Tím dostaneme poslední bod $M_4 = [\frac{2}{3}; 4]$, který je podezřelý z extrému.
A protože $f(2,4) = 32$, $f(-2,4) = 32$, $f(0,0) = 0$ a $f(\frac{2}{3},4) = \frac{352}{27} < 32$, je největší hodnota funkce $f(x,y)$ na množině $\mathcal{M}$ rovna 32 a nejmenší je rovna 0.

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ na množině

$$\mathcal{M} = \{(x,y)\,;\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x+y \leq 6\}\,.$$

Řešení: Protože je funkce $f(x,y)$ spojitá na kompaktní, tj. omezené a uzavřené množině $\mathcal{M}$, nabývá na ní své nejmenší a největší hodnoty. Těchto hodnot může nabývat uvnitř množiny $\mathcal{M}$, tj. na množině $x > 0$, $y > 0$ a $x + y < 6$ nebo na její hranici.
Protože je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná, může na otevřené množině $\mathcal{M}^\circ$ nabývat extrémních hodnot pouze v bodech, kde je $\mathrm{d}f = 0$, tj. v bodech, kde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy(8-3x-2y) = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2(4-x-2y) = 0 \implies x = 2\,, \quad y = 1\,.$$

Tedy na vnitřku množiny $\mathcal{M}$ může extrém nastat pouze v bodě $M_0 = [2;1]$, kde je $f(2,1) = 4$.
Hranice množiny $\mathcal{M}$ se skládá ze tří otevřených úseček $y = 0$, $x \in (0,6)$, $x = 0$, $y \in (0,6)$ a $y = 6-x$, $x \in (0,6)$ a bodů $M_1 = [0;0]$, $M_2 = [6;0]$ a $M_3 = [0;6]$, kde $f(0,0) = f(6,0) = f(0,6) = 0$.
Na množinách $x = 0$ a $y = 0$ je funkce $f(x,y) = f(0,y) = f(x,0) = 0$. Na množině $y = 6-x$, $x \in (0,6)$, budeme hledat extrémy funkce $F(x) = f(x,6-x) = -2x^2(6-x)$, $x \in (0,6)$. Ty mohou být pouze v bodech, kde je

$$F'(x) = -24x + 6x^2 = 0 \implies x = 4\,.$$

Takto jsme získali bod $M_4 = [4;2]$. A protože $f(4,2) = -64$, nabývá funkce $f(x,y)$ na množině $\mathcal{M}$ největší hodnotu v bodě $M_0 = [2,1]$, $f(2,1) = 4$ a nejmenší hodnotu v bodě $M_4 = [4;2]$, kde je $f(4,2) = -64$.

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na množině

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y)\,;\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Řešení: Protože je funkce $f(x,y)$ spojitá na kompaktní, tj. omezené a uzavřené množině $\mathcal{M}$, nabývá na ní své nejmenší a největší hodnoty. Těchto hodnot může nabývat uvnitř množiny $\mathcal{M}$, tj. na množině $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $0 < y < \frac{1}{2}\pi$ a nebo na její hranici. Protože je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná, může na otevřené množině $\mathcal{M}^\circ$ nabývat extrémních hodnot pouze v bodech, kde je $\mathrm{d}f = 0$, tj. v bodech, kde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y) = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y) = 0\,.$$

Jestliže obě rovnice odečteme, dostaneme rovnici $\cos x - \cos y = 0$, která má na množině $\mathcal{M}$ jediné řešení $x = y$. Tedy pro x musí platit rovnice $\cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, která má pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ jediné řešení $x = \frac{1}{3}\pi$. Tedy uvnitř množiny $\mathcal{M}$ existuje jediný bod $M_0 = [\frac{1}{3}\pi; \frac{1}{3}\pi]$, ve kterém může mít funkce $f(x,y)$ extrém.
Hranice množiny $\mathcal{M}$ je tvořena čtyřmi otevřenými úsečkami $y = 0$, $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, $x = 0$, $y \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ a $x = \frac{1}{2}\pi$, $y \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ a čtyřmi vrcholy $V_1 = [0;0]$, $V_2 = [\frac{1}{2}\pi;0]$, $V_3 = [\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi]$ a $V_4 = [0; \frac{1}{2}\pi]$. Na úsečce $y = 0$ je funkce rovna $f(x,0) = 2\sin x$, která nemá pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ extrém. Podobně neexistuje extrém ani na otevřené úsečce $x = 0$, $y \in (0, \frac{1}{2}\pi)$. Na otevřené úsečce $y = \frac{1}{2}\pi$, $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, budeme zkoumat funkci

$$F(x) = f(x, \tfrac{1}{2}\pi) = \sin x + \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \sin x + \cos x\,.$$

