximací nazveme $(\varphi_\ell(\vec{x}))_{\ell=0}^\infty$ takovou, že $\lim_{\ell\to\infty}\varphi_\ell(\vec{x})$ je řešením zmíněné rovnice.
Nultá aproximace: $\varphi_0(\vec{x}) = f(\vec{x})$
Další aproximace: $\varphi_{\ell+1}(\vec{x}) = \mu\widehat{K}(\varphi_\ell(\vec{x})) + f(\vec{x})$
Limita $\lim_{l\to\infty}\varphi_\ell(\vec{x})$ pak bude existovat a bude hledaným řešením rovnice 4.9.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\vec{x}) &= \mu\widehat{K}\varphi_0(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \mu\widehat{K}(f(\vec{x})) + f(\vec{x})\\
\varphi_2(\vec{x}) &= \mu\widehat{K}\varphi_1(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \mu^2\widehat{K}^2(f(\vec{x})) + \mu\widehat{K}(f(\vec{x})) + f(\vec{x})\\
&\vdots\\
\varphi_\ell(\vec{x}) &= \sum_{k=0}^{\ell}\mu^k\widehat{K}^k(f(\vec{x}))\\
\varphi(\vec{x}) &= \lim_{\ell\to\infty}\varphi_\ell(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\widehat{K}^k(f(\vec{x})),
\end{aligned}$$

pokud tedy součet existuje. Nabízí se otázka, jestli opravdu existuje $\varphi(\vec{x}) = \sum_{k=0}^\infty \mu^k\widehat{K}^k(f(\vec{x}))$. Odpověď je následující. Z nerovnosti $\|\mu^k\widehat{K}^k(f(\vec{x}))\| \leqslant \mathtt{V}^k\mathtt{M}^k|\mu|^k \cdot \|f(\vec{x})\|$ můžeme usuzovat o tom, že pokud suma

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\mu|^k \cdot \|f(\vec{x})\|\mathtt{V}^k\mathtt{M}^k$$

bude konvergovat, tak podle Weierstrassova kritéria pro konvergenci podle normy bude konvergovat také

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\widehat{K}^k(f(\vec{x})).$$

O konvergenci sumy

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\mu|^k \cdot \|f(\vec{x})\|\mathtt{V}^k\mathtt{M}^k = \frac{\|f(\vec{x})\|}{1-|\mu|\mathtt{VM}},$$

za podmínky $|\mu| < \frac{1}{\mathtt{MV}}$, se přesvědčíme snadno. Stačí si uvědomit, že jde vlastně o geometrickou řadu násobenou konstantou $\|f(\vec{x})\|$. Odkud také plyne, že pro normu řešení $\varphi(\vec{x})$ nutně platí:

$$\|\varphi\|_\sigma \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_\sigma}{1-|\mu|\mathtt{VM}}.$$

8. přednáška (26.10.2015) - metoda postupných aproximací, metoda iterovaných jader, Volterrova integrální rovnice

4.15 Poznámka - *o řešení metody postupných aproximací*

V předchozím textu jsme se zabývali metodou postupných aproximací.

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^\ell \widehat{K}^\ell(f(\vec{x})) \tag{4.10}$$

Ověřme, že funkce $\varphi(\vec{x})$, chápaná jako limita posloupnosti částečných součtů, skutečně řeší rovnici $\mu\widehat{K}(\varphi(\vec{x})) + f(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$. Protože $\widehat{K}$ je spojitý, lze psát

$$\mu\widehat{K}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^\ell \widehat{K}^\ell(f(\vec{x}))\right) + f(\vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^{\ell+1}\widehat{K}^{\ell+1}(f(\vec{x})) + \underbrace{f(\vec{x})}_{\mu^0\widehat{K}^0(f(\vec{x}))} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^\ell \widehat{K}^\ell(f(\vec{x})) = \varphi(\vec{x}).$$

4.16 Definice

Neumannovou řadou nazýváme nekonečnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \widehat{K}^k(f(\vec{x})).$$

4.17 Věta - *jednoznačnost řešení metody postupných aproximací*

Žádné jiné řešení, než (4.10) neexistuje, tj. $\Leftrightarrow$ rovnice $\mu\widehat{K}(\varphi(\vec{x})) + f(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ má jediné řešení.

<u>*Důkaz:*</u>

- důkaz provedeme sporem
- do rovnosti $|\mu|\|\widehat{K}\varphi\| = \|\varphi\|$ dosadíme ze vztahu $|\mu| < \frac{1}{\mathtt{MV}}$ a vynásobíme $|\mu|$
- tim jsme v levé straně vztahu $|\mu|\|\widehat{K}\varphi\| \leqslant |\mu|\mathtt{MV}\|\varphi\|$ získali opět $\|\varphi\|$, čímž vykrátíme pro $\|\varphi\| \neq 0$
- výsledná nerovnost $1 \leqslant |\mu|\mathtt{MV}$ je však ve sporu se vztahem $|\mu| < \frac{1}{\mathtt{MV}}$
- jediné řešení je tedy $\|\varphi\| = 0$
- protože jsme prokázali, že rovnice $\mu\widehat{K}(\varphi) = \varphi$ má pouze jediné řešení, je tím stejné tvrzení dokázáno i pro rovnici $\mu\widehat{K}(\varphi) + f = \varphi$

4.18 Metoda iterovaných jader

Mějme posloupnost iterovaných jader $\left(\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})\right)_{\ell=1}^{\infty}$, kde $\mathscr{K}_\ell$ je ℓ-té jádro příslušné rovnici

$$\widehat{K}^\ell(\varphi(\vec{x})) = \int_G \mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y}.$$

Dále, nechť $\widehat{K}_1, \widehat{K}_2$ jsou Fredholmovy integrální operátory s jádry $\mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y}), \mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{y})$. Zkoumejme, jak vypadá jádro složeného operátoru $\widehat{K}_1\widehat{K}_2$:

$$\begin{aligned}\widehat{K}_1\big(\widehat{K}_2(\varphi(\vec{x}))\big) &= \int_G \mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y})\widehat{K}_2(\varphi(\vec{z}))(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = \int_G \mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y})\int_G \mathscr{K}_2(\vec{y},\vec{z})\varphi(\vec{z})\,\mathrm{d}\vec{z}\,\mathrm{d}\vec{y} = \\ &= \int_G\int_G \mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y})\mathscr{K}_2(\vec{y},\vec{z})\varphi(\vec{z})\,\mathrm{d}\vec{y}\,\mathrm{d}\vec{z} = \int_G \mathscr{L}(\vec{x},\vec{z})\varphi(\vec{z})\,\mathrm{d}\vec{z},\end{aligned}$$

kde značením $\widehat{K}_2(\varphi(\vec{z}))(\vec{y})$ míníme, že výsledek působení operátoru $\widehat{K}_2$ na $\varphi(\vec{z})$ bude vyjádřen v proměnné $\vec{y}$. Jádro

$$\mathscr{L}(\vec{x},\vec{z}) = \int_G \mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y})\mathscr{K}_2(\vec{y},\vec{z})\,\mathrm{d}\vec{y},$$

je opět Fredholmovým integrálním operátorem.

Aplikací složených operátorů na posloupnost iterovaných jader získáme rekurentní předpis

$$\widehat{K}_\ell(\varphi(\vec{x})) := \int_G \mathscr{K}_{\ell-1}(\vec{x},\vec{y})\mathscr{K}_\ell(\vec{z},\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{z}.$$

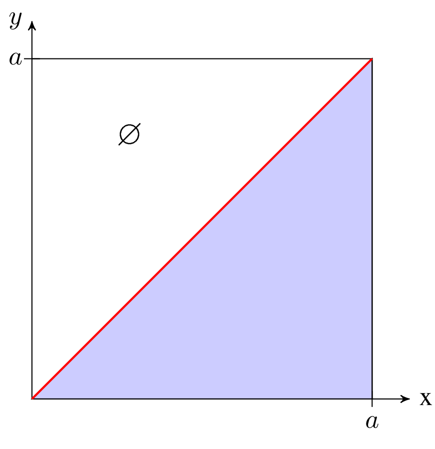
Ten aplikujeme na výsledek rovnic, který jsme už vypočítali v metodě postupných aproximací:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^\ell\widehat{K}^\ell(f(\vec{x})) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\mu^\ell\int_G \mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})f(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}) = \\ &= \mu\int_G\sum_{\ell=1}^{\infty}\mu^{\ell-1}\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})f(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}) = \mu\int_G\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathscr{R}(\vec{x},\vec{y}|\mu)f(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}),\end{aligned}$$

kde výraz $\mathscr{R}(\vec{x},\vec{y}|\mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\mu^{\ell-1}\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})$, konvergující stejnoměrně na G, nazýváme *rezolventou* integrální rovnice.

4.19 Volterrova integrální rovnice

3 Mějme množinu $\mathscr{C}_\sigma(\langle 0,a\rangle)$, kde $a \in \mathbf{R}^+$. Volterrovo jádro $\mathscr{K}(x,y)$ je pak zobrazení $\mathscr{K}(x,y) : \langle 0,a\rangle \times \langle 0,a\rangle \to \mathbf{C}$. splňující na $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x < y \leqslant a\}$ rovnost $\mathscr{K}(x,y) = 0$.



Obrázek 3: Vymezení oblasti nulovosti Volterrova jádra

4.20 Definice

Řekneme, že $\mu\widehat{K}(\varphi(\vec{x})) + f(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ je *Volterrova rovnice se spojitým jádrem*, pokud pro její jádro platí, že je spojité na množině $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x < y \leqslant a\}$.

4.21 Věta

Vlastnosti Volterrova operátoru se spojitým jádrem:

1. $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathscr{C}_\sigma(\langle 0, a\rangle)$
2. $\mathrm{Ran}(\widehat{K}) \subset \mathscr{C}_\sigma(\langle 0, a\rangle)$
3. $\widehat{K}$ je omezený
4. $\widehat{K}$ je lineární
5. $\widehat{K}$ je spojitý

Důkaz:

❶ – pro všechna $\varphi(x) \in \mathscr{C}_\sigma(\langle 0, a\rangle)$ platí rovnost

$$\int_0^a \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,\mathtt{d}y = \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,\mathtt{d}y$$

– pak $|\mathscr{K}(x,y)\varphi(y)| \leqslant \mathtt{M}\max_{y\in\langle 0,a\rangle}|\varphi(y)| = \mathtt{M}\|\varphi\|_\sigma \in \mathscr{L}(\langle 0, x\rangle)$

– ze srovnávacího kritéria víme, že $\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,\mathtt{d}y \in \mathbf{R}$

❷ je třeba ukázat, že $\forall\varphi(x) \in \mathscr{C}_\sigma(\langle 0, a\rangle)$ je také $\widehat{K}(\varphi)$ spojitou funkcí všude v $\langle 0, a\rangle$

❸ $\|\widehat{K}\varphi\|_\sigma = \max_{x\in\langle 0,a\rangle}\left|\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,\mathtt{d}y\right| \leqslant \max_{x\in\langle 0,a\rangle}|x|\mathtt{M}\max_{x\in\langle 0,a\rangle}|\varphi(x)| = \underbrace{a\mathtt{M}}_{W}\|\varphi\|_\sigma$, což dokazuje omezenost

❹ snadno nahlédneme, že platí rovnost $\widehat{K}(\alpha f + g) = \alpha\widehat{K}(f) + \widehat{K}(g)$

❺ platí, že je-li operátor $\widehat{K}$ omezený, pak je také spojitý (3.32)

4.22 Věta

Pro všechna $x \in \langle 0, a\rangle$ platí: $|\widehat{K}^\ell(\varphi(x))| \leqslant \dfrac{\mathtt{M}^\ell x^\ell}{\ell!}\|\varphi(x)\|_\sigma$ pro všechna $\ell \in \mathbf{N}$.

Důkaz:

- důkaz provedeme indukcí
- píšeme

$$|\widehat{K}^{\ell+1}(\varphi(x))| = |\widehat{K}(\widehat{K}^\ell(\varphi(x)))| = \left|\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\widehat{K}^\ell(\varphi)(y)\,\mathtt{d}y\right| \leqslant \int_0^x |\mathscr{K}(x,y)||\widehat{K}^\ell(\varphi)(y)|\,\mathtt{d}y$$

- ze znalosti nerovnosti $|\mathscr{K}(x,y)| \leqslant \mathtt{M}$ a ze znění věty dosadíme

$$\int_0^x |\mathscr{K}(x,y)|\cdot|\widehat{K}^\ell(\varphi)(y)|\,\mathtt{d}y \leqslant \mathtt{M}\int_0^x \frac{\mathtt{M}^\ell y^\ell}{\ell!}\|\varphi(y)\|_\sigma \leqslant \mathtt{M}^{\ell+1}\|\varphi(y)\|_\sigma\frac{1}{\ell!}\left[\frac{y^{\ell+1}}{\ell+1}\right]_0^x = \frac{\mathtt{M}^{\ell+1}x^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\|\varphi(y)\|_\sigma$$

4.23 Důsledek

Z výše uvedeného plyne následující nerovnost:

$$\|\widehat{K}^\ell\varphi\|_\sigma \leqslant \frac{\mathtt{M}^\ell a^\ell}{\ell!}\|\varphi(y)\|_\sigma.$$

4.24 Metoda postupných aproximací pro Volterrovu rovnici

Mějme posloupnost $(\varphi_\ell(x))_{\ell=1}^{\infty}$, kde $\varphi(x) = \lim_{\ell\to\infty}(\varphi_\ell(x)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^\ell \widehat{K}^\ell(f)$. Pro která $\mu \in \mathbf{C}$ bude tato posloupnost konvergovat? Dosadíme z důsledku předchozí věty.

$$\|\mu^\ell \widehat{K}^\ell(f)\| \leqslant |\mu|^\ell \frac{\mathtt{M}^\ell a^\ell}{\ell!} \|f\|_\sigma.$$

Můžeme tedy psát

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |\mu|^\ell \frac{\mathtt{M}^\ell a^\ell}{\ell!} = \mathsf{e}^{|\mu|\mathtt{M}a},$$

a posloupnost postupných aproximací tedy konverguje podle normy $\forall \mu \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$.

9. přednáška (27.10.2015) - Volterrova integrální rovnice a její řešení, parciální diferenciální rovnice, normální tvar PDE

4.25 Poznámka - *metoda postupných aproximací pro Volterrovu integrální rovnici*

Z předchozího textu o metodě postupných aproximací pro Volterrovu integrální rovnici víme, že lze užít stejného postupu jako u Fredholmovy integrální rovnice, tedy, že

$$\varphi(x) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^\ell \hat{K}^\ell |f|. \tag{4.11}$$

Jediná změna, ve srovnání s metodou postupných aproximací pro Fredholmovu integrální rovnici, nastává v tom, že tato suma bude, narozdíl od odpovídající sumy v řešení Fredholmovy integrální rovnice, která konverguje pouze pro $|\mu| < \frac{1}{\mathtt{MV}}$, konvergovat pro všechna $\mu \in \mathbf{C}$.
Dále jsme ukázali, že platí nerovnost

$$\|\mu^\ell \hat{K}^\ell(\varphi)\|_\sigma \leqslant |\mu|^\ell \frac{\mathtt{M}^\ell a^\ell}{\ell!}\|\varphi\|_\sigma, \tag{4.12}$$

a také to, že $\varphi(x)$ opravdu řeší rovnici 4.9.

Z předchozích úvah plyne to, že umíme provést odhad maximální hodnoty řešení, čehož můžeme využít pokud nám nejde o naprosto přesné řešení (můžeme pak vzít v úvahu například jen prvních tisíc členů odpovídající sumy a provést tak příslušnou aproximaci). Odhad maximální hodnoty řešení získáme snadno ze znalosti Taylorova rozvoje exponenciální funkce $\mathtt{e}^x$.

$$\|\varphi\|_\sigma \leqslant \|f\|_\sigma \mathtt{e}^{|\mu| a \mathtt{M}}$$

Rozmyslete jestli nejde provést podobné omezení pro řešení Fredholmovy integrální rovnice!

Ověřme ještě jednoznačnost řešení. Řešení bude jednoznačné právě tehdy, když

$$\hat{K}(\varphi(x)) = \varphi(x) \tag{4.13}$$

má pouze jediné řešení, a sice nulové. S využitím (4.12) a (4.13), víme, že pro všechna $\ell \in \mathbf{N}$ má platit nerovnost

$$\|\varphi\|_\sigma \leqslant |\mu|^\ell \frac{\mathtt{M}^\ell a^\ell}{\ell!}\|\varphi\|_\sigma.$$

Protože $\lim_{\ell\to\infty} |\mu|^\ell \frac{\mathtt{M}^\ell a^\ell}{\ell!} = 0$, což víme z tzv. nutné podmínky konvergence číselné řady $\sum_{\ell=0}^{\infty} |\mu|^\ell \frac{\mathtt{M}^\ell a^\ell}{\ell!}\|\varphi\|_\sigma$, tak rovnici (4.9) splňuje pouze nulová funkce.

4.26 Metoda iterovaných jader pro Volterrovu integrální rovnici

Užijeme-li znalosti tvaru rezolventy $\mathscr{R}(x, y \mid \mu)$, tak řešení Volterrovy integrální rovnice nabývá tvaru

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \mathscr{R}(x, y \mid \mu) f(y) \mathtt{d}y + f(x), \tag{4.14}$$

kde

$$\mathscr{R}(x, y \mid \mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^{\ell-1} \mathscr{K}_\ell(x, y).$$

Díky vlastnostem Volterrova jádra je vhodné si položit otázku, co bude jádrem složeného operátoru $\widehat{K}_1 \widehat{K}_2$, kde příslušná Volterrova jádra jsou $\mathscr{K}_1$ a $\mathscr{K}_2$. Odpověď nám poskytne následující série rovností.

$$\widehat{K}_1 \widehat{K}_2(\varphi) = \int_0^x \mathscr{K}_1(x, y)(\widehat{K}_2(\varphi))(y)\mathtt{d}y = \int_0^a \mathscr{K}_1(x, y) \int_0^a \mathscr{K}_2(y, z)\varphi(z)\mathtt{d}z\mathtt{d}y =$$
$$= \int_0^a \int_0^a \mathscr{K}_1(x, y)\mathscr{K}_2(y, z)\varphi(z)\mathtt{d}y\mathtt{d}z = \int_0^a \mathscr{L}(x, z)\varphi(z)\mathtt{d}z.$$

Proto

$$\mathscr{L}(x, z) = \int_0^a \mathscr{K}_1(x, y)\mathscr{K}_2(y, z)\mathtt{d}y = \int_z^x \mathscr{K}_1(x, y)\mathscr{K}_2(y, z)\mathtt{d}y$$

Povšimněme si mezí integrálu ve vyjádření $\mathscr{L}(x, z)$. Kdyby totiž bylo $x < y$, tak $\mathscr{K}_1(x, y) = 0$, a pokud by platilo $y < z$, tak $\mathscr{K}_2(y, z) = 0$. Předpis pro ℓ-té jádro je tedy

$$\mathscr{K}_l(x, y) = \int_y^x \mathscr{K}_{\ell-1}(x, z)\mathscr{K}(z, y)$$

Z výše uvedeného plyne to, že je třeba vždy před samotným řešením integrální rovnice důkladně rozmyslet, jestli jde o Fredholmovu nebo o Volterrovu rovnici a vybrat vhodnou metodu.

4.27 Poznámka

Rozmyslete, jestli je složení dvou Volterrových operátorů opět Volterrův operátor.

5 Normalizace parciálních diferenciálních rovnic

Rozsáhlou oblast parciálních diferenciálních rovnic na úvod kapitoly razantně zúžíme na lineární diferenciální rovnice druhého řádu, tj. na případ, kdy nejvyšší derivací v rovnici je libovolná parciální derivace druhého řádu. Důvod pro takové zúžení je ukryt zejména v praktickém pozadí zkoumaných rovnic. Většina z nich totiž vzešla ze studia konkrétních fyzikálních či příbuzných systémů (úlohy na vedení tepla, šíření jednorozměrných či vícerozměrných vln, teorie kmitání, úlohy kvantové mechaniky, úlohy z teorie mikroskopických dopravních modelů apod.).

5.1 Definice

Nechť

$$\mathbb{A}(\vec{x}) = \big(a_{ij}(\vec{x})\big)_{i,j=1}^{n}$$

je nenulová symetrická matice spojitých funkcí $a_{ij}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. Nechť je dán $n-$rozměrný vektor $\vec{b}(\vec{x})$ spojitých funkcí $b_i(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ a spojitá funkce $c(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. *Parciálním diferenciálním operátorem druhého řádu* na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ rozumíme operátor

$$\widehat{L} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial}{\partial x_i} + c(\vec{x}). \tag{5.15}$$

Přitom za definiční obor operátoru $\widehat{L}$ klademe $\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathscr{C}^2(G)$. Je-li matice $\mathbb{A}$ číselná, jsou-li všechny funkce $a_{ij}(\vec{x})$ konstantní, a jsou-li rovněž všechny funkce $b_1(\vec{x}), b_2(\vec{x}), \ldots, b_r(\vec{x}), c(\vec{x})$ konstantní, specifikujeme dále, že operátor $\widehat{L}$ je operátorem *s konstantními koeficienty.*

Důvod, proč za definiční obor operátoru $\widehat{L}$ klademe $\mathscr{C}^2(G)$, a ne například všechny funkce, které mají druhou derivaci na G, je ten, že pokud $\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathscr{C}^2(G)$, tak lze libovolně zaměňovat pořadí derivování u smíšených derivací.

5.2 Lemma

Definujeme-li $W_0 = \{y(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L}) : \widehat{L}(y(\vec{x})) = 0\}$ a $W_q = \{y(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L}) : \widehat{L}(y(\vec{x})) = q(\vec{x})\}$, pak W_0 je vektorový prostor a W_q je lineární varieta.

5.3 Věta

Parciální diferenciální operátor druhého řádu $\widehat{L}$ je lineární na $\mathrm{Dom}(\widehat{L})$.

Důkaz:

- úkolem je dokázat, že $\widehat{L}$ je aditivní a homogenní
- zvolíme libovolné $u(\vec{x}), v(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$
- z linearity derivace vyplývá

$$\widehat{L}(u+v) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2(u+v)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial(u+v)}{\partial x_i} + c(\vec{x})(u+v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})\,u + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial v}{\partial x_i} + c(\vec{x})\,v =$$

$$= \widehat{L}(u) + \widehat{L}(v)$$

- to dokazuje aditivitu operátoru $\widehat{L}$
- podobným způsobem dokážeme pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$ homogenitu tvaru

$$\widehat{L}(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \widehat{L}(u)$$

5.4 Definice

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán parciální diferenciální operátor druhého řádu $\widehat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. Pak rovnici

$$\widehat{L}(u) = f(\vec{x}) \tag{5.16}$$

nazýváme *lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu.* Zkráceně ji značíme zkratkou *PDE*, tj. *partial differential equation.* Rovnici $\widehat{L}(u) = 0$ nazýváme lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu *s nulovou pravou stranou* přidruženou k rovnici (5.16).

