Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta A

úterý 6. prosince 2016, 13:20–15:20

1 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + x^2}} \frac{1}{\ln^2(n)}$$

na množině $\mathbf{R}^+$.

2 (5 bodů)
Detailně načrtněte řešení diferenciální rovnice

$$4y' = \frac{x+5}{1-y}$$

procházející bodem $(x_0, y_0) = (-5, 2)$.

3 (9 bodů)
Hledejte řešení rovnice

$$x^2 y'' + x(3x-2)y' + (2-3x)y = -6x^3,$$

které má globální maximum v bodě $x = 1$ a jeho hodnota je 2.

4 (7 bodů)
Zkonstruujte Maclaurinovu řadu funkce $y(x) = \sinh(3x)$ a prokažte (za použití metody využívající tzv. Cauchyho úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici), že součtem získané řady je skutečně výchozí funkce.

5 (3 body)
Nalezněte koeficienty lineárního diferenciálního operátoru $\hat{L}$, jehož jádro má tvar $[2, x^2, 3 + x^2]_\lambda$.

6 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí, jejíž n–tý člen je tvaru

$$g_n(x) = 8x + \left(\frac{nx}{x^2 + 4n^2}\right)^n,$$

na množině všech kladných reálných čísel.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta B

úterý 6. prosince 2016, 13:20–15:20

1 (8 bodů)
Detailně načrtněte řešení diferenciální rovnice

$$(3x - y + 2)y' = 8x - 3y + 4$$

procházející bodem $(x_0, y_0) = (-2, -4)$.

2 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n+3)!} \left(\frac{nx}{x^2 + n^2} \right)^n$$

na množině $\mathbf{R}$.

3 (2 body)
Sestavte mocninnou řadu s oborem konvergence rovným polouzavřenému intervalu $(2, 6\rangle$.

4 (6 bodů)
Hledejte analytickou funkci $y(x)$, pro kterou platí, že

- $y(0) = y'(0)$;
- má v bodě $x = 0$ lokální minimum;
- existuje $c \in \mathrm{Dom}(y)$ tak, že $\forall n \in \mathbf{N} : \ y^{(n+1)}(c) - y^{(n)}(c) = 1$.

5 (9 bodů)
Vypočítejte:

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(x^2 + n^2 + n)^2} \, \mathrm{d}x.$$

6 (7 bodů)
Metodou snížení řádu diferenciální rovnice (tj. bez použití charakterictického polynomu) řešte

$$y''' - 9y'' + 27y' - 27y = \frac{12}{x} \mathrm{e}^{3x}.$$

Užijte faktu, že $\mathrm{e}^{3x} \in \Omega_0$. Odlišná metoda řešení se netoleruje.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta A

úterý 10. ledna 2017, 9:30–11:30

1 (6 bodů)
Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru a, pro něž je předpis

$$(1-a)x_1^2 - 4x_2^2 + (a^2 - 6a + 5)x_3^2 - 4x_1x_2 + 2(a-1)x_1x_3 + 4x_2x_3$$

skalárním součinem v $\mathbf{R}^3$. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

2 (2 body)
Kdy řekneme, že bod $a \in E$ je hraničním bodem množiny X v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$?

3 (8 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$y''(x^3 - x) = y'(x^2 - 2x - 1).$$

4 (10 bodů)
Pro kvadratickou plochu, která je v $\mathbf{R}^3$ zadána rovnicí

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 25x_3^2 - 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 8x_2x_3 + 4x_1 - 4x_2 + 16x_3 = 1,$$

určete normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu a transformační vztahy $\vec{x} = \vec{x}(\vec{z})$, které ji na normální tvar převádějí. Jak se změní signatury a transformační vztahy $\vec{x} = \vec{x}(\vec{z})$, bude-li uvedená rovnice zadávat kvadriku v $\mathbf{R}^4$? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

5 (9 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$xy''' + 3(1-2x)y'' + 3(3x-4)y' + 9y = 9\mathrm{e}^{3x}$$

víte-li, že v jádru příslušného operátoru leží všechny násobky funkce $g(x) = \frac{1}{x}$.

6 (5 bodů)
Nechť je v Hilbertově prostoru $\mathbf{R}^2$ zadán skalární součin předpisem

$$\vec{x}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Jaký úhel (ve stupních) svírají vektory $\vec{u} = (3; 4)$ a $\vec{v} = (0; -1)$?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta B

úterý 10. ledna 2017, 9:30–11:30

1 (10 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2x(2y+x)y' = 2y^2 - x^2$$

procházející bodem $(x_0, y_0) = (-4, 6)$. Nalezené formální řešení poté důkladně analyzujte: nalezněte jeho střed a všechny průsečíky se souřadnými osami.