$\vec{F}(x,y,z) = (xz^5;\ yz^5;\ xy^5) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = z^5 + z^5 = 2z^5$ ✓

9 bodů

$$\left.\begin{aligned} x &= a\rho \cos^{1/2}\vartheta \cos\varphi \\ y &= b\rho \cos^{1/2}\vartheta \sin\varphi \\ z &= c\rho \sin^{1/2}\vartheta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} &= 1 \\ (\rho^2\cos\vartheta)^2 + \rho^4\sin^2\vartheta &= 1 \\ \rho^4 &= 1 \\ \rho &= 1 \end{aligned}\right\}$$ ✓

$$A_J = \frac{1}{2} abc\rho^2 \sin^{-1/2}(\vartheta)$$

Pozor: Ty souřadnice fungují jen pro $\vartheta \in (0; \pi/2)$ – kvůli odmocnině z ~~cosinu~~ sinu

Název věty (G.O.) ✓ Musí být explicitně zmíněno!

$$I = \int_V \operatorname{div}\vec{F}\, d(x,y,z) = \left\| V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} \leq 1\} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix}\text{nové souřadnice} \\ \text{(viz výše)}\end{matrix} \right\| = 2 \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \overbrace{2c^5\rho^5 \sin^{5/2}(\vartheta)}^{2z^5} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} abc\rho^2 \sin^{-1/2}(\vartheta)}_{\text{Jacobián}}\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

symetrie

$$= 2abc^6 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^7 \cdot \sin^2(\vartheta)\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = \left\| \begin{matrix}\text{věta o} \\ \text{separabilitě}\end{matrix} \right\| =$$

$$= 2abc^6 \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2(\vartheta)\, d\vartheta \cdot \int_0^1 \rho^7\, d\rho =$$

$$= 2abc^6 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\vartheta)}{2}\, d\vartheta \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{2}abc^6 \cdot \frac{1}{2}\left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}abc^6 \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{8}abc^6$$ ✓

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1}_{\varrho\leqq 1} \qquad (*) \quad \left.\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi \\ y &= b\varrho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \det\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\varphi)} = ab\varrho$$

6 bodů

$$\mu_2(E) = \int_E 1\, d\mu_2(x,y) = \int_E 1\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}\, d(x,y) =$$

$$= \int_E 3x^2\cdot 3y^2\, d(x,y) = 9\int_E x^2y^2\, d(x,y) = \left\| \begin{matrix}\text{substituce}\\ (*)\end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2\varrho^2\cos^2\varphi\, b^2\varrho^2\sin^2\varphi\cdot ab\varrho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= a^2b^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \varrho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\rho\, d\varphi = \left\| \begin{matrix}\text{věta o}\\ \text{separabilitě}\end{matrix} \right\| =$$

$$= a^2b^2\int_0^1 \varrho^5\, d\varrho\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{24}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}\, d\varphi = \frac{1}{48}a^2b^2\left[\varphi - \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{48}a^2b^2\cdot 2\pi = \frac{1}{24}\pi a^2b^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}}+\frac{z^2}{c^2}\right)^5 \leq x^2y^2$$

9 bodů

$$x = \rho\cos\vartheta\sqrt{\cos\varphi}\cdot a$$
$$y = \rho\cos\vartheta\sqrt{\sin\varphi}\cdot b$$
$$z = \rho\sin\vartheta\cdot c$$

$$\Delta_J = \frac{1}{2}\rho^2 abc\cos\vartheta\,\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}}$$

$$\left(\sqrt{\rho^4\cos^4\vartheta}+\rho^2\sin^2\vartheta\right)^5 \leq \rho^4\cos^4\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\,a^2b^2$$
$$\rho^6 \leq a^2b^2\cos^4\vartheta\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\underline{\rho \leq \left(ab\cos^2\vartheta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\right)^{1/3}}$$