5.5 Definice

Nechť je dána lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu (5.16) na oblasti G. Pak kvadratickou formu

$$q_{\vec{x}}(\vec{\varkappa}) = \vec{\varkappa}^{\mathsf{T}} \mathbb{A}(\vec{x})\,\vec{\varkappa} = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots, \varkappa_n) \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{x}) & a_{12}(\vec{x}) & a_{13}(\vec{x}) & \ldots & a_{1r}(\vec{x}) \\ a_{21}(\vec{x}) & a_{22}(\vec{x}) & a_{23}(\vec{x}) & \ldots & a_{2r}(\vec{x}) \\ a_{31}(\vec{x}) & a_{32}(\vec{x}) & a_{33}(\vec{x}) & \ldots & a_{3r}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}(\vec{x}) & a_{r2}(\vec{x}) & a_{r3}(\vec{x}) & \ldots & a_{rr}(\vec{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \\ \varkappa_3 \\ \vdots \\ \varkappa_n \end{pmatrix}$$

příslušnou každému bodu $\vec{x} \in G$ nazýváme *kvadratickou formou přidruženou* k parciální diferenciální rovnici (5.16).

5.6 Úmluva

Budeme-li hovořít v další textu o parciální diferenciální rovnici, budeme mít na mysli lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu, není-li uvedeno jinak.

5.7 Definice

Řekněme, že parciální diferenciální rovnice (5.16) je v bodě $\vec{x} \in G$ *eliptická*, resp. *parabolická*, resp. *hyperbolická* právě tehdy, když je eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická její přidružená kvadratická forma.

5.8 Poznámka

Pro úplnost dodáváme, že kvadratická forma je eliptická, má-li všechny vlastní čísla nenulová a stejného znaménka, parabolická, má-li alespoň jedno vlastní číslo nulové a hyperbolická, má-li všechna vlastní čísla nenulová ale s různými znaménky. Pro bližší studium kvadratických forem je vhodná učebnice [2].

5.9 Definice

Řekneme, že parciální diferenciální rovnice (5.16) je *eliptická,* resp. *parabolická,* resp. *hyperbolická na množině* $M \subset G$ právě tehdy, když je eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická v každém bodě $\vec{x} \in M$.

5.10 Definice

Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je parciální diferenciální rovnice (5.16) eliptická, budeme označovat symbolem G_E a nazývat *oborem elipticity* parciální diferenciální rovnice. Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je rovnice (5.16) je hyperbolická, budeme označovat symbolem G_H a nazývat *oborem hyperbolicity.* Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je rovnice (5.16) je parabolická, budeme označovat symbolem G_P a nazývat *oborem parabolicity.* Souhrnně nazýváme množiny G_E, G_H, a G_P *oblastmi excentricity.*

5.11 Poznámka

Nechť G_E, G_P a G_H jsou množiny z definice 5.10. Potom platí $G_E \uplus G_P \uplus G_H = G$.

5.12 Příklad

Rozhodněme o typu parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

je-li chápána jako diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u = u(x, y)$. Z definice 5.5 pro matici příslušné kvadratické formy platí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že pro $x = 0$ je daná rovnice parabolická, pro $x \neq 0$ je rovnice hyperbolická a žádná jiná možnost nastat nemůže. Proto tedy $G_E = \emptyset$, $G_P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}$ a $G_H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$.

5.13 Definice

Řekneme, že parciální diferenciální rovnice

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial y_k} + \tilde{c}(\vec{y}) u(\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y})$$

je v *normálním tvaru* právě tehdy, když matice $\widetilde{\mathbb{A}}(\vec{y})$ koeficientů $\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y})$ je maticí konstantních funkcí , pro níž

$$\widetilde{\mathbb{A}}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

a $\tilde{a}_{\ell\ell} \in \{0, -1, 1\}$.

5.14 Poznámka

Naším cílem je za pomoci vhodného zobrazení $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) : \mathbf{E}^n \mapsto \mathbf{E}^n$ převést obecnou parciální diferenciální rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x}) u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

na tzv. *normální tvar*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial y_k} + \tilde{c}(\vec{y}) u(\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y}),$$

pro který platí, že matice $\widetilde{\mathbb{A}}(\vec{x})$ koeficientů $\tilde{a}_{k\ell}(\vec{x})$ je maticí konstantních funkcí, pro níž $\tilde{a}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell}\delta_{k\ell}$ a $\tilde{a}_{\ell\ell} \in \{0, -1, 1\}$. Přitom požadujeme, aby zobrazení $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) : \mathbf{E}^n \mapsto \mathbf{E}^n$, označme jej (0.18), bylo regulární a prosté na $G \subset \mathbf{E}^n$ a navíc, aby $\vec{\varphi}(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G)$. To implikuje vztah

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right) \overset{G}{\neq} 0,$$

a existuje tudíž inverzní zobrazení $\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{y})$, pro nějž $\vec{\psi}\big(\vec{\varphi}(\vec{x})\big) = \mathrm{id}_G$. Pomocí vztahů pro derivaci složené funkce dostaneme vzorce

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \qquad (i \in \hat{n}) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j \in \hat{n}).
\end{aligned}$$

Z nich již snadno vyjádříme hledané vztahy

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}, \qquad (5.17)\\
\tilde{b}_k(\vec{y}) &= \sum_{i=1}^{n} b_i\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big)\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j},\\
\tilde{c}(\vec{y}) &= c\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big),\\
\tilde{f}(\vec{y}) &= f\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big).
\end{aligned}$$

10. přednáška (3.11.2015) - alternativní normální tvar PDE, stanovení normalizačních vztahů

5.15 Definice – *alternativní normální tvar*

Pro $n = 2$ z rovnice (5.14) definujme *alternativní normální tvar* takto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} + \tilde{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}; \frac{\partial u}{\partial y_2}; u(y_1, y_2)\right) = \tilde{f}(y_1, y_2).$$

5.16 Poznámka

Zkoumejme nyní, jakého je typu rovnice v alternativním normálním tvaru. Víme, že $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, a tedy $q(\varkappa_1, \varkappa_2) = \varkappa_1 \varkappa_2$. Rovnice je hyperbolická, protože

$$q(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \left| \begin{array}{ll} x_1 & = u + v \\ x_2 & = u - v \end{array} \right| = u^2 - v^2 = (u, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Z výše uvedeného tedy plyne, že rovnice pro funkci dvou proměnných, která je převeditelná do alternativního normálního tvaru je vždy hyperbolická. Můžeme přepsat její normální tvar také na

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} + \tilde{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}; \frac{\partial u}{\partial z_2}; u(z_1, z_2)\right) = \tilde{f}(z_1, z_2).$$

Tedy pro hyperbolickou rovnici existuje regulární transformace mezi normálním a alternativním normálním tvarem. Tato transformace je tvaru $y_1 = z_1 + z_2;\ y_2 = z_1 - z_2$.

5.17 Úloha 1 – *nalezení normalizující transformace pro rovnici s konstatními koeficienty*

Víme, že $\forall i, j \in \hat{n} : a_{ij}(\vec{x}) = a_{ij} \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathbb{A}$ je symetrická reálná matice. Tím pádem $\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y})$ ze vztahu (5.17) je reálné, a také $a_{ij}(\psi(\vec{y})) \in \mathbf{R}$, proto musí být členy $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}$ také reálné. Z toho ale plyne, že φ musí být lineární. Proto píšeme

$$y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{n} r_{ki} x_i, \tag{5.18}$$

což implikuje $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = r_{ki} \in \mathbf{R}$, z čehož dále plyne

$$a_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_{ki} r_{kj} = qq(\vec{r}_k, \vec{r}_\ell).$$

5.18 Věta

Z MAB3. Nechť $B = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_n}\}$ je polární báze přidružená ke q-formě $q(\vec{\varkappa}) = \vec{\varkappa}^{\mathsf{T}} \mathbb{A} \vec{\varkappa}$. Pak

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1_1} & w_{1_2} & \cdots & w_{1_n} \\ w_{1_1} & w_{1_2} & \cdots & w_{1_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & w_{n_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{a}_{k\ell} = qq(\vec{w}_k, \vec{w}_\ell) = \beta_k \delta_{k\ell},$$

pro $\beta_k \in \{0, 1, -1\}$, přičemž poslední rovnost vychází z definice polární báze. Normalizace kvadratické formy, tak jak ji známe z MAB3, a normalizace parciální diferenciální rovnice mají mezi sebou silnou vazbu, avšak nejsou totožné - v případě kvadratické formy je matice transponovaná.

5.19 Úloha 2 – *nalezení normalizující transformace pro rovnici s nekonstatními koeficienty funkce 2 proměnných*

Mějme dánu funkci $u(x, y) \in \mathscr{C}^2(G)$ a $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a(x,y) & \frac{1}{2}b(x,y) \\ \frac{1}{2}b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$. Z následujícího předpisu nás zajímá část ❶:

$$\underbrace{a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{❶} + \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; u(x,y)\right)$$

5.20 Stanovení typu excentricity

Podle vlastních čísel

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - \tfrac{1}{4}b^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda_{1,2} = a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 + b^2 - 4ac}.$$

rozlišujeme následující řešení:

a) pro paraboličnost požadujeme jedno číslo $\lambda = 0$. Tedy $(a+c)^2 = (a+c)^2 + b^2 - 4ac \Leftrightarrow d(x,y) = b^2 - 4ac = 0$, kde $d(x,y)$ nazýváme *funkcionální diskriminant* parciální diferenciální rovnice. Pak

$$G_P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ d(x,y) = 0\}.$$

b) Obdobně obdržíme pro hyperboličnost:

$$G_H = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ d(x,y) > 0\},$$

c) a eliptičnost:

$$G_E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ d(x,y) < 0\}.$$

5.21 Stanovení normalizující transformace pro hyperbolickou rovnici

Hledejme vztahy dle předpisu $\xi = \xi(x,y)$ a $\eta = \eta(x,y)$, pro které $\det\left(\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)}\right) \stackrel{G_H}{\neq} 0$. Rozepíšeme parciální derivace:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Výraz $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ rozšíříme $a(x,y)$, a obdobně výrazy $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ rozšíříme $b(x,y)$ a $c(x,y)$. Dosazením obdržíme vztah

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] + \\
&+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] + \\
&+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\left[2a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + c(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] + \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}; \frac{\partial u}{\partial \eta}; u(\xi,\eta)\right) = \tilde{f}(\xi,\eta).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

My jsme však požadovali normální tvar pouze s nesmíšenými derivacemi, tedy 1. a 2. řádek rovnice (5.19) by měl být roven 0. Takový vztah pak vydělíme $\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$ za obdržení následujících rovností:

$$a(x,y)\underbrace{\frac{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2}}_{\lambda^2(x,y)}+b(x,y)\underbrace{\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}}}_{\lambda(x,y)}+c(x,y)\stackrel{!}{=}0 \tag{5.20}$$

$$a(x,y)\underbrace{\frac{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}}_{\lambda^2(x,y)}+b(x,y)\underbrace{\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\eta}{\partial y}}}_{\lambda(x,y)}+c(x,y)\stackrel{!}{=}0. \tag{5.21}$$

Ze vztahů (5.20) a (5.21) lze sestavit rovnici $a\lambda^2+b\lambda+c=0$, která má na G_H dvě možná řešení pro $\lambda_{1,2}(x,y)$, kdy pro rovnici (5.20) je $\lambda_1(x,y)=\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}}$ a pro rovnici (5.21) je $\lambda_2(x,y)=\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}$. Tyto vztahy jsou ale shodné (až na znaménko) s derivací implicitní funkce: $H(x,y)=C$, kde $y=y(x)$. Pak y' získáme ze vztahu $\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$, což implikuje $y'=-\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}$. V našem případě tedy $\xi(x,y)=C\;\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ a dále $y'=-\lambda_{1,2}(x,y)$, z čehož vyjde vztah s integrační konstantou, kterou použijeme.

5.22 Příklad

Uvažme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Tedy $d(x,y)=4x^2y^2$. Odtud $\lambda_{1,2}(x,y)=\pm 2xy$. Řešíme tedy rovnici $y'=\pm 2xy$. Ten pak zintegrujeme takto

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\pm 2\int x\,\mathrm{d}x\Rightarrow \ln|y|=\pm x^2+c\Rightarrow c=\ln|y|\pm x^2.$$

Transformační vztahy (definované integrační konstantou) jsou: $\xi(x,y)=\ln|y|+x^2;\ \eta(x,y)=\ln|y|-x^2$.

5.23 Poznámka

Praktický postup řešení je následující:

1. obdržíme rovnici, z níž známe $a,b,c\in\mathbf{R}$
2. vypočítáme kvadratickou rovnici $a\lambda^2+b\lambda+c=0$
3. z diferenciální rovnice $y'=-\lambda_{1,2}(x,y)$ vypočítáme integrační konstanty

5.24 Stanovení normalizující transformace pro parabolickou rovnici

Jako v případě hyperbolické rovnice, i nyní použijeme kvadratickou rovnici $a\lambda^2+b\lambda+c=0$, ovšem s tím rozdílem, že nyní tato rovnice generuje jediné řešení $\lambda(x,y)$. První transformační vztah $\xi=\xi(x,y)$ tedy získáme obdobně jako v předchozím případě z diferenciální rovnice $y'=-\lambda(x,y)$ takto:

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}}=-\lambda(x,y)=\frac{b(x,y)}{2a(x,y)},\ \text{kde}\ [d(x,y)=0].$$

Druhý vztah pak volíme libovolně, ovšem za podmínky, že bude zachována regularita transformace, tedy nelze volit např. $\eta(x,y)=8$, ale například x ano. Výsledkem je $\eta=\eta(x,y)=x$. Vzhledem k vlastnostem paraboličnosti rovnice víme, že při dosazení do rovnice (5.19) by měly být 1. a 3. řádek nulový, dosadíme tedy po řádcích:

$$
\begin{aligned}
a\frac{b^2}{4a^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 - b\frac{b}{2a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 \underbrace{\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}}_{-d(x,y)=0}, \\
a\cdot 1 + b\cdot 1\cdot 0 + c\cdot 0^2 &= a(x,y), \\
-2a\frac{b}{2a}\frac{\partial\xi}{\partial y} + b\cdot 0 + b\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot 1 + 2c\cdot 0 &= -b+b=0,
\end{aligned}
$$

tedy dostáváme normalizovaný tvar

$$
a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \widetilde{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi};\frac{\partial u}{\partial\eta};u(\xi,\eta)\right) = \tilde{f}(\xi,\eta).
$$

5.25 Stanovení normalizující transformace pro eliptickou rovnici

V případě eliptické rovnice budou transformační vztahy $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ pro rovnici $y' = -\lambda_{1,2}(x,y)$ čísla komplexně sdružená na $G_E : d(x,y) < 0$, kdy platí $\lambda_1(x,y) = \lambda_2^\star(x,y)$. Pomocí výsledných vztahů dokázat

$$
\begin{aligned}
\omega(x,y) &= \frac{1}{2}\big(\xi(x,y)+\eta(x,y)\big) = \mathrm{Re}(\xi(x,y)), \\
\theta(x,y) &= \frac{1}{2\mathtt{i}}\big(\xi(x,y)-\eta(x,y)\big) = \mathrm{Im}(\xi(x,y)),
\end{aligned}
$$

dostáváme vztah

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \widetilde{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial\omega};\frac{\partial u}{\partial\theta};u(\omega,\theta)\right) = \tilde{f}(\omega,\theta).
$$

5.26 Definice

Obecná varianta normálního parciálního diferenciálního operátoru je

$$
\hat{L} = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha(\vec{x})\mathcal{D}^\alpha,
$$

kde *multiindex* $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ pro $\alpha_i \in \mathbf{N}_0$. Dále definujeme pro multiindex

$$
\begin{aligned}
|\alpha| &= \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, \\
\alpha! &= \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!, \\
\mathcal{D}^\alpha &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.
\end{aligned}
$$

11. přednáška (9.11.2015) - úvod do teorie zobecněných funkcí

5.27 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} + u(x,y) = 0.$$

Pro stanovení typu excentricity vypočtěme funkcionální diskriminant.

$$d(x,y) = 16x^2y^2 - 16x^2y^2 = 0$$

To ale znamená, že jde o parabolickou rovnici na celém $\mathbf{R}^2$. Z příslušné teorie o hledání normalizačních vztahů víme, že jeden transformační vztah můžeme zvolit libovolně, ale regulárně, tedy například $\eta(x,y) = x$. Druhý vztah dopočítáme nalezením kořenu z rovnice tvaru $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Tedy kořenu

$$\lambda(x,y) = -2\frac{y}{x}.$$

Řešíme tedy diferenciální rovnici

$$y' = -\lambda(x,y) = 2\frac{y}{x},$$

která je řešitelná například metodou integračního faktoru (lze užít i metodu separace proměnných). Odtud

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

$$y\frac{1}{x^2} = \mathtt{C} \quad \Rightarrow \quad \mathtt{C} = \frac{y}{x^2} \vee \mathtt{D} = \frac{x^2}{y}.$$

Máme tedy nalezeny transformace

$$\eta(x,y) = x \quad \wedge \quad \xi(x,y) = \frac{x^2}{y},$$

které převádějí zadanou rovnici do normálního tvaru. Dále je třeba najít množinu regularity M_{reg}.

$$\det\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{x^2}{y^2} \neq 0,$$

$$M_{\text{reg}} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}.$$

Vyjádřeme první a druhé derivace v příslušných proměnných, pomocí transformačních vztahů, které jsme získali výše.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{2x}{y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{x^2}{y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{4x^2}{y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{4x}{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2}{y}\frac{\partial u}{\xi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{x^4}{y^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{2x^2}{y^3} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{2x^3}{y^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{x^2}{y^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{2x}{y^2}
\end{aligned}
$$

Po dosazení do zadané rovnice dostaneme transformovanou rovnici tvaru

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - x\frac{\partial u}{\partial \eta} + u(\xi, \eta) = 0,$$

neboli

$$\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} + u(\xi, \eta) = 0.$$

Tato diferenciální rovnice je řešitelná Eulerovou metodou, proto použijeme substituci $\eta = \mathtt{e}^t$ a dojdeme ke vztahu

$$\ddot{u} - 2\dot{u} + u = 0,$$

což je rovnice s konstantními koeficienty a není tedy problém najít fundamentální systém $\{\mathtt{e}^t, t\mathtt{e}^t\}$. Řešením v proměnných t, η je tedy $u(t, \eta) = \mathtt{C}(\xi)\mathtt{e}^t + \mathtt{D}(\xi)t\mathtt{e}^t$. Navrácením se k proměnným ξ, η a následně k x, y dostaneme finální podobu výsledku:

$$u(x, y) = x \cdot \mathtt{C}\left(\frac{x^2}{y}\right) + x\ln(x) \cdot \mathtt{D}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

5.28 Příklad

Určeme excentricitu parciální diferenciální rovnice

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = .$$

Funkcionální diskriminant je $d(x, y) = 4x^2y^2$. Proto je rovnice skoro všude hyperbolická, a tedy

$$G_H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$$

$$G_P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$$

$$G_E = \varnothing$$

6 Teorie zobecněných funkcí

6.1 Definice

Okolím množiny M o poloměru ε nazveme množinu

$$M_\varepsilon := \{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} : \vec{y} \in M \wedge \|\vec{z}\| < \varepsilon\}.$$

6.2 Definice

Testovací funkcí nazveme funkci $\varphi(\vec{x})$, která splňuje

1. $\varphi(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$,
2. $\mathrm{Dom}(\varphi) = \mathbf{E}^r$,
3. $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$,
4. existuje $\mathtt{R} > 0$ tak, že $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_{\mathtt{R}}$.

6.3 Definice

Zobrazení $\tilde{f} : \mathscr{A} \mapsto \mathbf{C}$, kde $\mathscr{A}$ je množina funkcí a $\mathbf{C}$ množina komplexních čísel, nazveme *funkcionálem*. Definičním oborem funkcionálu $\tilde{f}$ může tedy být např. množina testovacích funkcí $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \subset \mathscr{A}$.

6.4 Definice

Množinu $B_{\mathtt{R}}(\vec{c}) := \{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \|\vec{x} - \vec{c}\| \leqslant \mathtt{R}\}$ nazveme uzavřenou koulí o poloměru R se středem v bodě $\vec{c} \in \mathbf{E}^r$. Pokud $\vec{c} = 0$, pak takovou množinu značíme jen $B_{\mathtt{R}}$.

6.5 Definice

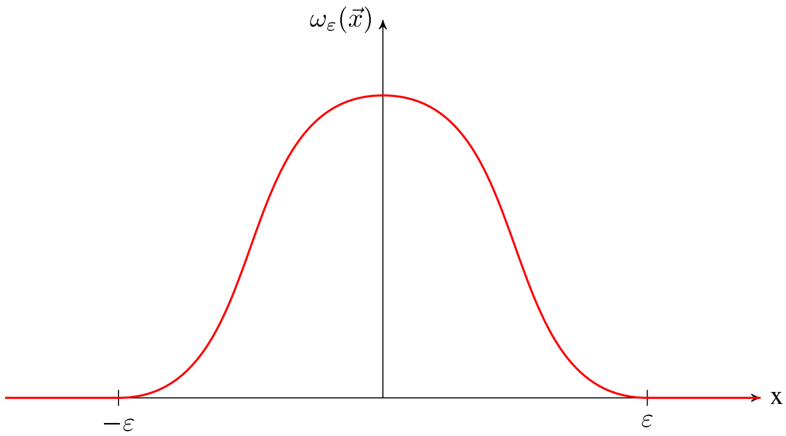
Prostorem testovacích funkcí $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ rozumíme třídu funkcí $\varphi(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$, které jsou třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a jejichž nosič $\mathrm{supp}(\varphi)$ je omezenou množinou v $\mathbf{E}^r$. Prvky třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ nazýváme *testovacími funkcemi.*

6.6 Poznámka

Množina $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je neprázdná, protože do ní patří například nulová funkce. Dále do $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ patří například tzv. *Cimrmanova buřinka* $\omega_\varepsilon(\vec{x})$ (Obrázek 4).

$$\omega_\varepsilon(\vec{x}) = \begin{cases} \beta_\varepsilon \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|\vec{x}\|^2}} & \ldots \quad \|\vec{x}\| < \varepsilon, \\ 0 & \ldots \quad \|\vec{x}\| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{6.22}$$

Přičemž $\int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x}) \mathrm{d}x = 1$ a platí tedy, že $\omega_\varepsilon(\vec{x})$ je hustotou (pravděpodobnosti).



Obrázek 4: Graf Cimrmanovy buřinky $\omega_\varepsilon(\vec{x})$

6.7 Poznámka - *o možnostech vytváření testovacích funkcí*

- lineární kombinace konečného počtu testovacích funkcí je testovací funkce
- vynásobením testovací funkce polynomem (nebo konstantou) dostaneme opět testovací funkci
- konvoluce testovacích funkcí je testovací funkce

- umocnění testovací funkce na konečné číslo nám opět vrátí testovací funkci
- vynásobením testovací funkce funkcí z $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$ dostaneme testovací funkci
- derivací testovací funkce dostaneme testovací funkci
- posunutí $\varphi(\vec{x} - \vec{\mu}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

6.8 Věta

Třída $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je vektorovým prostorem.