2 (8 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 8xy' - 10y = 4x^2.$$

3 (10 bodů)
Nalezněte polární bázi kvadratické formy

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_1x_4 + 18x_2x_3 - 6x_2x_4 - 2x_3x_4,$$

obsahující vektory $\overrightarrow{u_1} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (-2,1,0,0)$ a $\overrightarrow{u_3} = (-9,3,1,0)$. Na základě znalosti takové báze stanovte transformační vztahy $\vec{x} = \mathbb{M}\,\vec{y}$, které danou kvadratickou formu převádějí na normální tvar a tento zapište. Jaká je signatura uvedené formy? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

4 (5 bodů)
Nalezněte čísla $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby funkce $g(x) = ax + b$ byla v prehilbertově prostoru $\mathscr{C}(\langle -1, 2\rangle)$ kolmá k funkci $h(x) = -x$ a měla normu rovnou devíti. Skalární součin je zaveden předpisem

$$\langle y(x)|z(x)\rangle := \int_{-1}^{2} y(x)z(x)\,\mathrm{d}x.$$

5 (2 body)
Kdy řekneme, že bod $a \in E$ je vnitřním bodem množiny X v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$?

6 (5 bodů)
Vykreslete okolí $\mathcal{U}_6(0,0)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x},\vec{z}) = 6|x_1 - z_1| + 2\lceil |x_2 - z_2| \rceil.$$

Nepřehlédněte horní celou část ve druhém sčítanci!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta N

úterý 17. ledna 2017, 9:30–11:30

1 (7 bodů)
V prostoru $\mathbf{R}^3$ sestrojte polární bázi $\mathcal{B}$ generovanou kvadratickou formou

$$q(\vec{x}) = 9x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

splňující následující požadavky:

- $(-1, 2, 1)^\intercal \in \mathcal{B}$
- $\exists \vec{v} \in \mathcal{B} : \langle \vec{v} | (1, 0, 0)^\intercal \rangle = 0.$

Na základě znalosti polární báze sestavte transformační vztahy $\vec{x} = \mathbb{D}\vec{y}$, které zadanou kvadratickou formu převádějí na její normální tvar. Tento zapište. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

2 (5 bodů)
Nechť je dán normovaný vektorový prostor $\{\mathcal{V}, \|.\|\}$ a $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ nechť je metrika generovaná touto normou. Rozhodněte (a své tvrzení dokažte), zda v metrickém prostoru $\{\mathcal{V}, \varrho\}$ platí následující tvrzení:

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x_n} = \vec{a} \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} \vec{y_n} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\vec{x_n} + \vec{y_n}) = \vec{a} + \vec{b}.$$

Detailně komentujte!

3 (10 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 9y'' + 27y' - 27y = \frac{12}{x}\, \mathrm{e}^{3x}.$$

4 (6 bodů)
Nechť je v prostoru $\mathbf{R}^2$ zadána metrika

$$\gamma(\vec{x}, \vec{y}) := \max\{3|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Rozhodněte, zda existuje bod $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$, který současně leží v okolích $\mathcal{U}_6(0, 0)$ a $\mathcal{U}_3(3, 9)$. Obě okolí podrobně načrtněte! Na závěr dokažte, že posloupnost

$$(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty} := \left(\frac{5n^2 + 2}{n^2}; -\frac{3}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

je konvergentní v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \gamma\}$.

5 (9 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2y' = \frac{y}{x} - \frac{y + x}{2y + x}$$

vyhovující podmínce $y(2) = 0$. Detailně diskutujte, co vypočtené formální řešení představuje a načrtněte ho.

6 (3 body)
Nalezněte hodnotu parametru $\omega \in \mathbf{R}$ tak, aby bod $(-33, -7)$ byl středem kuželosečky

$$-(x - 3y + 2\omega)^2 + 4(y + \omega + 1)^2 = 1.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Opravná zápočtová písemná práce z předmětu 01MAB3

úterý 24. ledna 2017, 9:30–11:30

1 (12 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}; \quad (y(1), y'(1)) = (0, 0).$$

2 (3 body)
Vykreslete okolí $\mathcal{U}_{10}(0,0)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varkappa(\vec{z}, \vec{y}) = 2|z_1 - y_1| + 5|z_2 - y_2|.$$

3 (8 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n.$$

4 (7 bodů)
Pro kvadratickou formu

$$q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 4xz - 8yz + 8z^2 = 0$$

stanovte signaturu, normální tvar a typ definitnosti. Stanovte transformaci, která zadanou formu normalizuje. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

5 (8 bodů)
Pro která $\alpha \in \mathbf{R}$ splňuje funkční řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xn\alpha^n}{\sqrt{x^2 + n^2}}$$

nutnou podmínku stejnoměrné konvergence na množině $Y = \langle -1, 1 \rangle$?

Pro získání zápočtu je nutno získat alespoň 19 bodů.