(*)

$$A = a^2b^2c$$

$$\lambda^3(T) = 8\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{(ab\cos^2\vartheta\sqrt{\cos\varphi}\sqrt{\sin\varphi})^{1/3}} \frac{1}{2}\rho^2 abc\cos\vartheta\,\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} A\cdot\cos^3\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta = \frac{4}{3}\,\frac{\pi}{2}A\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = \left|\begin{array}{l} t=\sin\vartheta \\ dt=\cos\vartheta\,d\vartheta\end{array}\right| =$$

$$= \frac{2\pi}{3}A\int_0^1(1-t^2)\,dt = A\,\frac{2\pi}{3}\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\pi}{3}a^2b^2c =$$

$$\underline{= \frac{4}{9}\pi a^2b^2c}$$

(*) Je-li tato mez stanovena chybně, dále se neopravuje!

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2+x^2) - \ln(x^2+b^2)}{(x^2+4)} \, dx \stackrel{\Delta}{=} H(a) \qquad a,b>0$$

10 bodů

- $H(a=b)=0$
- $x \mapsto f(x|a,b)$ je měřitelná
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \left|\frac{2a}{(x^2+4)(x^2+a^2)}\right| \leq \frac{2a}{x^2+4} \leq \frac{2}{x^2+4}$

majoranta nezávislá na parametru

explicitní důkaz integrability

$$\frac{2}{x^2+4} \in \mathcal{L}(0,+\infty) \Leftarrow \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx = \left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dH}{da} = \int_0^{+\infty} \frac{2a}{(x^2+4)(x^2+a^2)} dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{Ax+B}{x^2+4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{Cx+D}{x^2+a^2} dx}_{\text{tvar parciál. zlomků}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} A=0 \ \& \ C=0 & Ba^2-4B=2a \\ Bx^2+Ba^2+Dx^2+4D \stackrel{!}{=} 2a & \\ B+D=0 \ \& \ Ba^2+4D=2a & B=-D=\frac{2a}{a^2-4} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{2a}{a^2-4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx - \frac{2a}{a^2-4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx =$$

$$= \frac{2a}{a^2-4}\frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx - \frac{2a}{a^2-4}\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} dx =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}a}{a^2-4}\left[2\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^{+\infty} - \frac{2/a}{a^2-4}\left[a\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{a}{a^2-4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{a^2-4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{a-2}{a^2-4} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{a+2}$$

$$H(a) = \int \frac{\pi}{2}\frac{1}{a+2} da = \frac{\pi}{2}\ln(a+2) + C \quad \& \quad H(a=b) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}\ln(b+2)$$

Výsledek:

$$H(a) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a+2}{b+2}$$

2.

4 body

$a,b,c>0 \qquad \int_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2)-\ln(b^2+x^2)}{c^2+x^2}\,dx$

- $I\big|_{a=b}=0 \quad \Leftarrow \quad a=b \Rightarrow I=0$
- $x \mapsto f(x,a,b,c)$ měřitelná
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \left|\frac{2a}{(c^2+x^2)(a^2+x^2)}\right| \leq \frac{2a}{c^2+x^2} \leq \frac{2\alpha}{c^2+x^2}$ $\quad a \leq \alpha < +\infty$ $\quad \frac{2\alpha}{c^2+x^2} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{2a}{(c^2+x^2)(a^2+x^2)}\,dx = \int_0^\infty \frac{A+\Omega x}{c^2+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{B+\Phi x}{a^2+x^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} (\Omega,\Phi)=(0,0) & A(a^2-c^2)=2a \ \wedge\ B=-A \\ A(a^2+x^2)+B(c^2+x^2)=2a & \\ Aa^2+Bc^2=2a \ \wedge\ A+B=0 & A=-B=\frac{2a}{a^2-c^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{c^2+x^2}\,dx - \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{c^2(1+\frac{x^2}{c^2})}\,dx - \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})}\,dx =$$

$$= \frac{2a}{a^2-c^2}\left[\frac{1}{c}\operatorname{arctg}\frac{x}{c} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]_0^\infty = \frac{2a}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{c}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a}\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi a}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi a}{a^2-c^2}\,\frac{a-c}{ac} = \frac{\pi}{c}\,\frac{1}{a+c}$$

$$I(a) = \frac{\pi}{c}\ln(a+c) + C \quad \Rightarrow \quad a=b \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{c}\ln(b+c) + C = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2)-\ln(b^2+x^2)}{c^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{c}\ln\frac{a+c}{b+c}$$