Důkaz:

- postačí ukázat, že operace sčítání a násobení reálným číslem jsou uzavřené v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- nechť tedy $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a $c \in \mathbf{R}$ jsou zvoleny libovolně a zkoumejme funkci $\eta(\vec{x}) = c\,\varphi(\vec{x})$
- zřejmě $\eta(\vec{x})$ je stejně jako sama testovací funkce $\varphi(\vec{x})$ třídy $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$
- dále pro $c \neq 0$ je $\operatorname{supp}(\eta) = \operatorname{supp}(\varphi)$ nebo pro $c = 0$ je $\operatorname{supp}(\eta) = \varnothing$
- v každém případě je ale nosič $\operatorname{supp}(\eta)$ omezenou množinou
- proto $\eta(\vec{x})$ je testovací funkcí
- nechť dále $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a označme $\vartheta(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})$
- protože z definice 6.5 plyne, že $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$, je také $\vartheta(\vec{x}) \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$
- dále $\operatorname{supp}(\vartheta) \subset \big(\operatorname{supp}(\varphi) \,\cup\, \operatorname{supp}(\psi)\big)$
- proto má také $\vartheta(\vec{x})$ omezený nosič, tudíž $\vartheta(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

6.9 Věta – *o Leibnizově formuli*

Nechť $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Pak platí tzv. *Leibnizova formule* pro derivaci tvaru

$$\mathcal{D}^{\beta}\big(\varphi(\vec{x})\psi(\vec{x})\big) = \sum_{\alpha=0}^{\beta} \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}\,\mathcal{D}^{\alpha}\big(\varphi(\vec{x})\big)\,\mathcal{D}^{\beta-\alpha}\big(\psi(\vec{x})\big),$$

kde symbol $\sum_{\alpha=0}^{\beta}$ reprezentuje sčítání přes všechny multiindexy, tedy fakticky jde o r-tici sum.

Důkaz:

- tvrzení lze dokázat matematickou indukcí

6.10 Věta

Nechť $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Pak existuje $\mathtt{K} \in \mathbf{R}_0^+$ tak, že je pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ $(x \neq y)$ splněna nerovnost

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}\right| \leqslant \mathtt{K}.$$

Důkaz:

- testovací funkce $\varphi(x)$ je mimo jiné spojitá na $\mathbf{R}$ a diferencovatelná na $\mathbf{R}$
- proto mezi libovolnými body $x \neq y$ existuje podle Lagrangeovy věty o přírůstku číslo ξ takové, že platí
$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y)$$
- jelikož je funkce $\varphi'(x)$ omezená na $\mathbf{R}$, což plyne z definice třídy $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ a faktu, že $\varphi'(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, existuje jistě $\mathtt{K} \in \mathbf{R}_0^+$ tak, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $|\varphi'(x)| \leqslant \mathtt{K}$
- pak snadno
$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}\right| = \big|\varphi'(\xi)\big| \leqslant \mathtt{K}$$
- to završuje důkaz

6.11 Věta

Pro libovolnou omezenou oblast $G \subset \mathbf{E}^r$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje testovací funkce $\eta(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ taková, že

1. $0 \leqslant \eta(\vec{x}) \leqslant 1$,
2. pro všechna $\vec{x} \in G_\varepsilon$ je $\eta(\vec{x}) = 1$,
3. pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r \backslash G_{3\varepsilon}$ je $\eta(\vec{x}) = 0$.

Důkaz:

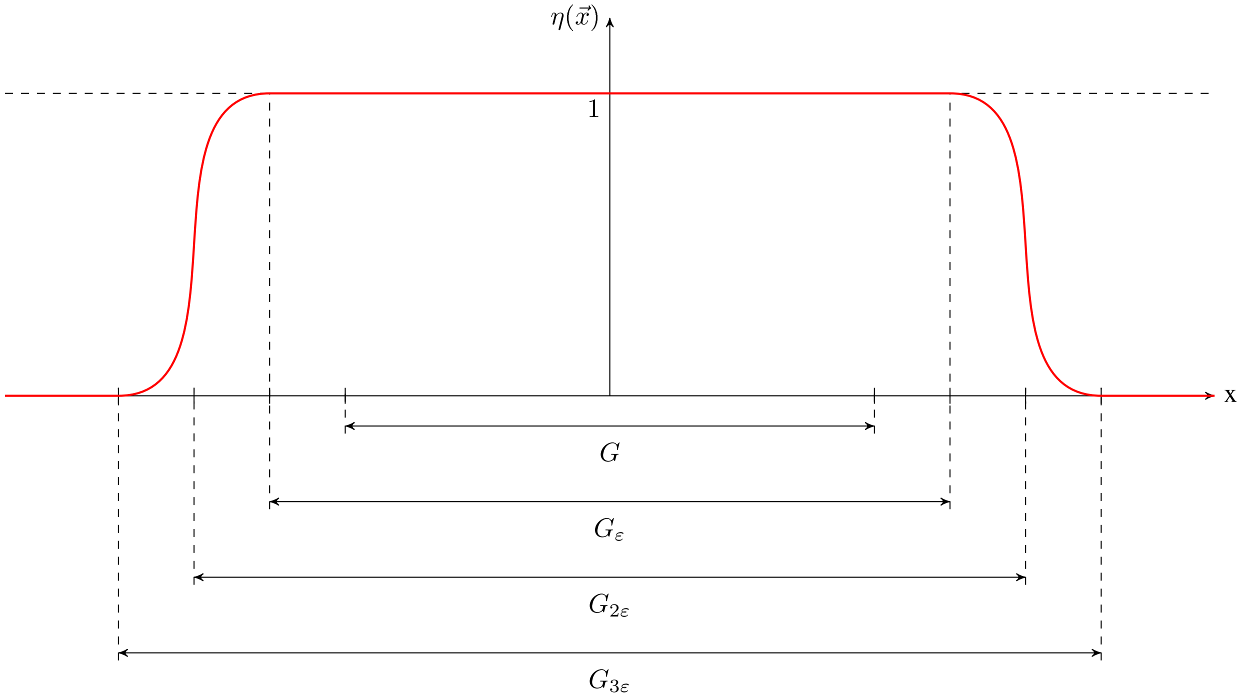
- důkaz budeme demonstrovat na případě $r = 1$
- zvolme libovolně oblast $G \subset \mathbf{R}$
- označme $\chi_{G_{2\varepsilon}}(x)$ charakteristickou funkci jejího $2\varepsilon-$okolí (viz definice 6.1)
- tvrdíme nyní, že funkce
$$\eta(x) := \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y,$$
kde $\omega_\varepsilon(x)$ je Cimrmanova buřinka, splňuje požadavky předešlé definice
- snadné je se přesvědčit, že platí
$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant \int_{\mathbf{R}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = 1$$
- dokažme dále, že $\eta(x) = 1$ všude na G_ε
- triviálně platí rovnost
$$\int_{\mathbf{R}} \chi_{G_{2\varepsilon}}(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$$
- dále pak pro $y \notin G_{2\varepsilon}$ platí, že $|x-y| > \varepsilon$, což značí, že pro $x \in G_\varepsilon$ a $y \notin G_{2\varepsilon}$ je $\omega_\varepsilon(x-y) = 0$
- proto je integrál $\int_{\mathbf{R}\backslash G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$ nulový
- pak ale
$$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}\backslash G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = 1$$
- zkoumejme na závěr chování funkce $\eta(x)$ pro $x \in \mathbf{R}\backslash G_{3\varepsilon}$
- je-li pak $y \in G_{3\varepsilon}$ platí, že $|x-y| > \varepsilon$
- proto je integrál $\int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$ v tomto případě nulový, tj. $\eta(x) = 0$ na $\mathbf{R}\backslash G_{3\varepsilon}$
- $\eta(x)$ skutečně patří do $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, rozmyslete proč

6.12 Poznámka

Právě dokázaná věta se zabývá tzv. *vyhlazováním charakteristických funkcí množin.* Zatímco například charakteristická funkce $\chi_{(-1-2\varepsilon,1+2\varepsilon)}(x) = \Theta(x+1+2\varepsilon)\Theta(1+2\varepsilon-x)$ intervalu $(-1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon)$ je zcela nepochybně nespojitou funkcí, je funkce
$$\eta(x) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x+1+2\varepsilon)\Theta(1+2\varepsilon-x)\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$$
hladkou variantou funkce $\chi_{(-1-2\varepsilon,1+2\varepsilon)}(x)$. Pro všechna $x \in (-\infty, -1-3\varepsilon) \cup (1+3\varepsilon, +\infty)$ je její hodnota nulová, zatímco na intervalu $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ nabývá funkce $\eta(x)$ hodnoty jedna. Na intervalech $(-1-3\varepsilon, -1-\varepsilon)$ a $(1+\varepsilon, 1+3\varepsilon)$ pak funkce $\eta(x)$ hladce přechází od nulové k jednotkové hodnotě. Názorněji je proces vyhlazení charakteristických funkcí množin znázorněn na obrázku (5).

6.13 Lemma - *o mohutnosti množiny* $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

Množina $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je hustá v $\mathbb{L}_p(\mathbf{E}^r)$, tj. pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_p$ existuje posloupnost testovacích funkcí $\varphi_k(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ tak, že $f(\vec{x}) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{x})$.



Obrázek 5: Vyhlazení charakteristické funkce

12. přednáška (10.11.2015) - třída zobecněných funkcí, regulární distribuce

6.14 Definice

Nechť $\varphi_k(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je člen posloupnosti $\left(\varphi_k(\vec{x})\right)_{k=1}^{\infty}$. Pak řekneme, že tato posloupnost konverguje k $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ *superstejnoměrně* a označíme $\varphi_k(\vec{x}) \Rrightarrow \varphi(\vec{x})$ nebo také $\varphi_k(\vec{x}) \overset{\mathscr{D}}{\rightrightarrows} \varphi(\vec{x})$, pokud platí:

1. $\forall \alpha \in \mathbf{N}_0^r : \mathcal{D}^\alpha \varphi_k(\vec{x}) \overset{\mathbf{E}^r}{\rightrightarrows} \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})$,
2. $\exists \mathtt{R} > 0 : \forall k \in \mathbf{N} : \operatorname{supp}(\varphi_k) \subset B_{\mathtt{R}}$.

Tedy musí existovat univerzální $\mathtt{R}$ nezávislé na k tak, aby všechny nosiče byly stlačitelné do uzavřené koule $B_{\mathtt{R}}$.

6.15 Poznámka

Z výše uvedeného vyplývá platnost následujícího tvrzení: $\Rrightarrow \Rightarrow \rightrightarrows \Rightarrow \rightarrow$.

6.16 Definice

Třídou zobecněných funkcí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ rozumíme třídu všech lineárních a spojitých funkcionálů nad definičním oborem rovným $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$.

- (linearita): $(\forall \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r))(\forall \alpha \in \mathbf{C})\ \tilde{f}(\varphi(\vec{x}) + \alpha\psi(\vec{x})) = \tilde{f}(\varphi(\vec{x})) + \alpha\tilde{f}(\psi(\vec{x}))$.
- (spojitost): $\varphi_k(\vec{x}) \Rrightarrow \varphi(\vec{x}) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \tilde{f}(\varphi_k(\vec{x})) = \tilde{f}(\varphi(\vec{x}))$.

Každý element z $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ je nazýván zobecněnou funkcí nebo distribucí.

6.17 Úmluva

Působení funkcionálu $\tilde{f}$ na testovací funkci budeme od této chvíle značit takto $(\tilde{f}; \varphi(\vec{x}))$.

6.18 Příklady zobecněných funkcí

Uveďme si nymí několik příkladů, které mohou být zobecněnými funkcemi:

1. Identita zobecněnou funkcí nemůže být, protože $\operatorname{Dom}(Id) = \operatorname{Ran}(Id)$, avšak funkcionál je zobrazení $\mathscr{A} \mapsto \mathbf{C}$
2. Nulový funkcionál (nulová zobecněná funkce) je předpis: $\forall \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) : (\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = 0$.
   Linearita je zřejmá, zkoumejme spojitost:
   $$\varphi_k(\vec{x}) \Rrightarrow \varphi(\vec{x}) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \tilde{f}(\varphi_k(\vec{x})) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 = (\tilde{f}; \varphi(\vec{x})).$$
3. Integrál funkce: $\forall \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) : (\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \in \mathbf{R}$.
   - integrál ovšem vždy existuje, což plyne z faktu, že integrujeme spojitou funkci na kompaktu, a tedy z existence je také lineární. Pokud by ovšem pro některou funkci neexistoval integrál, nebyla by ani lineární

- Je-li $\mathscr{D}$ vektorový prostor, pak je definice spojitosti 6.16 b), ekvivalentní výroku

$$\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \tilde{f}(\varphi_k(\vec{x})) = (\tilde{f}; 0) = 0.$$

  V případě integrálu tedy

$$\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

- záměnu limity a integrálu v předchozím bodě jsme mohli provést jen v případě, že existuje integrabilní majoranta k funkcím φ_k, nezávislá na k:

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}x = \int_{B_{\mathtt{R}}} \varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}x = |\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0| \leqslant \int_{B_{\mathtt{R}}} \underbrace{\max_{\substack{x\in B_{\mathtt{R}}\\ k\in\mathbf{N}}} |\varphi_k(x)|}_{K}\,\mathrm{d}x = \int_{B_{\mathtt{R}}} K\,\mathrm{d}x = \int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}} K\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$$

  Integrabilní majoranta tedy je $K\Theta(\mathtt{R} - |x|)$.

4. Funkce: $(\tilde{f}_{\vec{\mu}}; \varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{\mu})$, kde $\vec{\mu}$ je pevně zvoleno.
   - existence je splněna automaticky
   - linearita: $(\tilde{f}_{\vec{\mu}}; \varphi(\vec{x}) + \alpha\psi(\vec{x})) = \varphi(\vec{\mu}) + \alpha\psi(\vec{\mu}) = (\tilde{f}_{\vec{\mu}}; \varphi(\vec{x})) + \alpha(\tilde{f}_{\vec{\mu}}; \psi(\vec{x}))$
   - spojitost: $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}(\tilde{f}_{\vec{\mu}}; \varphi_k(\vec{x})) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{\mu}) = 0$
5. Mocninná funkce $(\tilde{f}; \varphi(x)) = \varphi^2(0)$ není funkcionálem, neboť není splněna linearita.
6. Derivace funkce $(\tilde{f}; \varphi(x)) = \varphi'''(8)$ je zobecněnou funkcí.
7. Integrál funkce $(\tilde{f}; \varphi(x)) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ není zobecněnou funkcí, neboť $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ neexistuje a ani vlastnosti testovacích funkcí nedokáží tento problém odstranit.
8. Integrál funkce $(\tilde{f}; \varphi(x)) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$ funkcionálem je, neboť vhodně zvolená funkce $\varphi(x)$ dostatečně sníží hodnotu integrálu.

6.19 Věta – *o regulární distribuci*

Nechť $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$. Pak funkcionál $\tilde{g}$ definovaný nad $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ předpisem

$$(\tilde{g}; \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$

je z $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- existence plyne ze srovnávacího kritéria:

$$|g(\vec{x})\varphi(\vec{x})| \leqslant \max_{x\in B_R} |\varphi(x)||g(\vec{x})| = K|g(\vec{x})| \in \mathscr{L}(B_{\mathtt{R}}),$$

  Vzhledem k tomu, že $\varphi(\vec{x})$ je testovací, postačuje při hledání majoranty integrál na $\int_{B_R} g(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$

- linearita je důsledkem existence integrálu
- spojitost plyne z následující série rovností:

$$\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (\tilde{(g)}; \varphi_k(\vec{x})) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x})\varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = |\text{Lebesgueova věta (MAB4)}| =$$
$$= \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x}) \underbrace{\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{x})}_{=0}\,\mathrm{d}\vec{x} = 0.$$

6.20 Definice

Nechť $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Existuje-li $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$ tak, že $\forall \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost

$$(\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x},$$

pak řekneme, že $\tilde{f}$ je *regulární distribucí* s *generátorem* $g(\vec{x})$. Třídu všech regulárních distribucí (zobecněných funkcí) značíme $\mathscr{D}'_{reg}(\mathbf{E}^r)$. Neregulární distribuce nazýváme *singulárními.*

6.21 Poznámka

Platí následující tvrzení: $\mathscr{D}'_{reg}(\mathbf{E}^r) \subset\subset \mathscr{D}_{reg}(\mathbf{E}^r)$.

6.22 Příklad

Mějme $(\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{R}} x^2\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}x$, kde $\forall \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Pak lze psát $\tilde{f} = \widetilde{x^2}$. Otázka na funkční hodnotu distribuce sice nedává smysl, avšak můžeme používat "vlnovkovou"symboliku pro vyjádření působení dané zobecněné funkce. Jiné příklady jsou: $\widetilde{\mathtt{e}^{-x}}$, a $\widetilde{\sin(x)}$. Pro dříve uvedené příklady distribučních funkcí lze použít symboly $\tilde{0}$ (příklad 2), či $\tilde{1}$ (příklad 3). Zakázaný symbol by mohl být takový, který by vyjadřoval příklad 7, který není distribuční funkcí: $\widetilde{\frac{1}{x}}$. Takový symbol však nemůže existovat.

6.23 Poznámka

Třída všech regulárních distribucí $\mathscr{D}'_{reg}$ sice tvoří podprostor distribucí $\mathscr{D}'$, avšak tyto množiny si nejsou rovné, neboť existují takové distribuce, které jsou singulární.

6.24 Příklad

Vraťme se ke čtvrté distribuci z našich příkladů. Speciálně volme $(\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{0})$. Ukažme, že $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r) \backslash \mathscr{D}'_{reg}(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- důkaz provedeme sporem
- předpokládejme $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$
- tedy $(\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \varphi(\vec{0})$
- pak lze psát
$$\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x}) \cdot x_1 \cdot \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = (x_1 \cdot \varphi(\vec{x}))_{\vec{x}=\vec{0}} = 0 \cdot \varphi(\vec{0}) = 0,$$
pro $\forall \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$.
- první člen v předcházející rovnosti definuje nový funkcionál: $(\tilde{0}; \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{E}^r} 0 \cdot \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$, kde $\tilde{0}$ je regulární distribuce s generátorem rovným faktorové nule
- ze dvou předcházejících bodů tedy plyne: $g(\vec{x}) \cdot x_1 \approx 0 \Rightarrow g(\vec{x}) \approx 0 \Rightarrow$ spor. Tedy kdyby existoval generátor takovéto funkce, musela by to být distribuční 0.

Distribuci $(\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{0})$ nazýváme *Diracova δ-funkce* a značíme ji $\tilde{\delta}$. V případě $(\tilde{f}_{\vec{\mu}}; \varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{\mu})$ nazýváme tuto centrovanou Diracovou funkcí s centrem $\vec{\mu}$.

6.25 Definice

Definujme rovnost dvou distribučních funkcí takto:

$$\tilde{f} = \tilde{g} \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) : (\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) - (\tilde{g}; \varphi(\vec{x})) = 0.$$

6.26 Definice

Heavisideova distribuce je zobecněná funkce definovaná předpisem

$$(\tilde{\Theta}; \varphi(\vec{x})) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(\vec{x})\, \mathtt{d}\vec{x},$$

kde $\tilde{\Theta} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbf{E}^r)$. Generátorem je $\Theta(\vec{x}) = \Theta(x_1)\Theta(x_2)\cdots\Theta(x_r)$. Centrovaná Heavisideova distribuce je pak definována rovností

$$(\tilde{\Theta}_{\vec{\mu}}; \varphi(\vec{x})) = \int_{\mu_1}^\infty \int_{\mu_2}^\infty \cdots \int_{\mu_r}^\infty \varphi(\vec{x})\, \mathtt{d}\vec{x},$$

kde $\tilde{\Theta}_{\vec{\mu}} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbf{E}^r)$. Generátorem je $\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) = \Theta(x_1 - \mu_1)\Theta(x_2 - \mu_2)\cdots\Theta(x_r - \mu_r)$.

13. přednáška (23.11.2015) - zobecněné funkce: Sochockého vzorce, operace v $\mathscr{D}'$

6.27 Poznámka

Funkce $\frac{1}{x}$ nepatří do $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, proto neexistuje ani $\tilde{\frac{1}{x}}$. Ze stejného důvodu neexistují ani $\widetilde{\frac{1}{x-a}}$ a $\widetilde{\frac{1}{(x-a)^n}}$. Alternativou k těmto nevyhovujícím výrazům budou zobecněné funkce *konečná část*, případně *druhá konečná část*, atp..

6.28 Definice

Zobecněnou funkci $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ definovanou pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ předpisem

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

nazveme *konečnou částí* nebo latinsky *partie finie.*

6.29 Věta

Nechť je na třídě $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ jednorozměrných testovacích funkcí definován funkcionál $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ předpisem

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{6.23}$$

Pak $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ a navíc pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{6.24}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nejprve prokážeme rovnost (6.24)
- upravme si proto nejprve pravou stranu vztahu (6.23) do jiného tvaru

$$\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[-\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-t)}{t}\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

- poslední rovnost platí, neboť integrand je spojitou funkcí i pro $x \to 0$, což vychází z rovnosti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0),$$

  a dále existuje integrabilní majoranta nezávislá na ε platná pro všechny $x \in (0,\infty)$
- existence této majoranty tvaru $g(x) = \mathtt{K}\,\Theta(x)\Theta(\mathtt{R}-x)$ plyne ze srovnání

$$\left|\chi_{(\varepsilon,\infty)}(x)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \leqslant \mathtt{K}.$$

- číslo $\mathtt{R} > 0$ je zvoleno tak, aby $\operatorname{supp}(\varphi) \subset S_{\mathtt{R}}$
- pro rozhodnutí, zda $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$, postačí prokázat spojitost funcionálu (6.23), neboť linearita je zřejmá
- nechť tedy posloupnost testovacích funkcí $\left(\varphi_k(\vec{x})\right)_{k=1}^{\infty}$ konverguje superstejnoměrně k nulové testovací funkci $o(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, čili $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows o(\vec{x})$
- pak

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathtt{d}x = \int_0^\infty \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathtt{d}x = \int_0^\infty 0\,\mathtt{d}x = 0$$

- přitom limitu na integrál bylo možno zaměnit s ohledem na fakt, že existuje integrabilní majoranta k integrandu $x \mapsto \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}$ a navíc nezávislá na indexu k
- takovou majorantou je již citovaná funkce $g(x) = \mathtt{K}\,\Theta(x)\Theta(\mathtt{R}-x)$, kde $\mathtt{R}$ je poloměr intervalu $(-\mathtt{R},\mathtt{R})$, pro nějž a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset (-\mathtt{R},\mathtt{R})$
- existenci takového $\mathtt{R}$ garantuje definice superstejnoměrné konvergence 6.14
- tím je důkaz završen

6.30 Definice

Zobecněnou funkci $\mathcal{P}\frac{1}{x^2} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ definovanou pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ předpisem

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathtt{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathtt{d}x$$

nazveme *druhou konečnou částí.*

6.31 Definice

Nechť $S \subset \mathbf{E}^r$ je hladká, regulární a jednoduchá nadplocha v prostoru $\mathbf{E}^r$. Nechť $\nu(\vec{x}) : S \mapsto \mathbf{C}$ a $\nu(\vec{x}) \in \mathscr{C}(S)$. Zobecněnou funkci $\widetilde{\delta_S} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ definovanou pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ předpisem

$$\left(\widetilde{\delta_S}, \varphi(\vec{x})\right) = \int_S \nu(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu_s(\vec{x})$$

nazveme *Diracovou prostou vrstvou* na nadploše S s hustotou $\nu(\vec{x})$ (nejčastěji se volí $\nu(\vec{x}) = 1$).

6.32 Definice

Zobecněné funkce $\widetilde{\frac{1}{x\pm\mathtt{i}0}} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ definované vztahem

$$\left(\widetilde{\frac{1}{x\pm\mathtt{i}0}}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x\pm\mathtt{i}\varepsilon}\,\mathtt{d}x \tag{6.25}$$

nazýváme *kladnou, resp. zápornou Sochockého distribucí.*

6.33 Příklad

Mezi Sochockého distribucemi, Diracovou $\delta-$funkcí a konečnou částí definovanou v definici 6.28 platí série jednoduchých vztahů nazývaných *Sochockého vzorce.*Tyto vzorce mají tvar

$$\widetilde{\frac{1}{x\pm\mathtt{i}0}} = \mp\mathtt{i}\pi\widetilde{\delta(x)} + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{6.26}$$

Sochockého vzorec dokážeme např. pro variantu se znaménkem plus. Upravujeme tedy definiční vztah (6.25), resp. jeho pravou stranu. Pro ni triviálně platí

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x+\mathtt{i}\varepsilon}\,\mathtt{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathtt{d}x - \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \mathtt{i}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathtt{d}x.$$

Pro imaginární část platí

$$-\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varepsilon\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x = \left|y=\frac{x}{\varepsilon}\right| = -\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(\varepsilon y)}{y^2+1}\mathrm{d}y = -\varphi(0)\int_{\mathbf{R}}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = -\pi\varphi(0) = \big(-\pi\tilde{\delta}(x),\varphi(x)\big),$$

kde záměna limity a integrálu byla možná kvůli existenci integrabilní majoranty zaručené omezeností funkce $\varphi(x)$ na $\mathbf{R}$ a existencí konečného integrálu $\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$. Pro reálnou část zkoumaného vztahu platí tyto rovnosti

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^\infty\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(-x)\big)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^\infty\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\infty\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right).\end{aligned}$$

Záměna v předposlední rovnosti je zaručená jednak tím, že funkce $\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}$ nabývá hodnot z $\langle 0,1\rangle$ a dále tím, že $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$. Podle věty 6.10 totiž

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\mathtt{R}}\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathrm{d}x \leqslant \\ &\leqslant \int_0^{\mathtt{R}}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\mathtt{R}}\mathtt{K} = \mathtt{KR} < \infty,\end{aligned}$$

čímž jsme ukázali, že existuje integrabilní majoranta a je možné provést příslušnou záměnu.

6.34 Definice

Nechť jsou dány zobecněné funkce $\tilde{f},\tilde{g}\in\mathscr{D}'$ a číslo $c\in\mathbf{C}$. Pak definujeme *součet distribucí* vztahem

$$\big(\tilde{f}+\tilde{g},\varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{f},\varphi(\vec{x})\big)+\big(\tilde{g},\varphi(\vec{x})\big)$$

a *číselný násobek distribuce* definičním předpisem

$$\big(c\tilde{f},\varphi(\vec{x})\big) = c\big(\tilde{f},\varphi(\vec{x})\big).$$

6.35 Lemma

Třída $\mathscr{D}'$ společně s operacemi sčítání a násobení číslem tvoří vektorový prostor.

6.36 Věta

Třída regulárních distribucí $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ je podprostorem v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, tj. $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)\subset\subset\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- ukážeme homogenitu a aditivitu
- nechť $\tilde{f},\tilde{g}\in\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}$ a $c\in\mathbf{C}$
- potom pro všechna $\varphi(\vec{x})\in\mathscr{D}$ platí

$$\begin{aligned}\big(c\cdot\tilde{f}+\tilde{g},\varphi(\vec{x})\big) = c\cdot\big(\tilde{f},\varphi(\vec{x})\big)+\big(\tilde{g},\varphi(\vec{x})\big) &= c\cdot\int_{\mathbf{E}^r}f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}+\int_{\mathbf{E}^r}g(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \\ &= \int_{\mathbf{E}^r}\big(c\cdot f(\vec{x})+g(\vec{x})\big)\,\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}\end{aligned}$$

- našli jsme tedy generátor zobecněné funkce $c\cdot\tilde{f}+\tilde{g}$, čili podprostor je uzavřený

6.37 Definice

Nechť $\mathbb{A}$ je regulární čtvercová matice řádu r a $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$ libovolný vektor. Pak pro každou zobecněnou funkci $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ definujeme *afinní transformaci souřadnic* tvaru

$$\Big(\tilde{f}(\mathbb{A}\vec{x}+\vec{b}), \varphi(\vec{x})\Big) = \frac{1}{|\det(\mathbb{A})|}\Big(\tilde{f}(\vec{y}), \varphi(\mathbb{A}^{-1}\vec{y} - \mathbb{A}^{-1}\vec{b})\Big). \tag{6.27}$$

6.38 Poznámka

V předešlé definici je třeba ale prokázat, že funkcionál $\Big(\tilde{f}(\vec{y}), \varphi(\mathbb{A}^{-1}\vec{y} - \mathbb{A}^{-1}\vec{b})\Big)$ je skutečně z $\mathscr{D}'$. To ponecháváme čtenáři jako cvičení. Je-li f regulární distribuce, pak afinní transformace odpovídá lineární substituci ve vícerozměrném integrálu tvaru

$$\Big(\tilde{f}(\mathbb{A}\vec{x}+\vec{b}), \varphi(\vec{x})\Big) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\mathbb{A}\vec{x}+\vec{b})\,\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \left|\begin{array}{l} \vec{y} = \mathbb{A}\vec{x}+\vec{b} \\ \vec{x} = \mathbb{A}^{-1}(\vec{y}-\vec{b}) \\ \mathrm{d}\vec{x} = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{|\det(\mathbb{A})|} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{|\det(\mathbb{A})|}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\,\varphi(\mathbb{A}^{-1}(\vec{y}-\vec{b}))\,\mathrm{d}\vec{y} = \frac{1}{|\det(\mathbb{A})|}\Big(\tilde{f}(\vec{y}), \varphi(\mathbb{A}^{-1}\vec{y} - \mathbb{A}^{-1}\vec{b})\Big).$$

6.39 Definice

Řekneme, že posloupnost zobecněných funkcí $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, kde $\tilde{f}_k \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ *konverguje* ve třídě distribucí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ k zobecněné funkci $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k = \tilde{f}$, pokud platí

$$\lim_{k\to\infty}\big(\tilde{f}_k, \varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{f}, \varphi(\vec{x})\big)$$

pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$.

6.40 Definice

Nechť zobecněná funkce $\tilde{f}_\mu \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ závisí na parametru $\mu \in \mathbf{R}$. Pak řekneme, že zobecněná funkce $\tilde{f}_\mu$ konverguje (pro μ jdoucí k μ_0) k zobecněné funkci $\tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem $\lim_{\mu\to\mu_0} \tilde{f}_\mu = \tilde{g}$, pokud pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí rovnost

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\big(\tilde{f}_\mu, \varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{g}, \varphi(\vec{x})\big).$$

6.41 Příklad

Uvažme hustotu pravděpodobnosti normálního rozdělení

$$\wp_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.28}$$

a zkoumejme v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ její limitu pro σ jdoucí k nule zprava, tedy

$$\lim_{\sigma\to 0_+}(\wp_{\mu,\sigma}, \varphi(x)) = \lim_{\sigma\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} y = x-\mu \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\sigma\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\varphi(y+\mu)\,\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{l} y = u\,\sigma \\ \mathrm{d}y = \sigma\,\mathrm{d}u \end{array}\right| = \lim_{\sigma\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\varphi(u\,\sigma+\mu)\,\mathrm{d}u.$$

Teprve na tomto místě je možno zaměnit limitu a integrál, neboť existuje integrabilní majoranta k integrandu nezávislá na parametru σ. Díky vlastnostem testovací funkce $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ je zřejmé, že $\varphi(x)$ je omezená, tudíž jistě existuje $\mathtt{K} > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $|\varphi(x)| < \mathtt{K}$. Onou hledanou majorantou k výše uvedenému integrandu nezávislou na parametru σ je funkce

$$\frac{\mathtt{K}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}},$$

která je zjevně lebesgueovsky integrabilní. Pak tedy

$$\lim_{\sigma\to 0_+}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\varphi(u\,\sigma+\mu)\,\mathrm{d}u = \frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \varphi(\mu) = \big(\delta(x-\mu), \varphi(x)\big),$$

což jasně demonstruje, že

$$\lim_{\sigma\to 0_+} \wp_{\mu,\sigma}(x) \overset{\mathscr{D}'}{=} \tilde{\delta}(x-\mu).$$

Hustota pravděpodobnosti normální rozdělení, je-li chápána jako zobecněná funkce, konverguje se zmenšující se směrodatnou odchylkou σ k centrované $\delta-$funkci. Takto lze demonstrovat singulární chování zobecněné funkce $\tilde{\delta}(x-\mu)$.

6.42 Poznámka

Narozdíl od součtu, kdy je možno sčítat libovolné zobecněné funkce, násobit libovolné zobecněné funkce obecně nebude možné. Definováno bude pouze násobení zobecněné funkce regulární distribucí, jejímž generátorem je hladká funkce $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$. Důvod je ukryt v definičním vztahu (6.29), kdy je třeba zajistit, aby součin $a(\vec{x})\varphi(\vec{x})$ patřil do třídy $\mathscr{D}$ testovacích funkcí.

6.43 Definice

Nechť je dána funkce $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a zobecněná funkce $\tilde{f} \in \mathscr{D}'$. Nechť $\tilde{a} \in \mathscr{D}'$ je regulární zobecněná funkce generovaná funkcí $a(\vec{x})$. Pak definujeme *součin distribucí* vztahem

$$\big(\tilde{a}\tilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{f}, a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\big). \tag{6.29}$$

6.44 Příklad

Čemu se rovná $\widetilde{x^2}\delta$? Odpověď nám poskytnou následující rovnosti, ve kterých použijeme předchozí definici.

$$(\widetilde{x^2}\tilde{\delta}, \varphi(x)) = (\tilde{\delta}, x^2\varphi(x)) = 0 \cdot \varphi(x)(0) = (\tilde{0}, \varphi(x))$$

Platí tedy, že $\widetilde{x^2}\tilde{\delta} = \tilde{0}$

6.45 Definice

Nechť je dána zobecněná funkce $\tilde{f} \in \mathscr{D}'$ a multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Pak definujeme *derivaci* $\mathcal{D}^\alpha \in \mathscr{D}'$ *distribuce* $\tilde{f}$ vztahem

$$\big(\mathcal{D}^\alpha \tilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(\tilde{f}, \mathcal{D}^\alpha\varphi(\vec{x})\big).$$

6.46 Příklad

Vypočteme derivaci jednorozměrné Heavisideovy distribuce $\Theta \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Výpočet je značně snadný, neboť

$$\big(\tilde{\Theta}', \varphi(x)\big) = -\big(\tilde{\Theta}, \varphi'(x)\big) = -\int_{\mathbf{R}} \Theta(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\big[\varphi(x)\big]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty}\varphi(x) + \varphi(0) = \varphi(0) = \big(\delta, \varphi(x)\big).$$

Derivací jednorozměrné Heavisideovy funkce je tedy Diracova $\delta-$ funkce. Podobná situace nastane u derivace vícerozměrné Heavisideovy distribuce. Pro ni platí

$$\big(\mathcal{D}^{(1,1,\dots,1)}\tilde{\Theta}(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big) = (-1)^r \left(\tilde{\Theta}(\vec{x}), \frac{\partial^r\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_r}\right) = \int_{\mathbf{R}_+^r} \frac{\partial^r\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_r}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_r =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_+^{r-1}} \left[\frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{r-1}}(x_1, x_2, \dots, x_r)\right]_0^\infty \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_{r-1} =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_+^{r-1}} \frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{r-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, 0)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_{r-1} = \dots = \int_0^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, 0, 0, \dots, 0)\,\mathrm{d}x_1 =$$

$$= \Big[\varphi(x_1, 0, 0, \dots, 0)\Big]_0^\infty = \varphi(\vec{0}) = \big(\delta, \varphi(\vec{x})\big).$$

Odtud

$$\mathcal{D}^{(1,1,\dots,1)}\Theta(\vec{x}) = \frac{\partial^r\Theta}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_r} = \delta(\vec{x}).$$

Podobně také

$$\big(\mathcal{D}^{(1,1,\ldots,1)}\tilde{\Theta}_{\vec{\mu}}(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big) = (-1)^r\left(\tilde{\Theta}_{\vec{\mu}}(\vec{x}),\frac{\partial^r\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_r}\right) = \int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\ldots\int_{\mu_r}^{\infty}\frac{\partial^r\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_r}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_r =$$

$$= \int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\ldots\int_{\mu_{r-1}}^{\infty}\left[\frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_{r-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_r)\right]_{\mu_r}^{\infty}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{r-1} =$$

$$= \int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\ldots\int_{\mu_{r-1}}^{\infty}\frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_{r-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_{r-1},\mu_r)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{r-1} = \ldots = \int_{\mu_1}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_r)\,\mathrm{d}x_1 =$$

$$= \Big[\varphi(x_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_r)\Big]_{\mu_1}^{\infty} = \varphi(\vec{\mu}) = \big(\tilde{\delta}_{\vec{\mu}},\varphi(\vec{x})\big).$$

A proto

$$\mathcal{D}^{(1,1,\ldots,1)}\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) = \frac{\partial^r\Theta_{\vec{\mu}}}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_r} = \delta_{\vec{\mu}}(\vec{x}).$$

6.47 Věta

Nechť $c\in\mathbf{R}$ je zvoleno pevně. Nechť je dána funkce $f(x):\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ taková, že $f(x)\in\mathscr{C}^1(x<c)$ a $f(x)\in\mathscr{C}^1(x>c)$, a f reprezentuje příslušnou zobecněnou funkci. Označme symbolem $\lceil f\rceil_c$ délku skoku funkce $f(x)$ v bodě c, tedy

$$\lceil f\rceil_c := \lim_{x\to c_+} f(x) - \lim_{x\to c_-} f(x).$$

Nechť symbol $f^\sharp$ představuje distribuci generovanou derivací funkce $f(x)$ na množině $\mathbf{R}\backslash\{c\}$. Pak pro zobecněnou derivaci distribuce f ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ platí vztah

$$f' = f^\sharp + \lceil f\rceil_c\cdot\delta(x-c).$$

Důkaz:

- při důkazu využijeme pouze definice derivace v $\mathscr{D}'$, vlastností testovacích funkcí a metody per partes

$$\big(f',\varphi(x)\big) = -\big(f,\varphi'(x)\big) = -\int_{-\infty}^{c} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{c}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u=f(x) & v'=\varphi'(x)\\ u'=f^\sharp(x) & v=\varphi(x)\end{array}\right| =$$

$$= -\big[f(x)\varphi(x)\big]_{-\infty}^{c} + \int_{-\infty}^{c} f^\sharp(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \big[f(x)\varphi(x)\big]_{c}^{\infty} + \int_{c}^{\infty} f^\sharp(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\,\varphi(c)\lim_{x\to c_-} f(x) \;+\; \varphi(c)\lim_{x\to c_+} f(x) \;+\; \int_{\mathbf{R}} f^\sharp(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lceil f\rceil_c\,\varphi(c) + \int_{\mathbf{R}} f^\sharp(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \big(f^\sharp + \lceil f\rceil_c\cdot\delta(x-c)\,,\,\varphi(x)\big).$$

6.48 Důsledek

Nechť $c_1<c_2<\ldots<c_n$ jsou zvoleny pevně. Nechť je dána funkce $f(x):\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ tak, že pro $i\in\widehat{n-1}$ platí

$$f(x)\in\mathscr{C}^1(x<c_1),\quad f(x)\in\mathscr{C}^1(c_i<x<c_{i+1}),\quad f(x)\in\mathscr{C}^1(x>c_n).$$

Nechť f reprezentuje příslušnou zobecněnou funkci. Označme symbolem $\lceil f\rceil_{c_i}$ délku skoku funkce $f(x)$ v bodě c_i, tedy

$$\lceil f\rceil_{c_i} := \lim_{x\to c_{i+}} f(x) - \lim_{x\to c_{i-}} f(x).$$

Nechť symbol $f^\sharp$ představuje distribuci generovanou derivací funkce $f(x)$ na množině $\mathbf{R}\backslash\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$. Pak pro zobecněnou derivaci distribuce f ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ platí vztah

$$f' = f^\sharp + \sum_{i=1}^{n}\lceil f\rceil_{c_i}\cdot\delta(x-c_i).$$

14. přednáška (24.11.2015) - nosič zobecněné funkce, tenzorový součin

6.49 Definice

Mějme množinu $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a distribuci $(\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) : \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathbf{C}$. Pro $G = G^0$ oblast v $\mathbf{E}^r$ značíme $\mathscr{D}(G) := \{\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) : \operatorname{supp}(\varphi) \subset G\}$. Řekneme, že zobecněná funkce $\tilde{f}$ je *nulová v množině* $H = H^0 \subset \mathbf{E}^r$, pokud $\forall \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(H) : (\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) = 0$.

6.50 Příklad

$\tilde{\delta_7}$ je nulová na množině $H = (-1; 1)$. Tedy pro $\varphi(x) \in \mathscr{D}(H)$ jistě platí $(\tilde{\delta_7}; \varphi(x)) = \varphi(7) = 0$. Avšak $\tilde{\delta_7}$ není nulová na množině $H = (-8; 8)$, což je dáno tím, že existuje $\varphi(x) \in \mathscr{D}(H)$ taková, že $\varphi(7) \neq 0$.

6.51 Definice

Obor nulovosti dané zobecněné funkce $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$:

$$N_{\tilde{f}} = \text{sjednocení všech otevřených množin z } \mathbf{E}^r, \text{ na nichž je } \tilde{f} \text{ nulová.}$$

6.52 Definice

Nosič zobecněné funkce: $\operatorname{supp}(\tilde{f}) := \mathbf{E}^r \backslash N_{\tilde{f}}$.

6.53 Příklad

Uveďme několik příkladů:

- $\operatorname{supp}(\tilde{\delta_7}) = \{7\}$
- $\operatorname{supp}(\tilde{\delta}) = \{\vec{0}\}$
- $\operatorname{supp}(\tilde{\theta}) = \mathbf{R}_0^+;\ N_{\tilde{\theta}} = (-\infty; 0)$

6.54 Definice

Označíme $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$ všechny zobecněné funkce, jejichž nosič je podmnožinou $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \ldots \times \mathbf{R}^+ = (\mathbf{R}^+)^r$. Tedy

- $\tilde{\theta} \notin \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$,
- $\tilde{\theta}_\mu \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ pro $\mu > 0$,
- $\tilde{\delta}_\mu \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ pro $\mu > 0$,
- $\tilde{\delta}_{\vec{\mu}} \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$ pro $\mu_1 > 0 \wedge \mu_2 > 0 \wedge \ldots \wedge \mu_r > 0$.

Obecně pro $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$ říkáme, že $\tilde{f}$ je *distribucí s pozitivním nosičem*.

7 Tenzorový součin

7.1 Definice – *tenzorový součin distribucí*

Mějme zobrazení $\otimes : \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r) \times \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s) \mapsto \mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+s})$. Nechť $\tilde{f}(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$; $\tilde{g}(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$. Pak *tenzorovým součinem* nazýváme distribuci definovanou předpisem

$$(\tilde{f} \otimes \tilde{g}; \varphi(\vec{x}, \vec{y})) := \big(\tilde{f}(\vec{x}); (\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x}, \vec{y}))\big).$$

7.2 Věta

Pro $\forall \tilde{g}(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$ a $\forall \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ platí:

1. $(\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x}, \vec{y})) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$,
2. $\mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}}(\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x}, \vec{y})) = (\tilde{g}(\vec{y}); \mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}}\varphi(\vec{x}, \vec{y}))$.

7.3 Příklad

$\big(\tilde{\delta}(y); \omega_\varepsilon(x, y)\big) = \omega_\varepsilon(x, 0)$.

7.4 Věta

Tenzorový součin je bilineární.

Důkaz:

- pro levý argument:

$$\big((\tilde{f} + \alpha\tilde{h}) \otimes \tilde{g}; \varphi(\vec{x}, \vec{y})\big) = \big(\tilde{f} + \alpha\tilde{h}; (\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x}, \vec{y}))\big) = \big(\tilde{f}; (\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x}, \vec{y}))\big) + \alpha\big(\tilde{h}; (\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x}, \vec{y}))\big)$$

- protože $(\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x}, \vec{y})) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, platí poslední rovnost
- z toho plyne $(\tilde{f} + \alpha\tilde{h}) \otimes \tilde{g} = \tilde{f} \otimes \tilde{g} + \alpha(\tilde{h} \otimes \tilde{g})$.
- pro pravý argument lze ukázat obdobně.

7.5 Lemma

Označme

$$\mathscr{D}_{SEP}(\mathbf{E}^{r+s}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y});\ \varphi_k(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r);\ \psi_k(\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^s);\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

třídu separabilních funkcí v $\mathbf{E}^{r+s}$. Platí $\mathscr{D}_{SEP}(\mathbf{E}^{r+s}) \subset\subset \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ a dále $\mathscr{D}_{SEP}(\mathbf{E}^{r+s})$ je hustá v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$, to jest

$$\forall \omega(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s}) \exists \big(\omega_n(\vec{x}, \vec{y})\big)_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{D}_{SEP}(\mathbf{E}^{r+s}) : \lim_{n\to\infty} \omega_n(\vec{x}, \vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y}).$$

7.6 Věta

Tenzorový součin je komutativní.

Důkaz:

a) dokážeme pro $\mathscr{D}_{SEP}(\mathbf{E}^{r+s})$

–

$$\left(\tilde{f} \otimes \tilde{g}; \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})\right) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \varphi_k(\vec{x})\big(\tilde{g}(\vec{y}); \psi_k(\vec{y})\big)\Big)$$

– z definice $\mathscr{D}'$ můžeme dále psát

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\tilde{g}(\vec{y}); \psi_k(\vec{y})\big) \cdot \big(\tilde{f}(\vec{x}); \varphi_k(\vec{x})\big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\tilde{g}(\vec{y}); \psi_k(\vec{y}) \cdot \big(\tilde{f}(\vec{x}); \varphi_k(\vec{x})\big)\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \big(\tilde{g}(\vec{y}) \otimes \tilde{f}(\vec{x}); \psi_k(\vec{y})\varphi_k(\vec{x})\big) = \left(\tilde{g}(\vec{y}) \otimes \tilde{f}(\vec{x}); \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\vec{y})\varphi_k(\vec{x})\right).$$

b) dokážeme pro obecnou $\omega(\vec{x},\vec{y}) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}_{SEP}(\mathbf{E}^{r+s})$

$$\big(\tilde{f} \otimes \tilde{g}; \omega(\vec{x},\vec{y})\big) = \big(\tilde{f} \otimes \tilde{g}; \lim_{n\to\infty} \omega_n(\vec{x},\vec{y})\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\tilde{f} \otimes \tilde{g}; \omega_n(\vec{x},\vec{y})\big) \overset{a)}{=} \lim_{n\to\infty} \big(\tilde{g} \otimes \tilde{f}; \omega_n(\vec{x},\vec{y})\big) = \big(\tilde{g} \otimes \tilde{f}; \omega(\vec{x},\vec{y})\big).$$

7.7 Věta

Nechť $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$; $\tilde{a} \in \mathscr{D}'_{\text{reg}}(\mathbf{E}^r)$; $\tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$; $\tilde{b} \in \mathscr{D}'_{\text{reg}}(\mathbf{E}^s)$. Nechť pro generátory regulárních distribucí $\tilde{a}$ a $\tilde{b}$ platí: $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$; $b(\vec{y}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^s)$. Pak platí:

$$\tilde{a}(\vec{x}) \cdot \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big) = \big(\tilde{a}(\vec{x}) \cdot \tilde{f}(\vec{x})\big) \otimes \tilde{g}(\vec{y}),$$
$$\tilde{b}(\vec{y}) \cdot \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big) = \tilde{f}(\vec{x}) \otimes \big(\tilde{b}(\vec{y}) \cdot \tilde{g}(\vec{y})\big).$$

Důkaz:

- Provedeme pro druhý výraz

$$\Big(\tilde{b}(\vec{y}) \cdot \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big); \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = \Big(\tilde{f} \otimes \tilde{g}; b(\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); b(\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) =$$
$$= \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{b}(\vec{y}) \cdot \tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \Big(\tilde{f} \otimes \big(\tilde{b}(\vec{y}) \cdot \tilde{g}\big); \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big).$$

- kde ve druhé rovnosti jsme použili fakt, že $\tilde{b}(\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$.

7.8 Věta

Nechť $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$; $\tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$. Nechť $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ a $\beta \in \mathbf{N}_0^s$. Pak platí:

$$\mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}} \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big) = \mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}} \tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}),$$
$$\mathcal{D}^\beta_{\vec{y}} \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big) = \mathcal{D}^\beta_{\vec{y}} \tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}).$$

Důkaz:

- nejprve dokážeme druhý výraz

$$\Big(\mathcal{D}^\beta_{\vec{y}} \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big); \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = (-1)^{|\beta|} \Big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \mathcal{D}^\beta_{\vec{y}} \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = (-1)^{|\beta|} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); \mathcal{D}^\beta_{\vec{y}} \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) =$$
$$= (-1)^{|\beta|} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\mathcal{D}^\beta_{\vec{y}} \tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \Big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \mathcal{D}^\beta_{\vec{y}} \tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) \quad \forall \varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s}),$$

- kde ve třetí rovnosti jsme použili druhý bod věty 7.2
- nyní dokážeme první výraz

$$\Big(\mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}} \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big); \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = (-1)^{|\alpha|} \Big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}} \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = (-1)^{|\alpha|} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); \mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}} \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}} \big(\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \Big(\mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}} \tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) \quad \forall \varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s}).$$

7.9 Věta

Nechť $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$; $\tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$; $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$; $\vec{\nu} \in \mathbf{E}^s$. Pak platí:

$$\big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big)(\vec{x} - \vec{\mu}; \vec{y}) = \tilde{f}(\vec{x} - \vec{\mu}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}),$$
$$\big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big)(\vec{x}; \vec{y} - \vec{\nu}) = \tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y} - \vec{\nu}).$$

Bez důkazu.

7.10 Věta – *o spojitosti tenzorového součinu*

Nechť jsou dány $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k = \tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $\lim_{k\to\infty} \tilde{g}_k = \tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$. Pak platí:

$$\lim_{k\to\infty} \big(\tilde{f}_k(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big) = \tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}),$$
$$\lim_{k\to\infty} \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}_k(\vec{y})\big) = \tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}).$$

Důkaz:

- dokážeme první výraz:

$$\left(\lim_{k\to\infty} \big(\tilde{f}_k(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y})\big); \varphi(\vec{x},\vec{y})\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\tilde{f}_k(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\tilde{f}_k(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\right) =$$
$$= \left(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\right) = \left(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \varphi(\vec{x},\vec{y})\right).$$

15. přednáška (30.11.2015) - operace konvoluce pro zobecněné funkce

7.11 Poznámka

Z klasického definičního vztahu konvoluce pro obyčejné funkce bychom pro regulární distribuce mohli snadno odvodit rovnost

$$(f \star g, \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{t})\, g(\vec{x}-\vec{t})\, \mathrm{d}\vec{t} \right) \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^{2n}} f(\vec{t})\, g(\vec{x}-\vec{t})\, \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{t}\mathrm{d}\vec{x} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \vec{s} = \vec{x} - \vec{t} \\ \mathrm{d}\vec{s} = \left|\det\left(\frac{\mathcal{D}\vec{s}}{\mathcal{D}\vec{t}}\right)\right| \mathrm{d}\vec{t} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^{2n}} f(\vec{t})\, g(\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{s}\mathrm{d}\vec{x} = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{s}), \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big) \Big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big).$$

Pokud bychom ovšem zamýšleli tento vztah prohlásit za definici zobecněné konvoluce, narazili bychom na zcela zásadní problém, že totiž není obecně zaručena omezenost nosiče funkce $\varphi(\vec{s}+\vec{x})$. Vzniklý problém odstraníme tak, že funkci $\varphi(\vec{s}+\vec{x})$ nahradíme posloupností funkcí $\varphi_k(\vec{s}+\vec{x})$ s kompaktním nosičem, jejíž limitou je právě funkce $\varphi(\vec{s}+\vec{x})$. K tomu vyslovíme následující pomocnou definici.

7.12 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\eta_k(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, kde $\eta_k(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, *konverguje k jedničce* v $\mathbf{E}^r$, jestliže

- pro každou kompaktní množinu $M \subset \mathbf{E}^r$ existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že platí implikace

$$k > k_0 \wedge \vec{x} \in M \quad \Longrightarrow \quad \eta_k(\vec{x}) = 1$$

- pro každý multiindex α existuje číslo $\mathtt{C}_\alpha \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\sup_{\vec{x}\in\mathbf{E}^r} \left|\mathcal{D}^\alpha \eta_k(\vec{x})\right| < \mathtt{C}_\alpha$.

7.13 Definice

Nechť jsou dány zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a posloupnost funkcí $\eta_k(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{E}^{2r} \mapsto \mathbf{R}$, která konverguje v množině $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce. Nechť limita

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big)$$

existuje pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a nechť její hodnota nezávisí na volbě posloupnosti $\eta_k(\vec{x},\vec{y})$. Pak tuto limitu označíme symbolem $\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big)$ a nazveme *konvolucí zobecněných funkcí* $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

7.14 Příklad

Nechť $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Vypočtěme konvoluci $f \star \delta$. Nechť $\eta_k(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{E}^{2r} \mapsto \mathbf{R}$ je posloupnost funkcí, která konverguje k jedničce. Vyberme libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Pak

$$\big(f \star \delta, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes \delta(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big) = \lim_{k\to\infty} \big(f, (\delta(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(f, \eta_k(\vec{x},\vec{0})\, \varphi(\vec{x}) \big) = \big(f, \varphi(\vec{x}) \big).$$

Zde bylo užito faktu, že pro dostatečně velká k platí rovnost $\eta_k(\vec{x},\vec{0})\, \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$. Uzavíráme tedy, že

$$f \star \delta = \delta \star f = f. \tag{7.30}$$

7.15 Věta

Konvoluce je podmínečně bilineární zobrazení. Tj. pro všechny $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a všechna $\alpha \in \mathbf{C}$ platí, že

$$\tilde{f} \star (\tilde{g} + \alpha\tilde{h}) = \tilde{f} \star \tilde{g} + \alpha(\tilde{f} \star \tilde{h})$$

$$(\tilde{f} + \alpha\tilde{h}) \star \tilde{g} = \tilde{f} \star \tilde{g} + \alpha(\tilde{h} \star \tilde{g}),$$

pokud uvedené konvoluce existují. Podmíněnost je tedy dána právě existencemi daných konvolucí.

Důkaz:

- jedná se o přímý důsledek bilinearity tenzorového součinu

7.16 Věta

Konvoluce zobecněných funkcí je podmínečně komutativní zobrazení.

Důkaz:

- jedná se o přímý důsledek komutativity tenzorového součinu
- snadno totiž

$$\big(\tilde{f} \,\star\, \tilde{g}, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(g(\vec{s}) \otimes f(\vec{x}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\big) = \big(\tilde{g} \,\star\, \tilde{f}, \varphi(\vec{x})\big)$$

7.17 Příklad

Zvolme pevné $\vec{\mu}$. Potom platí

$$(\tilde{f}(\vec{x}) \star \delta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})) = (\tilde{f}(\vec{x}), \lim_{k\to\infty} \eta_k(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{\mu})) = (\tilde{f}(\vec{x}), \varphi(\vec{x}+\vec{\mu})) = (\tilde{f}(\vec{z}-\vec{\mu}), \varphi(\vec{z})).$$

V poslední rovnosti jsme využili definice afinní transformace. Z uvedených rovností tedy plyne to, že centrovaná Diracova delta funkce působí na libovolnou zobecněnou funkci $\tilde{f}$ pouze jako posunutí

$$\tilde{f} \star \delta_{\vec{\mu}} = \tilde{f}(\vec{x} - \vec{\mu}).$$

7.18 Věta

Nechť f, g jsou regulární zobecněné funkce generované funkcemi $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak $f \star g \in \mathscr{D}'_{\text{reg}}$ a jejím generátorem je funkce $f(\vec{x}) \star g(\vec{x})$.

Důkaz:

- funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ jsou zjevně lokálně integrovatelné
- pak ale

$$\begin{aligned}\big(f \,\star\, g, \varphi(\vec{x})\big) &= \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta_k(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big) = \lim_{k\to\infty} \left(f(\vec{x}), \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y})\, \eta_k(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\, \mathrm{d}y\right) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, g(\vec{y})\, \eta_k(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, g(\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= \left| \begin{array}{c} \vec{z} = \vec{x} + \vec{y} \\ \mathrm{d}\vec{z} = \mathrm{d}\vec{y} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, g(\vec{z}-\vec{x})\, \varphi(\vec{z})\, \mathrm{d}\vec{z}\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{z})\, \varphi(\vec{z})\, \mathrm{d}\vec{z}\end{aligned}$$

- aplikovat limitu jsme na příslušném místě mohli bez problému protože už nešlo o funkcionální výrazy
- to završuje důkaz

7.19 Věta

Nechť jsou dány zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, pro něž existuje konvoluce $f \star g$. Pak pro libovolné $i \in \hat{r}$ platí

$$\frac{\partial (f \star g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g. \tag{7.31}$$

Důkaz:

- zvolme libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- nechť $\eta_k(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{E}^{2r} \mapsto \mathbf{R}$ je posloupnost funkcí, která konverguje v množině $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce
- snadno lze nahlédnout, že pak také posloupnost $\eta_k(\vec{x}) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$ konverguje k jedničce $\forall j \in \hat{r}$
- vyjdeme-li z příslušné definice, obdržíme

$$\left(\frac{\partial (f \star g)}{\partial x_i}, \varphi(\vec{x}) \right) = - \left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \lim_{k \to \infty} \left(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \eta_k(\vec{x}, \vec{s}) \, \frac{\partial \varphi(\vec{s} + \vec{x})}{\partial x_j} \right) =$$

$$- \lim_{k \to \infty} \left(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \frac{\partial \big(\eta_k(\vec{x}, \vec{s}) \, \varphi(\vec{s} + \vec{x}) \big)}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_k(\vec{x}, \vec{s})}{\partial x_j} \, \varphi(\vec{s} + \vec{x}) \right) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}) \big), \eta_k(\vec{x}, \vec{s}) \, \varphi(\vec{s} + \vec{x}) \right) +$$

$$+ \lim_{k \to \infty} \left(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \left(\eta_k(\vec{x}, \vec{s}) + \frac{\partial \eta_k(\vec{x}, \vec{s})}{\partial x_j} \right) \varphi(\vec{s} + \vec{x}) \right) - \lim_{k \to \infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \eta_k(\vec{x}, \vec{s}) \, \varphi(\vec{s} + \vec{x}) \big) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \otimes g(\vec{s}), \eta_k(\vec{x}, \vec{s}) \varphi(\vec{s} + \vec{x}) \right) + \big(f \star g, \varphi(\vec{x}) \big) - \big(f \star g, \varphi(\vec{x}) \big) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g \, , \, \varphi(\vec{x}) \right).$$

7.20 Důsledek

Pro každý multiindex $\alpha \in \mathbf{Z}_0^n$ a každé dvě zobecněné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$, pro něž existuje konvoluce $f \star g$, platí

$$\mathcal{D}^\alpha \big(f \star g \big) = \mathcal{D}^\alpha f \star g = f \star \mathcal{D}^\alpha g.$$

7.21 Poznámka

Operace konvoluce není obecně asociativní v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, neboť platí například rovnosti

$$(\Theta \star \delta') \star 1 = 1 \quad \wedge \quad \Theta \star (\delta' \star 1) = 0.$$

Asociativita bude platit na určitě podtřídě třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. O tom bude pojednávat následující text.

16. přednáška (1.12.2015) - Laplaceova transformace

7.22 Věta

Nechť $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $\tilde{g}$ je finitní. Pak $\tilde{f} \star \tilde{g}$ existuje a navíc pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí

$$\big(\tilde{f} \star \tilde{g}; \varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big),$$

kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce, která je na okolí nosiče $\mathrm{supp}(g)$ rovna jedné.

Důkaz:

- $\eta(\vec{y})$ gengeruje regulární distribuci $\tilde{\eta}$
- navíc $\tilde{\eta} \cdot \tilde{g} = \tilde{g}$ a $H = H^0 \subset \mathrm{supp}(\tilde{g})$
- pro $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(H)$ lze psát:

$$\big(\tilde{\eta} \cdot \tilde{g}; \varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{g}; \tilde{\eta}(\vec{x}) \cdot \varphi(\vec{x})\big) = \left| \begin{array}{c} \text{na H} \\ \eta(\vec{x}) = 1 \end{array} \right| = \big(\tilde{g}; \varphi(\vec{x})\big) \Rightarrow \tilde{\eta} \cdot \tilde{g} = \tilde{g},$$

  kde $\tilde{\eta}(\vec{x})$ ve druhém kroku rovnosti figuruje jako generátor

- dále, $G = G^0 \subset \mathbf{E}^r \backslash \mathrm{supp}(\tilde{g})$

$$\big(\tilde{\eta} \cdot \tilde{g}; \varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{g}; \tilde{\eta}(\vec{x}) \cdot \varphi(\vec{x})\big) = |\text{na G}| = 0 = \big(\tilde{g}; \varphi(\vec{x})\big)$$

- od jistého indexu $k_0 \in \mathbf{N}$ platí rovnost

$$\eta_k(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \eta(\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \eta(\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x}+\vec{y})$$

- a dále

$$\big(\tilde{f} \star \tilde{g}; \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \eta_k(\vec{x},\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big) = \lim_{k\to\infty} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}) \cdot \eta(\vec{y}); \eta_k(\vec{x},\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)\Big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); \eta(\vec{y}) \cdot \eta_k(\vec{x},\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)\Big) = \Big(\tilde{f}(\vec{x}); \big(\tilde{g}(\vec{y}); \eta(\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)\Big) = \big(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big),$$

- kde v předposledním členu rovnosti je $\eta(\vec{y}) \cdot \varphi(\vec{x}+\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{2r})$.

7.23 Věta

Nechť $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$. Pak existuje konvoluce $\tilde{f} \star \tilde{g} \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ a pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí

$$\big(\tilde{f} \star \tilde{g}; \varphi(x)\big) = \big(\tilde{f}(x) \otimes \tilde{g}(y); \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)\big),$$

kde $\eta_1(x)$, resp. $\eta_2(y)$ jsou libovolné funkce třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, které jsou na intervalu $\langle 0, \infty)$ rovny jedné a existuje pro ně $\mathtt{K} < 0$ tak, že platí implikace

$$x < \mathtt{K} \wedge y < \mathtt{K} \Rightarrow \eta_1(x) = \eta_2(y) = 0. \tag{7.32}$$

7.24 Věta

Na $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ je konvoluce komutativní.

Bez důkazu.

7.25 Věta – *o spojitosti konvoluce na* $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$

Konvoluce zobecněných funkcí je spojitá na $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ v obou argumentech, tj. pro libovolnou zobecněnou funkci $g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ a libovolnou posloupnost zobecněných funkcí $f_i \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$, která v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ konverguje k funkci $f \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$, platí rovnosti

$$\lim_{i\to\infty}(f_i \star g) \overset{\mathscr{D}'}{=} f \star g, \qquad \lim_{i\to\infty}(g \star f_i) \overset{\mathscr{D}'}{=} g \star f_i.$$

Důkaz:

- jedná se o důsledek věty 7.23, spojitosti tenzorového součinu (viz věta 7.10) a faktu, že funkce $\eta_1(x)$, $\eta_2(y)$ lze volit nezávisle na f_i
- nechť tedy $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost zobecněných funkcí, která v $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ konverguje k distribuci $f \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$
- nechť $\eta_1(x)$, resp. $\eta_2(y)$ jsou libovolné funkce třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, pro které existuje $\mathtt{K} < 0$ tak, že platí implikace (7.32)
- pro každou testovací funkci $\psi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí

$$\lim_{i\to\infty}\big(f_i(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\,\eta_2(y)\,\varphi(y+x)\big) = \\ = \lim_{i\to\infty}\big(f_i(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\,\eta_2(y)\,\varphi(y+x)\big) = \big(f(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\,\eta_2(y)\,\varphi(y+x)\big)$$

- proto $\lim_{i\to\infty}\big(f_i(x) \star g(x)\big) = f(x) \star g(x)$
- zbylá část, tedy fakt, že $\lim_{i\to\infty}\big(f(x) \star g_i(x)\big) = f(x) \star g(x)$, tvrzení plyne z komutativity konvoluce

7.26 Věta – *o asociativitě konvoluce na* $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$

Konvoluce v prostoru $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ je asociativní, tj. pro každé $f, g, h \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\big(f \star g\big) \star h = f \star \big(g \star h\big).$$

Důkaz:

- nechť je zvolena funkce $\eta(x)$ třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, která je na okolí intervalu $\langle 0, \infty)$ rovna jedné a existuje pro ni $\mathtt{K} < 0$ tak, že pro $x < \mathtt{K}$ je $\eta(x) = 0$
- podle věty 7.23 tedy

$$\big(f \star (g \star h), \varphi(x)\big) = \big(f(x)\otimes(g \star h)(y), \eta(x)\eta(y)\,\varphi(x+y)\big) = \Big((g \star h)(y), \big(f(x), \eta(x)\eta(y)\,\varphi(x+y)\big)\Big) = \\ = \Big(g(y)\otimes h(z), \eta(y)\eta(z)\big(f(x), \eta(x)\eta(y+z)\,\varphi(x+y+z)\big)\Big) = \\ = \Big(\big(g(y)\otimes h(z)\big)\otimes f(x), \eta(x)\eta(y)\eta(z)\eta(y+z)\varphi(x+y+z)\Big)$$

- protože $\operatorname{supp}(g) \subset \langle 0, \infty)$ a také $\operatorname{supp}(h) \subset \langle 0, \infty)$, platí rovnost

$$\big(g(y)\otimes h(z)\big)\eta(y)\eta(z)\eta(y+z) = \big(g(y)\otimes h(z)\big)\eta(y)\eta(z)$$

- proto (při použití komutativity tenzorového součinu)

$$\big(f \star (g \star h), \varphi(x)\big) = \Big(f(x)\otimes\big(g(y)\otimes h(z)\big), \eta(x)\eta(y)\eta(z)\varphi(x+y+z)\Big)$$

- odsud již lehce vyvozujeme, že asociativita konvoluce na $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ je bezprostředním důsledkem asociativity tenzorového součinu

8 Laplaceova transformace

8.1 Poznámka

Laplaceovou transformací budeme rozumět integrální operaci, která vhodné funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ přiřazuje funkci

$$F(p) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \mathtt{e}^{-pt} \, \mathtt{d}t,$$

popř. vícerozměrné funkci $f(\vec{t}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ přiřazuje funkci

$$F(\vec{p}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{t}) \cdot \mathtt{e}^{-\vec{p}\vec{t}} \, \mathtt{d}t.$$

Symbol $\vec{p}\vec{t}$ přitom chápeme jako standardní skalární součin. Před samotnou definicí Laplaceovy transformace je ale nejprve nutno vymezit třídu funkcí, pro něž bude Laplaceův obraz $F(\vec{p})$ existovat. To bude námětem dalšího textu.

8.2 Definice

Funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme funkcí *exponenciálního růstu,* existují-li $\mathtt{K} > 0$, $t_0 \geqslant 0$ a $\alpha \in \mathbf{R}_0^+$ taková, že pro skoro všechna $t > t_0$ platí nerovnost

$$|f(t)| \leqslant \mathtt{K}\, \mathtt{e}^{\alpha t}.$$

Infimum množiny všech takových α pak nazýváme *indexem růstu* funkce $f(t)$ a značíme $\mathrm{ind}(f)$.

8.3 Definice

O funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ řekneme, že patří do třídy $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ a zapíšeme $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, jestliže je

- rovna nule pro všechna $t < 0$,
- exponeciálního růstu,
- po částech spojitá na $\langle 0, +\infty)$.

Třídu $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ nazýváme *Laplaceovým prostorem* a její prvky nazýváme *(Laplaceovy) vzory standardního typu.*

8.4 Věta

Nechť $f(x) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $\mathrm{ind}(f) = \beta$, potom integrál

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) \mathtt{e}^{-px} \mathtt{d}x$$

existuje pro všechna p z intervalu $(\beta, +\infty)$.

Důkaz:

- platí, že
$$\int_{\mathbf{R}} f(x) \mathtt{e}^{-px} \mathtt{d}x = \int_0^{\infty} f(x) \mathtt{e}^{-px} \mathtt{d}x$$
- integrand můžeme omezit
$$\left| f(x) \mathtt{e}^{-px} \right| \leqslant \mathtt{K} \mathtt{e}^{-(p-\alpha)x}$$
- pokud platí, že $(p - \alpha) > 0$, tak můžeme prohlásit tuto funkci za integrabilní majorantu, tj. $\mathtt{K}\mathtt{e}^{-(p-\alpha)x} \in \mathscr{L}(0, +\infty)$

8.5 Poznámka

Do třídy $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ patří triviálně funkce $f(t) = \Theta(t)\, \mathtt{e}^{at}$, $f(t) = c\,\Theta(t)$ a $f(t) = \Theta(t)\, t^q$, kde $a, c \in \mathbf{R}$ a $q \in \mathbf{Z}^+$.

8.6 Definice

Laplaceovou transformací rozumíme integrální operaci, která funkci $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ s indexem růstu $\operatorname{ind}(f)$ přiřazuje funkci

$$F(p) = \mathfrak{L}\big[f(t)\big] := \Theta\big(p - \operatorname{ind}(f)\big) \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t. \tag{8.33}$$

Funkci $F(p)$, pokud existuje, nazýváme *Laplaceovým obrazem* funkce $f(t)$. Funkci $f(t)$ nazýváme *vzorem pro Laplaceovu transformaci*. Výše uvedený vztah mezi vzorem a obrazem se nazývá *Laplaceovou korespondencí.*

8.7 Definice

O funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ řekneme, že patří do *třídy* $\mathscr{P}_+(\mathbf{R})$ a zapíšeme $f(t) \in \mathscr{P}_+(\mathbf{R})$, jestliže je

- rovna nule pro všechna $t < 0$,
- exponeciálního růstu,
- absolutně integrovatelná na každém uzavřeném intervalu $\langle 0, c \rangle$, kde $c > 0$.

Třídu $\mathscr{P}_+(\mathbf{R})$ nazýváme *rozšířeným Laplaceovým prostorem* a její prvky nazýváme *(Laplaceovy) vzory rozšířeného typu.*

8.8 Poznámka

Nechť $f(t),\, g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $c \in \mathbf{C}$. Pak $f(t) + c \cdot g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí

$$\mathfrak{L}\left[f(t) + c \cdot g(t)\right] = \mathfrak{L}\left[f(t)\right] + c\,\mathfrak{L}\left[g(t)\right].$$

<u>*Důkaz:*</u>

- jedná se o triviální důsledek linearity a homogenity Lebesgueova integrálu

17. přednáška (7.12.2015) - vlastnosti Laplaceovy transformace

8.9 Věta

Nechť $f(t),\ g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $c \in \mathbf{C}$. Pak $f(t) + c \cdot g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí

$$\mathfrak{L}\left[f(t) + c \cdot g(t)\right] = \mathfrak{L}\left[f(t)\right] + c\,\mathfrak{L}\left[g(t)\right].$$

Důkaz:

- jedná se o triviální důsledek linearity a homogenity Lebesgueova integrálu

8.10 Věta – o změně měřítka ve vzoru

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$. Nechť dále $c > 0$. Pak $f\,(c\,t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[f(c\,t)\right] = \frac{1}{c}\,F\left(\frac{p}{c}\right).$$

Důkaz:

- ukázat, že $f\,(ct) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, je velice jednoduché
- pro příslušný Laplaceův obraz dále platí

$$\mathfrak{L}\left[f(ct)\right] = \int_{\mathbf{R}} f(ct)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} s = c\,t \\ \mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \frac{1}{c}\int_{\mathbf{R}} f(s)\,\mathrm{e}^{-\frac{ps}{c}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\,F\left(\frac{p}{c}\right)$$

8.11 Věta – o obrazu derivace

Nechť $f(t),\ \dot{f}(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Pak platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right] = p\,\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - f(0_+). \tag{8.34}$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že platí následující série rovností

$$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right] = \int_{\mathbf{R}} \dot{f}(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{cc} u = \mathrm{e}^{-pt} & \dot{v} = \dot{f}(t) \\ \dot{u} = -p\,\mathrm{e}^{-pt} & v = f(t) \end{array}\right| =$$

$$= \left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{\infty} + p\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = p\,\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - f(0_+)$$

8.12 Věta – o derivaci obrazu

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $n \in \mathbf{N}$. Pak také $t^n f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n}. \tag{8.35}$$

Důkaz:

- umocněním nerovnosti $t < \mathrm{e}^t$ platné pro kladná t získáme pro $n \in \mathbf{N}$ nerovnost $t^n < \mathrm{e}^{nt}$
- jelikož $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, existují $\mathtt{K} > 0$ a $t_0 \leqslant 0$ taková, že
$$\forall t \in (t_0, +\infty): \quad |f(t)| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$$
- pak tedy také platí
$$\left|t^n f(t)\right| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{(\alpha+n)t}$$
- odtud $t^n f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- navíc podle věty o derivaci integrálu s parametrem je funkce $F(p) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ nekonečněkrát diferencovatelná
- dále pokračujeme matematickou indukcí
- jelikož pro $n = 0$ platí rovnost (8.35) triviálně, můžeme předpokládat, že vztah
$$\int_{\mathbf{R}} t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n} \tag{8.36}$$
platí pro jisté $n \in \mathbf{N}_0$
- dokážeme, že uvedený vztah platí také pro $n+1$
- zderivujeme-li vztah (8.36) podle p, dostaneme
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_{\mathbf{R}} t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^{n+1} F}{\mathrm{d}p^{n+1}}$$
- jelikož jsme již dokázali, že $t^n f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, existuje k funkci $t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}$ zcela jistě integrabilní majoranta nezávislá na p
- proto je v posledně uvedeném vztahu možno zaměnit znak derivace a integrálu
- tudíž platí
$$-\int_{\mathbf{R}} t^{n+1} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^{n+1} F}{\mathrm{d}p^{n+1}}$$
- tento vztah završuje prováděnou matematickou indukci

8.13 Věta - o posunutí ve vzoru

Nechť $f(t-\mu) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $\mu \in \mathbf{R}$. Potom platí $\mathfrak{L}[f(x-\mu)] = \mathrm{e}^{-s\mu}F(s)$.

Důkaz:

- z definice Laplaceovy transformace platí
$$\mathfrak{L}[f(x-\mu)] = \int_0^\infty f(x-\mu)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$$
- užitím substituce $y = x - \mu$ dostaneme rovnost
$$\int_0^\infty f(y)\mathrm{e}^{-s(y+\mu)}\mathrm{d}y$$
- to ale není nic jiného než $\mathrm{e}^{-s\mu}F(s)$ a důkaz je tedy završen

8.14 Věta – o integrálu vzoru

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$. Pak také $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- předpokládejme, že $f(t) \in \mathscr{P} \Rightarrow \Theta(t)\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathscr{P}$
- z toho

$$\left|\Theta(t)\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant x \cdot \sup_{\tau\in\mathbf{R}^+} |f(\tau)| \leqslant x \cdot \mathtt{K} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \leqslant \mathtt{K} \cdot \mathrm{e}^{(\alpha+1)x}$$

- z definice Laplaceovy transformace a po aplikaci metody per partes snadno vypočteme

$$p\,\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) p\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} u = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \dot{v} = p\,\mathrm{e}^{-pt} \\ \dot{u} = f(t) & v = -\mathrm{e}^{-pt}\end{array}\right| =$$

$$= -\left[\mathrm{e}^{-pt}\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]_0^\infty + \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathfrak{L}\left[f(t)\right] = F(p).$$

- tím je důkaz završen

8.15 Věta – o integrálu obrazu

Nechť $\frac{f(t)}{t} \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Pak také $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a označíme-li $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$, pak navíc

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť tedy $\frac{f(t)}{t} \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- pak tedy existují $\mathtt{K} > 0$, $t_0 > 0$ a $\alpha > 0$ takové, že pro všechna $t > t_0$ platí nerovnost

$$\left|\frac{f(t)}{t}\right| < \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$$

- odtud

$$|f(t)| < \mathtt{K}t\mathrm{e}^{\alpha t} < \mathtt{K}\,\mathrm{e}^{(\alpha+1)t},$$

  a funkce $f(t)$ tedy také do $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ patří
- potom lze ale snadno z Fubiniovy věty prokázat, že

$$\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q = \int_p^\infty\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-qt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}q = \int_{\mathbf{R}}\int_p^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-qt}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(t)\left[-\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-qt}\right]_p^\infty \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

8.16 Věta – o substituci v obrazu

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $a \in \mathbf{C}$. Potom

$$\mathfrak{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right] = F(p-a).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- není pravděpodobně obtížné prokázat pro $p > a$ následující rovnosti

$$\mathfrak{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right] = \int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(t)\mathrm{e}^{-(p-a)t}\,\mathrm{d}t = F(p-a)$$

8.17 Věta – o limitě obrazu

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a integrál $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. Potom platí

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0_+} F(p).$$

Důkaz:

- důkaz je založen na záměně limity a integrálu
- tato záměna je možná zejména kvůli tomu, že existuje majoranta k integrandu $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ nezávislá na p
- je jí dle předpokladů dokazované věty funkce $|f(t)|$, která je konvergentní na $\mathbf{R}$
- proto tedy

$$\lim_{p\to 0_+} F(p) = \lim_{p\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0_+} \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\big(\lim_{p\to 0} \mathrm{e}^{-pt}\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$$

8.18 Věta – o obrazu konvoluce

Nechť $f(t),\, g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Označme $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $G(p) = \mathfrak{L}[g(t)]$. Potom platí

$$\mathfrak{L}\big[(f \star g)(t)\big] = F(p)\cdot G(p).$$

Důkaz:

- nejprve dokážeme, že pro libovolné $f(t),\, g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ konvoluce $(f \star g)(t)$ existuje
- jelikož jsou obě funkce $f(t),\, g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ nulové na $(-\infty, 0)$, není na překážku, že nemusejí obecně na $\mathbf{R}$ být integrabilní
- protože platí rovnosti $f(t) = \Theta(t)f(t)$ a $g(t) = \Theta(t)g(t)$, lze při výpočtu konvoluce užít faktu, že

$$(f\star g)(t) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(s)\Theta(t-s)f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s = \Theta(t)\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s,$$

  což značí, že konvoluční integrál je fakticky konečný
- dále vzhledem k tomu, že integrand $f(s)g(t-s)$ je na intervalu $\langle 0, t\rangle$ po částech spojitý, integrál $\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s$ vždy existuje
- funkce $h(t) = \Theta(t)\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s$ je navíc po částech spojitá a na intervalu $(-\infty, 0)$ zjevně nulová
- z definice Laplaceova prostoru $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ víme, že existují α, β a $\mathtt{K}, \mathtt{M} > 0$ takové, že od určitého $t_0 \in \mathbf{R}$ platí nerovnosti $|f(t)| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$, resp. $|g(t)| \leqslant \mathtt{M}\mathrm{e}^{\beta t}$
- dále

$$\big|h(t)\big| = \big|(f\star g)(t)\big| = \left|\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant t\,\mathtt{KM}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{\beta t} \leqslant \mathtt{KM}\,\mathrm{e}^{(\alpha+\beta+1)t}$$

- tím je prokázáno, že $(f\star g)(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- dále

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\big[(f \star g)(t)\big] &= \int_{\mathbf{R}}\left[\int_{\mathbf{R}} f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(s)\left[\int_{\mathbf{R}} g(t-s)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s = \left|\begin{array}{c} t-s=u \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array}\right| = \int_{\mathbf{R}} f(s)\left[\int_{\mathbf{R}} g(u)\,\mathrm{e}^{-p(u+s)}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s = \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(s)\,\mathrm{e}^{-ps}\left[\int_{\mathbf{R}} g(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}} f(s)\,\mathrm{e}^{-ps}\mathrm{d}s\cdot\int_{\mathbf{R}} g(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u = \mathfrak{L}\left[f(t)\right]\cdot\mathfrak{L}\left[g(t)\right]
\end{aligned}$$

- upozorňujeme čtenáře, aby v prezentovaném výpočtu dobře promyslel, jakých tvrzení bylo užito a čím byla zaručena možnost jejich užití

8.19 Příklad

Spočítejme konvoluci $\Theta(x)\, x^n \star \Theta(x)\, x^m$ užitím vztahů z Laplaceova desatera. S využitím předchozí věty platí rovnosti

$$\Theta(x)\, x^n \star \Theta(x)\, x^m = \frac{n!\, m!}{p^{n+m+2}} = \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!} \frac{(n+m+1)!}{p^{n+m+2}}.$$

Využijeme-li vztahu $\mathfrak{L}\left[\Theta(x)\, x^k\right] = \frac{k!}{p^{k+1}}$, tak platí rovnost

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{n!\, m!}{(n+m+1)!} \frac{(n+m+1)!}{p^{n+m+2}}\right] = \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!}\, \Theta(x)\, x^{n+m+1} = \Theta(x)\, x^n \star \Theta(x)\, x^m.$$

8.20 Věta

Nechť $f(t),\ g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Označme $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $G(p) = \mathfrak{L}[g(t)]$. Nechť $f(t)\, G(t) \in \mathscr{L}(0; +\infty)$. Potom platí

$$\int_0^\infty f(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty F(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Důkaz:

- užijeme-li Fubiniovu větu a definici Laplaceovy transformace, získáme snadno sérii rovností

$$\int_0^\infty f(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(t) \int_{\mathbf{R}} g(s)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t)\, g(s)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}} g(s) \int_{\mathbf{R}} f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^\infty g(t)\, F(t)\, \mathrm{d}t.$$

8.21 Příklad

Řešme určitý integrál $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$. Efektivní způsob, jak zadaný integrál vypočítat, je užít vztah č. 10 z Laplaceova desatera. Jelikož platí korespondence

$$\mathfrak{L}\big[\Theta(x)\sin(x)\big] = \Theta(p)\frac{1}{1+p^2}, \quad \mathfrak{L}\big[\Theta(x)\big] = \frac{\Theta(p)}{p},$$

platí podle uvedeného pravidla rovnosti

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \Big[\operatorname{arctg}(x)\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

18. přednáška (8.12.2015) - Fourierova transformace, prostory $\mathscr{S}(\mathrm{E}^r)$ a $\mathscr{S}'(\mathrm{E}^r)$, Fourierovo desatero, zobecněná Fourierova transformace

9 Fourierova transformace

9.1 Poznámka

Budoucí definice Fourierovy transformace bude tvaru

$$\mathfrak{F}[f(\vec{x})] = F(\vec{\xi}) := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x}, \tag{9.37}$$

kde $\vec{x}\cdot\vec{\xi}$ představuje standardní skalární součin $\langle\vec{x}|\vec{\xi}\rangle$. Funkci $F(\vec{\xi})$, pokud existuje, nazýváme *Fourierovým obrazem* funkce $f(\vec{x})$. Funkci $f(x)$ nazýváme *vzorem pro Fourierovu transformaci*. Výše uvedený vztah mezi vzorem a obrazem se nazývá *Fourierovou korespondencí*. Hledáme třídu funkcí, pro které lze vztah (9.37) chápat jako definici Fourierovy transformace.

9.2 Příklad

Integrál $\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\, \mathrm{d}x$ nekonverguje, tedy e^x nemůže být Fourierovým vzorem pro klasickou Fourierovu transformaci.

9.3 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$ taková, že $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$. Pokud tato funkce zároveň splňuje podmínku

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r : \sup_{\vec{x}\in\mathbf{E}^r} |\vec{x}^\alpha \mathcal{D}^\beta f(\vec{x})| < +\infty,$$

tak řekneme, že je *funkcí pomalého růstu*. Funkce pomalého růstu tvoří *Schwartzův prostor* $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

9.4 Poznámka

Zkoumejme vazby mezi některými nám známými prostory:

$$(\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_1) \wedge (\mathscr{L}_1^+ \subset \mathscr{P}) \wedge (\mathscr{S}^+ \subset \mathscr{P}) \wedge (\mathscr{D} \subset \mathscr{S}),$$

kde symbolem $\mathscr{L}_1^+$ rozumíme lebesgueovsky integrabilní funkce s nosičem, jež je podmnožinou $\mathbf{R}^+$.

Důkaz:

- dokažme $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}_1$
- zkoumáme, platí-li implikace $f(\vec{x}) \in \mathscr{S} \Rightarrow \int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{x})|\, \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$
- rozepišme $\mathbf{E}^r$ jako sjednocení $\mathbf{E}^r = Q \uplus (\mathbf{E}^r \backslash Q)$, kde $Q = \bigtimes_{i=1}^{r} \langle -q; q\rangle$, $q > 0$
- z vlastností spojité funkce na kompaktu jistě $\int_Q |f(\vec{x})|\, \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$

- v množině $\vec{x} \in \mathbf{E}^r \backslash Q$ jistě platí $|x_1^2 x_2^2 \cdots x_r^2 \cdot f(\vec{x})| < \mathtt{K}$, kde $\alpha = (2, 2, \ldots, 2)$, $\beta = (0, 0, \ldots, 0)$
- pak lze psát

$$\int_{\mathbf{E}^r \backslash Q} |f(\vec{x})| \, \mathrm{d}\vec{x} \leqslant \int_{\mathbf{E}^r \backslash Q} \frac{\mathtt{K}}{x_1^2 x_2^2 \cdots x_r^2} \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_q^{+\infty} \int_q^{+\infty} \cdots \int_q^{+\infty} \frac{\mathtt{K}}{x_1^2 x_2^2 \cdots x_r^2} \, \mathrm{d}\vec{x} \cdot 2^r =$$
$$= 2^r \mathtt{K} \sum_{k=1}^{r} \int_q^{+\infty} \frac{1}{s^2} \, \mathrm{d}s = 2^r \mathtt{K} \left(\left[\frac{1}{s^2} \right]_q^r \right)^r = 2^r \mathtt{K} \frac{1}{q^r} \in \mathbf{R}.$$

9.5 Věta

Pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ nebo $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ existuje (konverguje) integrál

$$\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \, \mathrm{d}\vec{x}$$

pro všechna $\vec{\xi} \in \mathbf{E}^r$.

Důkaz:

$$|f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}}| = |f(\vec{x})| \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r).$$

9.6 Věta

Platí následující implikace: $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r) \Rightarrow F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})] \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- na cvičení

9.7 Poznámka

Podobná vlastnost pro $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ neplatí, a neplatí ani u Laplaceovy transformace. Jako příklad pro Fourierovu transformaci může posloužit funkce $f(x) = x \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$,

$$\mathfrak{F}[x] = \int_{\mathbf{R}} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \\ u' = 1 & v = (\mathrm{i}\xi)^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \end{array} \right| = \left[(\mathrm{i}\xi)^{-1} x \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} - (\mathrm{i}\xi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (\mathrm{i}\xi)^{-1} x \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} - \lim_{x \to -\infty} (\mathrm{i}\xi)^{-1} x \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} - \left[(\mathrm{i}\xi)^{-2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} =$$
$$= \infty - 0 - \lim_{x \to +\infty} (\mathrm{i}\xi)^{-2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} - \lim_{x \to -\infty} (\mathrm{i}\xi)^{-2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} = \infty - \infty + 0 = \text{neexistuje}.$$

9.8 Věta – o linearitě

Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $c \in \mathbf{C}$. Pak $f(\vec{x}) + c \cdot g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a platí

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}) + c \cdot g(\vec{x})\right] = \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right] + c\,\mathfrak{F}\left[g(\vec{x})\right].$$

Bez důkazu.

9.9 Věta – o změně měřítka ve vzoru

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$. Nechť dále $c \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Pak $f(c\,\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a platí rovnost

$$\mathfrak{F}[f(c\,\vec{x})] = \frac{1}{|c|^r} F\left(\frac{\vec{\xi}}{c}\right).$$

Důkaz:

- ukázat, že $f(c\,\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, je velice jednoduché
- pro příslušný Fourierův obraz dále platí

$$\mathfrak{F}\left[f(c\,\vec{x})\right] = \int_{\mathbf{E}^r} f(c\vec{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}} \, \mathrm{d}\vec{x} = \left| \begin{array}{c} \vec{y} = c\,\vec{x} \\ \mathrm{d}\vec{y} = |c|^r \mathrm{d}\vec{x} \end{array} \right| = \frac{1}{|c|^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{y}\frac{\vec{\xi}}{c}} \, \mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{|c|^r} F\left(\frac{\vec{\xi}}{c}\right).$$

9.10 Věta – o obrazu derivace

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Nechť $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ je libovolný multiindex. Pak platí rovnost

$$\mathfrak{F}\left[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\right] = (-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]. \tag{9.38}$$

Důkaz:

- dokazovanou rovnost nejprve prokážeme pro parciální derivaci podle vybrané proměnné x_k
- snadno nahlédneme, že platí následující série rovností

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\mathfrak{F}\left[\,\vec{\xi}\,\right] = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\,\mathtt{d}\vec{x} = \left|\begin{array}{c}\text{majoranta}\\ |f(\vec{x})| \in \mathscr{L}(\mathbf{E}^r)\end{array}\right| = \int_{\mathbf{E}^r} \mathtt{i}x_k f(\vec{x})\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\,\mathtt{d}\vec{x} = \mathfrak{F}\left[\mathtt{i}x_k f(\vec{x})\right].$$

- zde bylo užito metody per partes, Fubiniovy věty a faktu, že $\lim_{x_k\to\pm\infty} f(\vec{x}) = 0$
- dále lze analogickými postupy dokázat, že např.

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}\right] = (-\mathtt{i}\,\xi_k)(-\mathtt{i}\,\xi_\ell)\,\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]$$

- rekurentně jsme tedy dokázali, že pro jakýkoli multiindex platí rovnost $\mathfrak{F}\left[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\right] = (-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]$.

9.11 Věta – o derivaci obrazu

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ je libovolný multiindex. Pak také $(\mathtt{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E})$ a platí rovnost

$$\mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] = \mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x})\big]. \tag{9.39}$$

Důkaz:

- přesvědčit se o platnosti vztahu $(\mathtt{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E})$ je značně jednoduché
- rovnost (9.39) dokážeme induktivně
- stačí ukázat, že

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,\mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] = \mathfrak{F}\big[\mathtt{i}x_k f(\vec{x})\big]$$

- to je ale také snadné, a sice při použití věty o derivaci integrálu podle parametru
- derivujeme-li totiž definiční vztah

$$F(\vec{\xi}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\cdot \mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathtt{d}\vec{x}$$

  podle vybrané proměnné ξ_k, jsou na třídě $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ splněny předpoklady citované věty, a tudíž

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,F(\vec{\xi}) = \int_{\mathbf{E}^r}\frac{\partial}{\partial \xi_k} f(\vec{x})\cdot \mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathtt{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \mathtt{i}x_k f(\vec{x})\cdot \mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathtt{d}\vec{x} = \mathfrak{F}\big[\mathtt{i}x_k f(\vec{x})\big]$$

- dále snadno např.

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell}\,F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}x_k)(\mathtt{i}x_\ell)f(\vec{x})\big]$$

- zřejmá úvaha pak vede k důkazu celého tvrzení

9.12 Věta – o substituci v obrazu

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{C}$. Potom $\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a navíc

$$\mathfrak{F}\left[\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\right] = F(\vec{\xi} + \vec{\mu}).$$

Důkaz:

- fakt, že $\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je snadným důsledkem definice Schwartzova prostoru
- užijeme snadné úpravy

$$\mathfrak{F}\left[\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\right] = \int_{\mathbf{E}^r} \mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathtt{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{x}(\vec{\xi}+\vec{\mu})}\,\mathtt{d}\vec{x} = F(\vec{\xi} + \vec{\mu})$$

9.13 Věta – o substituci ve vzoru

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{C}$. Potom $f(\vec{x}-\vec{\mu}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a navíc

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}-\vec{\mu})\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}}\, F(\vec{\xi}). \tag{9.40}$$

Důkaz:

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}-\vec{\mu})\right] = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}-\vec{\mu})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{y}+\vec{\mu})\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{y}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}}\, F(\vec{\xi}).$$

9.14 Věta – o obrazu konvoluce

Nechť $f(\vec{x}),\ g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Označme $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $G(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[g(\vec{x})]$. Potom platí

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}) \star g(\vec{x})\right] = F(\vec{\xi}) \cdot G(\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- důkaz provedeme sérií následujících úprav
- využijeme při něm Fubiniovu větu a větu o substituci ve vícerozměrných integrálech

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}) \star g(\vec{x})\right] &= \int_{\mathbf{E}^r} \left[\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x} = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{s}\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}\vec{s} = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \left[\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \left| \begin{array}{c} \vec{x}-\vec{s}=\vec{u} \\ \mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}\vec{u} \end{array} \right| = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \left[\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{u})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{u}+\vec{s})\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{u}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{s}} \left[\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{u})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{u}}\,\mathrm{d}\vec{u}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{s}}\mathrm{d}\vec{s} \cdot \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{u})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{u}}\,\mathrm{d}\vec{u} = \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right] \cdot \mathfrak{F}\left[g(\vec{x})\right]
\end{aligned}$$

- opět doporučujeme čtenáři, aby v prezentovaném výpočtu dobře promyslel, čím byla zaručena možnost užití citovaných vět

9.15 Věta

Nechť $f(x),\ g(x) \in \mathscr{S}(R)$. Označme $F(p) = \mathfrak{F}[f(x)]$ a $G(p) = \mathfrak{F}[g(x)]$. Potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, G(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz:

- protože $f(x),\ g(x) \in \mathscr{S} \subset \mathscr{L}_1$, integrály funkcí $f(x),\ g(x)$ existují
- užijeme-li Fubiniovu větu a definici Fourierovy transformace, získáme snadno sérii rovností

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\, G(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x) \int_{\mathbf{R}} g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(x)\, g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} g(\xi) \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} g(x)\, F(x)\,\mathrm{d}x.$$

9.16 Definice – *prostor temperovaných distribucí*

Třídu všech lineárních a spojitých funkcionálů vystavěných nad Schwartzovým prostorem značíme $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a nazýváme *prostorem temperovaných distribucí*, formálně

$$\tilde{f} \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r) : (\tilde{f}; \varphi(\vec{x})) \in \mathbf{C};\ \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$$

9.17 Poznámka

Platí $\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{S}' \subsetneq \mathscr{D}'$, jak ilustruje následující příklad: $\mathrm{e}^{x^2} \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}} \Rightarrow \mathrm{e}^{x^2} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R});\ \mathrm{e}^{x^2} \notin \mathscr{S}'$ A dále $\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, kde za $\varphi(x)$ dosadíme $\mathrm{e}^{-x^2} \in \mathscr{S};\ \mathrm{e}^{-x^2} \notin \mathscr{D}$.

9.18 Poznámka

Nechť $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ jsou regulární temperované distribuce generované funkcemi $\varphi(\vec{x})$ resp. $\psi(\vec{x})$. Pak platí

$$\Big(\widetilde{\mathfrak{F}[\varphi]};\ \psi(\vec{x})\Big) = \Big(\widetilde{\varphi};\ \mathfrak{F}[\psi(\vec{x})]\Big).$$

Důkaz:

$$\Big(\widetilde{\mathfrak{F}[\varphi]};\ \psi(\vec{x})\Big) = \int_{\mathbf{E}^r} \mathfrak{F}[\varphi(\vec{\xi})](\vec{x}) \cdot \psi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = |\ \text{věta 9.15}\ | = \int_{\mathbf{E}^r} \varphi(\vec{\xi}) \cdot \mathfrak{F}[\psi(\vec{x})](\vec{\xi})\,\mathrm{d}\vec{\xi} = \Big(\widetilde{\varphi};\ \mathfrak{F}[\psi(\vec{x})](\vec{\xi})\Big)$$

- výše uvedený výpočet probíhá celý v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$, $\mathfrak{F}[\psi(\vec{x})](\vec{\xi}) \in \mathscr{S}$

9.19 Definice

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ je temperovaná zobecněná funkce. Existuje-li na třídě $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ testovacích funkcí $\varphi(\vec{x})$ funkcionál $\big(f, \mathfrak{F}[\varphi(\vec{x})]\big)$, pak *Fourierovým obrazem distribuce* $f(\vec{x})$ budeme rozumět distribuci $F(\vec{\xi})$, pro níž platí rovnost

$$\big(F(\vec{\xi}), \varphi(\vec{\xi})\big) := \Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big). \tag{9.41}$$

19. přednáška (14.12.2015) - věta o inverzi, zobecněné desatero, věta o spojitosti

9.20 Věta – *o inverzi*

Pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí, že $\mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}^\star\left[\varphi(\vec{x})\right]\right] = (2\pi)^r \varphi(\vec{x})$.

<u>*Důkaz:*</u>

- výjdeme z definice Fourierovy transformace a obdržíme rovnosti

$$\mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}^\star\left[\varphi(\vec{x})\right]\right] = \int_{\mathbf{E}^r} \mathfrak{F}^\star\left[\varphi(\vec{x})\right](\vec{y})\mathrm{e}^{i\vec{\xi}\vec{y}}\mathrm{d}\vec{y} = \int_{\mathbf{E}^r}\left(\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{x})\mathrm{e}^{i\vec{x}\vec{y}}\mathrm{d}\vec{x}\right)^\star \mathrm{e}^{i\vec{\xi}\vec{y}}\mathrm{d}\vec{y} = \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{x})\mathrm{e}^{i\vec{y}(\vec{\xi}-\vec{x})}\mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}\vec{y}$$

- substitucí $\vec{z} = \vec{\xi} - \vec{x}$ získáme

$$\int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{\xi}-\vec{z})\mathrm{e}^{i\vec{y}\vec{z}}\mathrm{d}\vec{z}\mathrm{d}\vec{y} = \int_{\mathbf{E}^r}\mathfrak{F}\left[\varphi(\vec{\xi}-\vec{z})\right](\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = \left(1, \mathfrak{F}\left[\varphi(\vec{\xi}-\vec{z})\right]\right) = \left(\mathfrak{F}\left[1\right], \varphi(\vec{\xi}-\vec{z})\right)$$

- ze znalosti Fourierova obrazu jedničky $\mathfrak{F}\left[1\right] = (2\pi)^r\delta(\vec{\xi})$ přímo plyne dokazované tvrzení, tedy to, že

$$\left(\mathfrak{F}\left[1\right], \varphi(\vec{\xi}-\vec{z})\right) = \left((2\pi)^r\delta(\vec{z}), \varphi(\vec{\xi}-\vec{z})\right) = (2\pi)^r\varphi(\vec{\xi})$$

9.21 Důsledek

Platí, že

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^\star = (2\pi)^r\mathrm{id} \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^r}\,\mathfrak{F}^\star,$$

z čehož plyne rovnost

$$\mathfrak{F}^{-1}\big[\varphi(\vec{x})\big] = \frac{1}{(2\pi)^r}\,\mathfrak{F}\big[\varphi(-\vec{x})\big].$$

9.22 Věta

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a libovolný multiindex α. Pak platí

$$\mathcal{D}^\alpha_{\vec{\xi}}\big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})]\big)(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}\big[(\mathrm{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- vezmeme libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- užijeme-li klasický vztah (9.38), dostáváme

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{\vec{\xi}}\big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})](\vec{\xi})\big), \varphi(\vec{\xi})\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(\mathfrak{F}[f(\vec{x})](\vec{\xi}), \mathcal{D}^\alpha_{\vec{\xi}}\big(\varphi(\vec{\xi})\big)\right) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\left(f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\mathcal{D}^\alpha_{\vec{\xi}}\big(\varphi(\vec{\xi})\big)\big](\vec{x})\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(f(\vec{x}), (-\mathrm{i}\vec{x})^\alpha\,\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\right) =$$
$$= \left((\mathrm{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\right) = \left(\mathfrak{F}\big[(\mathrm{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}), \varphi(\vec{\xi})\right).$$

9.23 Věta

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a libovolný multiindex α. Pak platí

$$\mathfrak{F}\big[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}) = (-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- vezmeme opět libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- a užijeme klasický vztah (9.39)
- pak dostáváme

$$\Big(\mathfrak{F}\big[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}), \varphi(\vec{\xi})\Big) = \Big(\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x}), \mathcal{D}^\alpha\big(\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\big)\Big) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(\mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi}), (\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \varphi(\vec{\xi})\Big) =$$
$$= \Big((-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi})\,,\, \varphi(\vec{\xi})\Big)$$

9.24 Věta - *o Fourierově inverzi*

Mějme funkci $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Potom platí $\mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}^\star\big[f(\vec{x})\big]\big] = (2\pi)^r f(\vec{x})$.

Důkaz:

- platí rovnosti

$$\Big(\mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}^\star\big[f(\vec{x})\big]\big], \varphi(\vec{\xi})\Big) = \Big(\mathfrak{F}^\star\big[(f\vec{x})\big], \mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{y})\Big) = \Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}^\star\big[\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big]\big](\vec{x})\Big)$$

- s přihlédnutím k větě 9.20 dostáváme

$$\Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}^\star\big[\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big]\big](\vec{x})\Big) = (f(\vec{x}), (2\pi)^r\varphi(\vec{x})) = ((2\pi)^r f(\vec{x}), \varphi(\vec{x}))$$

- tím je důkaz dokončen

9.25 Poznámka

Čtenář se může samostatně přesvědčit o rozšířené platnosti dalších vztahů z Fourierova desatera. Jejich platnost se přenáší podobně jako v předešlých větách z $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ na $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Například

$$\mathfrak{F}\left[f(c\,\vec{x})\right] = \frac{1}{|c|^n}\,\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]\left(\frac{\vec{\xi}}{c}\right), \quad \mathfrak{F}\left[f(\vec{x}-\vec{\mu})\right] = \mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{\xi}}\,\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right], \quad \mathfrak{F}\left[\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\right] = \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right](\vec{\xi}+\vec{\mu}).$$

9.26 Věta – *o spojitosti Fourierovy transformace*

Nechť v prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ platí, že $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k = \tilde{f}$. Potom $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{F}\big[\tilde{f}_k\big] = \mathfrak{F}\big[\tilde{f}\big]$.

Důkaz:

- ze znalosti příslušných operací v prostoru zobecněných funkcí plynou rovnosti

$$\Big(\lim_{k\to\infty} \mathfrak{F}\big[\tilde{f}_k\big], \varphi(\vec{\xi})\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(\mathfrak{F}\big[\tilde{f}_k\big], \varphi(\vec{\xi})\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(\tilde{f}_k, \mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big) = \Big(\tilde{f}, \mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big)$$

- což není nic jiného než $\Big(\mathfrak{F}\big[\tilde{f}\big], \varphi(\vec{\xi})\Big)$

9.27 Příklad

Hledejme v rámci tohoto příkladu Fourierův obraz singulární distribuce $\delta(x-c)$, kde $c \in \mathbf{R}$. Z definice vyplývá

$$\big(\mathfrak{F}[\delta(x-c)], \varphi(\xi)\big) = \left(\delta(x-c), \int_{\mathbf{R}} \varphi(\xi)\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}x\xi}\,\mathtt{d}\xi\right) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(\xi)\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}\xi c}\,\mathtt{d}\xi = \big(\mathtt{e}^{\mathtt{i}\xi c}, \varphi(\xi)\big)$$

a tudíž $\mathfrak{F}[\delta(x-c)] = \mathtt{e}^{\mathtt{i}c\xi}$, speciálně $\mathfrak{F}[\delta(x)] = 1$.

9.28 Příklad

Zjistěme čemu se rovná Fourierův obraz derivace Diracovy delta funkce $\mathfrak{F}\big[\delta^{(n)}(x)\big]$.

$$\Big(\mathfrak{F}\big[\delta^{(n)}(x)\big], \varphi(\xi)\Big) = \Big(\delta^{(n)}(x), \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right]\Big) = (-1)^n \left(\delta(x), \left(\int_{\mathbf{R}} \varphi(\xi) \mathtt{e}^{i\xi x} \mathtt{d}\xi\right)^{(n)}\right) = (-1)^n \int_{\mathbf{R}} \varphi(\xi)(i\xi)^n \mathtt{d}\xi =$$

$$= ((-i\xi)^n, \varphi(\xi)) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{F}\big[\delta^{(n)}(x)\big] = (-i\xi)^n$$

9.29 Příklad

Řešme rovnici $x^n f(x) = 0$ v prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Po aplikaci Fourierovy transformace a vynásobení celé rovnice číslem $\mathtt{i}^n$ dostaneme

$$\mathtt{i}^n \mathfrak{F}\big[x^n f(x)\big] = 0.$$

Odtud dostáváme (s využitím Fourierova desatera) vztah

$$\mathcal{D}^n \mathfrak{F}\big[x^n f(x)\big] = \mathcal{D}^n F(\xi) = 0.$$

Řešením takové rovnice je (s použitím znalostí z MAB3)

$$F(\xi) = \mathtt{C}_0 + \mathtt{C}_1 \xi + \mathtt{C}_2 \xi^2 \ldots \mathtt{C}_{n-1} \xi^{n-1}.$$

Po aplikaci inverzní Fourierovy transformace dostáváme konečné řešení

$$f(x) = \mathtt{K}_0\, \delta(x) + \mathtt{K}_2\, \delta'(x) + \mathtt{K}_2\, \delta''(x) \ldots \mathtt{K}_{n-1}\, \delta^{(n-1)}(x).$$

20. přednáška (15.12.2015) - aplikace $\mathfrak{F}$, klasické a zobecněné řešení PDE, fundamentální řešení operátoru s KK

9.30 Příklad

Hledejme Fourierův obraz funkce $f(x) = \mathtt{e}^{-a\|\vec{x}\|^2}$, o které víme, že je z $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Snadno

$$\mathfrak{F}\Big[\mathtt{e}^{-a\|\vec{x}\|^2}\Big] = \int_{\mathbf{E}^r} \mathtt{e}^{-a\|\vec{x}\|^2}\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}\vec{\xi}\cdot\vec{x}}\,\mathtt{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\prod_{k=1}^{r} \mathtt{e}^{-ax_k^2}\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}x_k\xi_k}\right)\mathtt{d}\vec{x} = \prod_{k=1}^{r}\int_{\mathbf{R}} \mathtt{e}^{-ax^2}\,\mathtt{e}^{\mathtt{i}x\xi_k}\,\mathtt{d}x = |\text{ lichost integrandu }| =$$
$$= \prod_{k=1}^{r}\int_{\mathbf{R}} \mathtt{e}^{-ax^2}\cos(\xi_k x)\,\mathtt{d}x = \prod_{k=1}^{r} 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{1}{2}\,\mathtt{e}^{-\frac{\xi_k^2}{4a}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{r/2}\mathtt{e}^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4a}}.$$

9.31 Příklad

Hledejme Fourierův obraz $r-$dimenzionální funkce $f(\vec{x}) = 1$. Podotýkáme, že v důkazu nelze užít vztahu pro Fourierovu inverzi. Ten byl totiž odvozen právě pomocí vztahu $\mathfrak{F}[1] = (2\pi)^r\delta(\vec{\xi})$, který teď dokazujeme. Poměrně snadno se můžeme přesvědčit, že platí rovnosti

$$\mathfrak{F}[1'] = \mathfrak{F}[0] = 0 \quad\wedge\quad \mathfrak{F}[1'] = -\mathtt{i}\xi\mathfrak{F}[1].$$

Odsud získáváme rovnici $-\mathtt{i}\xi\mathfrak{F}\big[1\big] = 0$, ze které dále plyne $\xi\cdot F(\xi) = 0$ a následně systém funkcí $F(\xi) = \mathtt{C}\,\delta(\xi) \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Z toho tedy $\mathfrak{F}\big[1\big] = \mathtt{C}\,\delta(\xi)$ pro jisté $\mathtt{C} \in \mathbf{C}$. Zbývá tedy konstantu $\mathtt{C}$ kalibrovat. Počítejme hodnotu funcionálu $\big(\mathfrak{F}[1], \mathtt{e}^{-\|\vec{x}\|^2}\big)$. Pro ni platí

$$\left(\mathfrak{F}[1], \mathtt{e}^{-\|\vec{x}\|^2}\right) = \left(1, \mathfrak{F}\Big[\mathtt{e}^{-\|\vec{x}\|^2}\Big]\right) = \int_{\mathbf{E}^r}\mathfrak{F}\Big[\mathtt{e}^{-\|\vec{x}\|^2}\Big]\mathtt{d}\vec{\xi} = \int_{\mathbf{E}^r}\pi^{r/2}\,\mathtt{e}^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4}}\,\mathtt{d}\vec{\xi} =$$
$$= (\sqrt{\pi})^r\int_{\mathbf{R}}\mathtt{e}^{-\frac{\tau^2}{4}}\,\mathtt{d}\tau = (\sqrt{\pi})^r(2\sqrt{\pi})^r = (2\pi)^r.$$

A protože $\big(\mathtt{C}\,\delta(\vec{x}), \mathtt{e}^{-\|\vec{x}\|^2}\big) = \mathtt{C}$, plyne z uvedených vztahů $\mathtt{C} = (2\pi)^r$, z čehož obdržíme finální vztah $\mathfrak{F}\big[1\big] = (2\pi)^r\delta\big(\vec{\xi}\big)$.

10 Řešení parciálních diferenciálních rovnic

V následujícím výkladu se budeme věnovat řešení PDE. Rovnici lze kompaktně zapsat pomocí diferenciálního operátoru $\hat{L} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\vec{x})\mathcal{D}^\alpha$, kde $\alpha(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$, předpisem

$$\hat{L}u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

kde $f(\vec{x})$ je spojitá funkce a $\mathrm{Dom}(\hat{L}) \in \mathscr{C}^m(G)$. Tento předpis lze přeložit do jazyka zobecněných funkcí v podobě

$$\hat{L}\tilde{u} = \tilde{f}$$

v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, respektive v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$, kde uvažujeme $a_\alpha(\vec{x}) = a_\alpha \in \mathbf{R}$ pro všechna α. Řešením takovéto rovnice je $\tilde{u} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, pokud $\forall\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Platí,že $\big(\hat{L}\tilde{u}; \varphi(\vec{x})\big) = \big(\tilde{f}; \varphi(\vec{x})\big)$. Pokud najdeme řešení v reálném světě, pak toto lze interpretovat jako zobecněnou funkci. Pokud jsme ale našli řešení v zobecněném světě, musíme testovat, jestli toto má i svou interpretaci ve světě klasickém, tedy jestli není singulární nebo nehezky regulární.

10.1 Definice

Nechť je dán lineární diferenciální operátor $\hat{L} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\vec{x})\mathcal{D}^\alpha$ na G a nechť $a_\alpha(\vec{x})$ jsou jeho koeficienty. Řekneme, že $\hat{L}$ je diferenciální operátor s konstantními koeficienty, pokud pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ platí rovnosti $a_\alpha(\vec{x}) = a_\alpha \in \mathbf{R}$ na G.

10.2 Věta

Je-li $u(\vec{x})$ řešením klasické rovnice $\hat{L}u(\vec{x}) = f(\vec{x})$, $\tilde{u} \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ generovaná funkcí $u(\vec{x})$ a $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ generovaná funkcí $f(\vec{x})$, pak $\tilde{u}$ je řešením zobecněné rovnice $\hat{L}\tilde{u} = \tilde{f}$.

Důkaz:

- nechť platí rovnost $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$ chápaná klasicky
- pak platí pro operátor $\hat{L}$ s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned}\left(\hat{L}\tilde{u}, \varphi(\vec{x})\right) &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \mathcal{D}^\alpha \tilde{u}, \varphi(\vec{x})\right) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \left(\mathcal{D}^\alpha \tilde{u}, \varphi(\vec{x})\right) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \left(\tilde{u}, \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})\right) = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{E}^r} u(\vec{x}) \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \mathcal{D}^\alpha u\, \varphi(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \hat{L}\big(u(\vec{x})\big)\varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = \\ &\overset{❶}{=} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = \big(f, \varphi(\vec{x})\big)\end{aligned}$$

- v rovnosti výše jsme v bodě ❶ použili klasickou diferenciální rovnost z prvního bodu důkazu
- z výše uvedeného plyne, že $\hat{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ pro všechna $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

10.3 Věta

Nechť $\tilde{u}$ je zobecněné řešení rovnice $\hat{L}\tilde{u} = \tilde{f}$, kde $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ s generátorem rovným $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. Nechť $\tilde{u} \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ a navíc generátor této distribuce je $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^m(G)$. Pak $u(\vec{x})$ je klasickým řešením rovnice $\hat{L}u(\vec{x}) = f(\vec{x})$.

Důkaz:

- víme, že pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí:

$$\hat{L}\tilde{u} = \tilde{f} \Leftrightarrow \int_{\mathbf{E}^r} \hat{L}\big(u(\vec{x})\big)\varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} \Leftrightarrow \int_{\mathbf{E}^r} \Big(\hat{L}\big(u(\vec{x})\big) - f(\vec{x})\Big)\varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = 0$$

- to implikuje $\hat{L}\big(u(\vec{x})\big) - f(\vec{x}) \sim 0$
- jelikož je ale funkce $\hat{L}\big(u(\vec{x})\big) - f(\vec{x})$ spojitá, platí jistě, že $\hat{L}\big(u(\vec{x})\big) = f(\vec{x})$

10.4 Definice

Nechť $\hat{L}$ je lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty. Zobecněnou funkci $\mathscr{E}(\vec{x})$ nazveme *fundamentálním řešením operátoru* $\hat{L}$ na G, vyhovuje-li rovnici

$$\hat{L}\mathscr{E}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}). \tag{10.42}$$

10.5 Příklad

Nechť $a > 0$ je parametr. Pro funkci jedné proměnné operátoru s konstantními koeficienty hledejme fundamentální řešení operátoru

$$\hat{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a.$$

V tomto případě tedy řešíme tedy rovnici

$$\hat{L}\mathscr{E}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} + a\mathscr{E} = \delta(t).$$

Řešení pomocí Laplaceovy resp. Fourierovy transformace přejde vztahem $\mathfrak{L}[\mathscr{E}(t)] = E(s)$ resp. $\mathfrak{F}[\mathscr{E}(t)] = E(\xi)$ na

$$sE(s) + aE(s) = 1 \Rightarrow E(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{resp.} \quad -\mathtt{i}\xi E(\xi) + aE(\xi) = 1 \Rightarrow E(\xi) = \frac{1}{a - \mathtt{i}\xi}.$$

Odvoďme obrazy transformací praktičtěji ze vzorů za pomoci desatera:

$$\mathfrak{L}[\Theta(t)\mathtt{e}^{-at}] = \mathfrak{L}[\Theta(t)](s+a) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \mathscr{E}(t) = \Theta(t)\mathtt{e}^{-at}$$

$$\mathfrak{F}[\Theta(t)\mathtt{e}^{-at}] = \int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-at}\mathtt{e}^{\mathtt{i}\xi t}\,\mathtt{d}t = \int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-at}\cos(\xi t)\,\mathtt{d}t + \mathtt{i}\int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-at}\sin(\xi t)\,\mathtt{d}t =$$
$$= \frac{a}{a^2+\xi^2} + \mathtt{i}\frac{\xi}{a^2+\xi^2} = \frac{a+\mathtt{i}\xi}{a^2+\xi^2} = \frac{a+\mathtt{i}\xi}{(a+\mathtt{i}\xi)(a-\mathtt{i}\xi)} = \frac{1}{a-\mathtt{i}\xi} \Rightarrow \mathscr{E}(t) = \Theta(t)\mathtt{e}^{-at}$$

10.6 Příklad

Nechť $a > 0$ je parametr. Hledejme fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathtt{d}^2}{\mathtt{d}t^2} + a^2.$$

V tomto případě tedy řešíme tedy rovnici

$$\widehat{L}\mathscr{E}(t) = \frac{d^2\mathscr{E}}{\mathtt{d}t^2} + a^2\mathscr{E} = \delta(t).$$

Označíme-li opět $E(s) = \mathfrak{L}[\mathscr{E}(t)]$ Laplaceův obraz hledaného fundamentálního řešení, získáváme transformovanou rovnici

$$s^2E(s) + a^2E(s) = 1 \Rightarrow \frac{1}{s^2+a^2}.$$

Opět odvoďme z desatera

$$\mathfrak{L}[\Theta(x)\sin(\beta x)] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2},$$

odkud

$$E(s) = \frac{1}{a}\frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathscr{E}(t) = \frac{\Theta(t)}{a}\sin(at).$$

10.7 Příklad

Přistupme nyní k hledání fundamentálního řešení operátoru vedení tepla, obecně definovaným v $\mathbf{E}^{r+1}$ vztahem

$$\oslash_a := \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

kde $a > 0$. Řešme úlohu v prostoru $\mathbf{E}^{1+1}$. Tím se redukuje naše hledání na řešení rovnice

$$\oslash_a\mathscr{E}(x,t) = \frac{\partial\mathscr{E}(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2\mathscr{E}(x,t)}{\partial x^2} = \delta(x,t).$$

Nechť $E(\xi,t) = \mathfrak{F}_x[\mathscr{E}(x,t)]$, kde symbol $\mathfrak{F}_x$ představuje Fourierovu transformaci v prostorové proměnné x, kdy je na časovou proměnnou nahlíženo jako na parametr. Aplikujeme-li $\mathfrak{F}_x-$transformaci na výše uvedenou rovnici, získáváme poměrně snadno

$$\frac{\partial E(\xi,t)}{\partial t} + \xi^2a^2E(\xi,t) = \delta(t),$$

neboť

$$\mathfrak{F}_x[\delta(x,t)] = \mathfrak{F}_x[\delta(x)\otimes\delta(t)] = 1(\xi)\otimes\delta(t) = \delta(t).$$

Rovnici dále upravíme pomocí Laplaceovy transformace, tentokrát v proměnné t předpisem $\mathbb{E}(\xi,s) = \mathfrak{L}[E(\xi,t)]$:

$$\frac{\partial E(\xi,t)}{\partial t} + \xi^2a^2E(\xi,t) = \delta(t) \quad \Big|\mathfrak{L}_t$$
$$s\mathbb{E}(\xi,s) + a^2\xi^2\mathbb{E}(\xi,s) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(\xi,s) = \frac{1}{s+a^2\xi^2}.$$

Z předchozího příkladu

$$E(\xi,t) = \mathfrak{L}^{-1}[\mathbb{E}(\xi,s)] = \Theta(t)\,\mathsf{e}^{-a^2\xi^2 t}.$$

Užitím Fourierovy inverze pak odvodíme, že hledaným fundamentálním řešením je funkce

$$\mathscr{E}(x,t) = \mathfrak{F}_x^{-1}\Big[\Theta(t)\,\mathsf{e}^{-a^2\xi^2 t}\Big] = \Theta(t)\frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}_x^{-1}\big[\,\mathsf{e}^{-a^2\xi^2 t}\big] = \Theta(t)\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{\Theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

21. přednáška (21.12.2015) - operátory ve fyzice, převod Cauchyových úloh do $\mathscr{D}'$

10.8 Klasický diferenciální operátor $\widehat{L}$

Nechť $a_k \in \mathbf{R} \wedge a_m = 1 \wedge f(t) \in \mathscr{C}(G)$, pak operátor definovaný vztahem

$$\hat{L} = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$$

nazveme *klasickým diferecniálním operátorem*. Definiční obor takového operátoru je $\mathscr{C}^m(G)$. Řešíme-li konkrétní fyzikální úlohu tak řešíme rovnici

$$\hat{L}u(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{\mathrm{d}^k u(t)}{\mathrm{d}t^k} = f(t)$$

vyhovující zadaným podmínkám

$$\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t^k} u(0) = \beta_k, \quad \beta_k \in \mathbf{R}, \quad k \in \widehat{m-1}.$$

10.9 Rovnice vedení tepla v R^{n+1}

Příslušný diferenciální operátor nabývá tvaru

$$\oslash_a := \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

kde $a > 0, a \in \mathbf{R}$,. Definičním oborem je nyní $\mathscr{C}^2(G \times T)$, přičemž množina T odpovídá časové proměnné, a proto $T = (0, +\infty), G$ je oblast prostorových proměnných, na které úlohu řešíme. Konkrétní úloha bude tedy nabývat tvaru

$$\oslash_a u(\vec{x}, t) := \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t),$$

kde pravá strana $f(\vec{x}, t) \in \mathscr{C}(G \times T)$. Příslušná podmínka na řešení nabývá očekávaného tvaru $u(\vec{x}, 0) = \omega(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$.

10.10 Vlnová rovnice

Vlnový operátor je definován jako

$$\square_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

kde $a > 0, \mathrm{Dom}(\square_a) = \mathscr{C}^2(G \times T)$. Příslušná rovnice, tentokrát se dvěmi podmínkami, nabývá tvaru

$$\square_a u(\vec{x}, t) := \frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t),$$

$$u(\vec{x}, 0) = \omega_0(\vec{x}), \quad \frac{\partial u(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \omega_1(\vec{x}).$$

10.11 Dopravní rovnice

Dopravní operátor nabývá tvaru

$$\hat{B} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta + b,$$

kde $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$. Z toho plyne, že rovnice vedení tepla je speciální případ dopravní rovnice, kdy $b = 0$. Příslušná úloha, s podmínkou na řešení, je tvaru

$$\hat{B}u(\vec{x},t) = \frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} - a^2\Delta u(\vec{x},t) + b = f(\vec{x},t),$$
$$u(\vec{x},0) = \omega(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G) \wedge f(\vec{x},t) \in \mathscr{C}(G \times T).$$

10.12 Schrödingerova rovnice

Operátor této rovnice nabývá tvaru

$$\hat{S} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathtt{i}a^2\Delta,$$

kde opět klademe $a > 0$. Příslušná rovnice s očekávanou podmínkou jsou

$$\hat{S}u(\vec{x},t) = \frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} - \mathtt{i}a^2\Delta u(\vec{x},t) = f(\vec{x},t),$$

$$u(\vec{x},0) = \omega(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G) \wedge f(\vec{x},t) \in \mathscr{C}(G \times T).$$

Převod Cauchyovských úloh do $\mathscr{D}'$

Nechť $u(\vec{x},t)$ je klasické řešení PDE. Pro převod do $\mathscr{D}'$ bude použita substituce $w(\vec{x},t) = \Theta(t)u(\vec{x},t)$. Funkce $w(\vec{x},t)$ potom bude generátorem distribuce $\tilde{w}(\vec{x},t)$. Problém ovšem nastává pokud budeme chtít derivovat funkci $w(\vec{x},t) = \Theta(t)u(\vec{x},t)$, což chtít jistě budeme. Problém spočívá v tom, že funkce $u(\vec{x},t)$ nemusí náležet do $\mathscr{C}^\infty$, a tudíž nelze obecně derivovat podle Leibnitzova pravidla (tj. neplatí obecně, že $\dot{w}(\vec{x},t) = \delta(t)u(\vec{x},t) + \Theta(t)\frac{\partial u}{\partial t}$). Distribuce $\tilde{w}(\vec{x},t)$ bude regulární protože $\theta(t)u(\vec{x},t) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}$.

10.13 Poznámka

Odveďme vzorec pro derivování $w(\vec{x},t)$. Z předchozího textu víme, že platí rovnosti

$$\left(\frac{\partial w(\vec{x},t)}{\partial t}, \varphi(\vec{x},t)\right) = -\int_{\mathbf{E}^{r+1}} w\frac{\partial\varphi(\vec{x},t)}{\partial t}\mathtt{d}\vec{x}\mathtt{d}t = -\int_{\mathbf{E}^r}\int_0^\infty u(\vec{x},t)\frac{\partial\varphi(\vec{x},t)}{\partial t}\mathtt{d}t\mathtt{d}\vec{x}.$$

Dále aplikujeme metodu per partes a dostaneme

$$\int_{\mathbf{E}^r} u(\vec{x},0)\varphi(\vec{x},0)\mathtt{d}\vec{x} + \int_{\mathbf{E}^r}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}\varphi(\vec{x},t)\mathtt{d}t\mathtt{d}\vec{x},$$

což se ale dá přepsat jako

$$(u(\vec{x},0), (\delta(t), \varphi(\vec{x},t)) + (\Theta(t)\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi(\vec{x},t)) = (u(\vec{x},0) \otimes \delta(t) + \Theta(t)\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi(\vec{x},t)).$$

Hledaná derivace tedy bude

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \Theta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + u(\vec{x},0) \otimes \delta(t),$$

přičemž počáteční podmínky jsou automaticky zahrnuty ve výrazu $u(\vec{x},o)$.

10.14 Příklad

Převeďme do $\mathscr{D}'$ klasickou diferenciální rovnici $\hat{L}u(t) = f(t)$, tedy rovnici 10.8. Budeme potřebovat derivace funkce $w(\vec{x},t) = \Theta(t)u(\vec{x},t)$. Jak takovou funkci derivovat jsme odvodili v předchozí poznámce.

$$\dot{w}(\vec{x},t) = u(0) \otimes \delta(t) + \Theta(t)\dot{u}(t) = \beta_0\delta(t) + \Theta(t)\dot{u}(t)$$
$$\ddot{w}(\vec{x},t) = \beta_0\dot{\delta}(t) + \beta_1\delta(t) + \Theta(t)\ddot{u}(t)$$

$$w^{(k)} = \Theta(t)u^{(k)} + \beta_0\delta^{(k-1)}(t) + \beta_1\delta^{(k-2)}(t)\dots\beta_{k-1}\delta(t)$$

Znále-li tvary derivací tak je můžeme dosadit do rovnice $\widehat{L}w(t) = f(t)$.

$$\widehat{L}w(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k w^{(k)}(t) = \Theta(t)\sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k-1} \beta_\ell \delta^{k-1-\ell}$$

$$\widehat{L}w(t) = \Theta(t)\widehat{L}u(t) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \lambda_\ell \delta^{(\ell)} = \Theta(t)f(t) + \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_\ell \delta^{(\ell)}$$

Výsledný tvar rovnice v $\mathscr{D}'$ je tedy

$$\widehat{L}w(t) = \Theta(t)f(t) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \lambda_\ell \delta^{(\ell)},$$

přičemž počáteční podmínky jsou zahrnuty v λ_ℓ.

22. přednáška (22.12.2015) - převody Cauchyových úloh do $\mathscr{D}'$, základní věta o řešení PDE, sestavení vzorců pro řešení rovnic

10.15 Fundamentální řešení dopravní rovnice

Pro dopravní operátor $\widehat{B} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b$ v $\mathbf{R}^{1+1}$ řešme rovnici:

$$\begin{aligned} \widehat{B}\mathscr{E}(x,t) &= \delta(x,t) = \delta(x) \otimes \delta(t) \quad &&\Big| \mathfrak{L}_t \quad E(x,s) = \mathfrak{L}\left[\mathscr{E}(x,t)\right] \\ sE(x,s) - a^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x,s) + bE(x,s) &= \delta(x) \otimes 1(t) \quad &&\Big| \mathfrak{F}_x \quad \mathbb{E}(\xi,s) = \mathfrak{F}_x[E(x,s)] \\ s\mathbb{E}(\xi,s) - a^2(-\mathrm{i}\xi)^2\mathbb{E}(\xi,s) + b\mathbb{E}(\xi,s) &= 1 \\ \mathbb{E}(\xi,s) &= \frac{1}{s + a^2\xi^2 + b} \end{aligned}$$

Použijeme Laplaceovy obrazy posunutí $\mathfrak{L}[\Theta(t)\mathrm{e}^{-\omega t}] = \mathfrak{L}[\Theta(t)](s+\omega)$ a Heavisideovy funkce $\mathfrak{L}[\Theta(t)] = \frac{1}{s}$, jejichž kombinací dostáváme vztah $\mathfrak{L}[\Theta(t)\mathrm{e}^{-\omega t}] = \frac{1}{s+\omega}$, kde $\omega \in \mathbf{R}$. Budeme-li uvažovat substituci $\omega = a^2\xi^2 + b$, můžeme tento vztah použít pro získání vzoru $\mathfrak{L}^{-1}[\mathbb{E}(\xi,s)] = \Theta(t)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{-bt}$, a dále s použitím Fourierova desatera

$$\mathfrak{F}^{-1}[\Theta(t)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{-bt}] = \Theta(t)\mathrm{e}^{-bt}\frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}[\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}] = \Theta(t)\mathrm{e}^{-bt}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \Theta(t)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \mathscr{E}(x,t).$$

10.16 Převod Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla do $\mathscr{D}'$

Řešme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) - a^2\Delta u(\vec{x},t) = f(\vec{x},t),$$

s počátečními podmínkami $u(\vec{x},t) = \beta(\vec{x})$. Zavedeme substituci $w(\vec{x},t) := u(\vec{x},t) \cdot \Theta(t) \to \widetilde{w}(\vec{x},t)$. Pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}\Theta(t) + u(\vec{x},0) \otimes \delta(t) = \beta(\vec{x}) \otimes \delta(t) + \Theta(t)\frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x_k} &= \frac{\partial u}{\partial x_k}\Theta(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\Theta(t), \quad k \in \widehat{r}. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice

$$\oslash_a(\widetilde{w}) = \beta(\vec{x}) \otimes \delta(t) + \Theta(t)\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Theta(t)\Delta u(\vec{x},t) = \beta(\vec{x}) \otimes \delta(t) + \Theta(t)f(\vec{x},t),$$

čímž jsme obdrželi výsledný vztah

$$\oslash_a(w) = \beta(\vec{x}) \otimes \delta(t) + \Theta(t)f(\vec{x},t)$$

v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+1})$.

10.17 Převod Cauchyovy úlohy pro dopravní rovnici do $\mathscr{D}'(\mathrm{E}^{r+1})$

Obdobně jako v předchozím případě dostáváme

$$\widehat{B}w(\vec{x},t) = \frac{\partial w}{\partial t}(\vec{x},t) - a^2\Delta w(\vec{x},t) + bw(\vec{x},t) = \beta(\vec{x}) \otimes \delta(t) + \Theta(t)f(\vec{x},t).$$

10.18 Převod Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici do $\mathscr{D}'(\mathrm{E}^{r+1})$

Vlnová rovnice s počátečními podmínkami je rovnice tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t) - a^2\Delta u(\vec{x},t) &= f(\vec{x},t) \in \mathscr{C}(G\times T),\\ u(\vec{x},0) &= \beta_0(\vec{x}) \in \mathscr{C}^1(G),\\ \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) &= \beta_1 \in \mathscr{C}(G).\end{aligned}$$

Zavedeme substituci $w(\vec{x},t) = u(\vec{x},t)\cdot\Theta(t)$ a vyjádříme jednotlivé diferenciály

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}\Theta(t) + u(\vec{x},0)\otimes\delta(t) = \beta_0(\vec{x})\otimes\delta(t) + \Theta(t)\frac{\partial u}{\partial t},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \beta_0(\vec{x})\otimes\dot{\delta}(t) + \delta(t)\otimes\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) + \Theta(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta_0(\vec{x})\otimes\dot{\delta}(t) + \beta_1(\vec{x})\otimes\delta(t) + \Theta(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} &= \Theta(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.\end{aligned}$$

Vlnovou rovnici pak vyjádříme takto

$$\begin{aligned}\Box_a w(\vec{x},t) &= \beta_0(\vec{x})\otimes\dot{\delta}(t) + \beta_1(\vec{x})\otimes\delta(t) + \Theta(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Theta(t)\Delta u(\vec{x},t) = |\,\text{dosazení z klasické verze}\,|\\ &= \beta_0(\vec{x})\otimes\dot{\delta}(t) + \beta_1(\vec{x})\otimes\delta(t) + \Theta(t)\Box_a u(\vec{x},t) = \beta_0(\vec{x})\otimes\dot{\delta}(t) + \beta_1(\vec{x})\otimes\delta(t) + \Theta(t)f(\vec{x},t).\end{aligned}$$

10.19 Základní věta o řešení parciálních diferenciálních rovnic

Nechť $\mathscr{E}(\vec{x})$ je fundamentální řešení operátoru $\widehat{L}$ s konstantními koeficienty. Pak rovnice $\widehat{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ má ve třídě všech distribucí, pro které existuje konvoluce, právě jedno řešení, a sice $\tilde{u} = \tilde{\mathscr{E}} \star \tilde{f}$.

Důkaz:

- chceme ukázat $\widehat{L}\tilde{u} = \tilde{f}$:

$$\widehat{L}\tilde{u} = \widehat{L}(\tilde{\mathscr{E}}\star\tilde{f}) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \mathcal{D}^\alpha\big(\tilde{\mathscr{E}}\star\tilde{f}\big) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\big(\mathcal{D}^\alpha\tilde{\mathscr{E}}\star\tilde{f}\big) \overset{❶}{=} \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\mathcal{D}^\alpha\tilde{\mathscr{E}}\star\tilde{f} = \widehat{L}\big(\tilde{\mathscr{E}}\big)\star\tilde{f} = \tilde{\delta}\star\tilde{f} = \tilde{f},$$

  kde rovnost ❶ platí pouze pro operátor s konstantními koeficienty
- jednoznačnost $\widehat{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ je ekvivalentní prokázání faktu, že rovnice $\widehat{L}\tilde{u} = \tilde{0}$ má pouze jediné řešení
- vezmeme $\tilde{u}$ a předpokládáme, že řeší rovnici $\widehat{L}\tilde{u} = \tilde{0}$, potom

$$\tilde{u} = \tilde{u}\star\tilde{\delta} = \tilde{u}\star\widehat{L}\tilde{\mathscr{E}} = \tilde{u}\star\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\mathcal{D}^\alpha\tilde{\mathscr{E}} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\mathcal{D}^\alpha\tilde{u}\star\tilde{\mathscr{E}} = \widehat{L}\tilde{u}\star\tilde{\mathscr{E}} \overset{❷}{=} \tilde{0}\star\tilde{\mathscr{E}} = \tilde{0},$$

  kde v bodě ❷ jsme dosadili z rovnice $\widehat{L}\tilde{u} = \tilde{0}$.

10.20 Sestavení vzorce pro řešení rovnice vedení tepla

Pro rovnici $\widehat{L}u(x,t) = f(x,t)$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = \beta(x)$ se známým fundamentálním řešením

$$\mathscr{E}(x,t) = \Theta(t)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

píšeme

$$\begin{aligned}\oslash_a\big(\widetilde{w}(x,t)\big) &= \widetilde{\beta}(x)\otimes\widetilde{\delta}(t) + \Theta(t)\widetilde{f}(x,t),\\ \widetilde{w}(x,t) &= \underbrace{\mathscr{E}(x,t)\star\big[\widetilde{\beta}(x)\otimes\widetilde{\delta}(t)\big]}_{w_1(x,t)} + \underbrace{\mathscr{E}(x,t)\star\Theta(t)\widetilde{f}(x,t)}_{w_2(x,t)},\end{aligned}$$

kde $\mathscr{E}(x,t)$ a $\widetilde{f}(x,t)$ jsou elementy $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}$. Hledáme zobecněné řešení

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}(x,t) &= \int_{\mathbf{R}^2} \Theta(\tau)\cdot f(\xi,\tau)\mathscr{E}(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \Theta(\tau)\cdot f(\xi,\tau)\Theta(t-\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{\Theta(t)}{2a}\int_{\mathbf{R}}\int_0^t f(\xi,\tau)\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi = \Theta(t)u_2(x,t) \\
\widetilde{w_1}(x,t) &= \mathscr{E}(x,t)\star[\widetilde{\beta}(x)\otimes\widetilde{\delta}(t)] = \mathscr{E}(x,t)\star\widetilde{\beta}(x) = \int_{\mathbf{R}}\beta(\xi)\cdot\mathscr{E}(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{\Theta(t)}{2a}\int_{\mathbf{R}}\beta(\xi)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi = \Theta(t)u_1(x,t)
\end{aligned}$$

Klasické řešení obdržíme spojením zobecněných částí bez Heavisideovy funkce

$$u(x,t) = u_1(x,t)+u_2(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{\mathbf{R}}\int_0^t f(\xi,\tau)\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_{\mathbf{R}}\beta(\xi)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi.$$

10.21 Definice

Řekneme, že fuknce $f(\vec{x},t) : G\times T$, kde $T=(0,\infty)$ a $G\subset\mathbf{E}^r$, je *prostorově harmonická*, pokud pro všechna $t\in T$ platí, že $\Delta_{\vec{x}}f(\vec{x},t)=0$.

10.22 Příklad

Mějme rovnici vedení tepla (10.9) s příslušnou podmínkou $u(\vec{x},0)=\beta(\vec{x})$. Nechť $f(\vec{x},t)$ a $\beta(\vec{x})$ jsou prostorově harmonické funkce. Potom také $u(\vec{x},t)$ bude prostorově harmonická a platí

$$\oslash_a u(\vec{x},t) = \frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} - a^2\Delta u(\vec{x},t) = \frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} = f(\vec{x},t).$$

Řešením takové rovnice je jednoduše

$$u(\vec{x},t) = \int_0^t f(\vec{x},\tau)\mathrm{d}\tau + \omega(\vec{x}).$$

Ze zadané podmínky $u(\vec{x},0)=\beta(\vec{x})$ navíc plyne, že $\beta(\vec{x})=\omega(\vec{x})$.

10.23 Příklad

Mějme vlnovou rovnici (10.10) s podmínkami $u(\vec{x},0)=\beta_0(\vec{x})$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0)=\beta_1$. Nechť $\beta_0(\vec{x})$, $\beta_1(\vec{x})$ a $h(\vec{x})$ jsou prostorově harmonické funkce. Dále nechť $f(\vec{x},t)=h(\vec{x})g(t)$. Potom $u(\vec{x},t)$ je také harmonická a platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t) - a^2\Delta u(\vec{x},t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t) = f(\vec{x},t) = h(\vec{x})g(t).$$

Dále platí rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) = h(\vec{x})\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau + \omega_1(\vec{x}),$$

$$u(\vec{x},t) = h(\vec{x})\int_0^t\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + t\omega_1(\vec{x}) + \omega_0(\vec{x}).$$

Ze zadaných podmínek plyne, že $\omega_0(\vec{x})=\beta_0(\vec{x})$ a $\omega_1(\vec{x})=\beta_1(\vec{x})$. Řešení tedy nabývá tvaru

$$u(\vec{x},t) = h(\vec{x})\int_0^t\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + t\beta_1(\vec{x}) + \beta_0(\vec{x}).$$

Dvojný integrál v poslední rovnosti se dá ještě upravit pomocí vztahů z Laplaceova desatera.

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right] = \frac{1}{p}\mathfrak{L}\left[\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{p^2}\mathfrak{L}[g(t)] = \mathfrak{L}[t\Theta(t)]\mathfrak{L}[g(t)] = \mathfrak{L}[t\Theta(t)\star g(t)]$$

Zjistili jsme tedy, že

$$\int_0^t \int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s = \Theta(t)t \star g(t).$$

Řešení $u(\vec{x},t)$ tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$u(\vec{x},t) = \Theta(t)h(\vec{x}) \int_0^t (t-s)g(s)\mathrm{d}s + t\beta_1(\vec{x}) + \beta_0(\vec{x}).$$

10.24 Poznámka

Z výše uvedeného postupu plyne to, že konečně mnoho integrálů lze pomocí Laplaceovy transformace převést na jediný integrál - konvoluci.

Rejstřík

Literatura

[1] T. Hobza: *Matematická statistika,* http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼hobza/MAST/mast.pdf (2007)

[2] M. Krbálek: *Matematická analýza III (třetí přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2011

[3] M. Krbálek: *Matematická analýza IV (druhé přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2009

[4] M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2012

[5] M. Krbálek: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014