Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta A

úterý 28. listopadu 2017, 9:20–11:20

1 (8 bodů)
Lze nebo nelze k rozhodnutí o stejnoměrné konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x \ln(n)}{\sqrt{n^6 + n^2 x^4}}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ užít Weierstrassova kritéria? Podrobně diskutujte!

2 (9 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2y' + 3\,\frac{y + 6x}{y + 3x} = \frac{y}{x}$$

vyhovující podmínce $y(1) = -1$.

3 (9 bodů)
Vypočítejte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{n^4 + xn^2 + x^2}{n^4 + x^2} \right) \mathrm{d}x$$

a diskutujte oprávněnost všech užitých postupů.

4 (8 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$G(x) = \int_0^x \frac{1 - \mathrm{e}^{-y^2}}{y^2}\, \mathrm{d}y$$

a určete její obor konvergence O. Dále rozhodněte, zda uvedená řada stejnoměrně konverguje na O. Podrobně vysvětlete!

5 (7 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$y' + \frac{4x}{1 + x^2} y = \frac{1 + 3x^2}{(1 + x^2)^2}; \quad y(1) = 2.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta B

úterý 28. listopadu 2017, 9:20–11:20

1 (8 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

2 (7 bodů)
Aplikací teorie taylorovských rozvojů určete hodnotu derivace $g^{(42)}(0)$ pro funkci

$$g(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3 (8 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' + (x^2-4)\frac{y}{x} = \frac{x^9}{y},$$

jež je zadána společně s podmínkou $y(1) = -2$.

4 (8 bodů)
Pro rovnici

$$x^3y''' + x^2(3x-6)y'' + 6x(3-2x)y' + 6(3x-4)y = 0$$

je prostorem všech jejích řešení lineární obal $\Omega_0 = [x^2, x^3, \omega(x)]_\lambda$. Čemu se rovná $\omega(x)$?

5 (10 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2(x-3n)}{x(n^3+x^3)}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na intervalu $(0, +\infty)$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta C

pátek 8. prosince 2017, 9:20–11:20

1 (9 bodů)
Rovnice $xy' + (x-1)y = x^2$ a

$$x^2(2x-1)y'' + (2x - 10x^2 + 8x^3)y' + (-2 + 10x - 13x^2 + 6x^3)y = 0$$

mají neprázdný průnik fundamentálních systémů. Jaká jsou jejich řešení?

2 (8 bodů)
Abelovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x \ln(n)}{\sqrt{n}(x^2 + n^2)}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

3 (9 bodů)
Nalezněte součet

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{4^m m}.$$

4 (6 bodů)
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n} + x}\right)_{n=1}^{\infty}$$

konverguje na množině $\langle 0, \infty)$ stejnoměrně.

5 (8 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{5^n (2n)!} (x-5)^n.$$

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta A

pondělí 8. ledna 2018, 13:00–15:00

1 (6 bodů)
Pro která $\alpha \in \mathbf{R}$ má kvadratická forma

$$q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} -1 & -\alpha & 2\alpha \\ -\alpha & 0 & 4\alpha^2 \\ 2\alpha & 4\alpha^2 & -(1+2\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

stejnou signaturu jako forma $r(x,y,z) = 4yz$? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

2 (7 bodů)
(Tuto úlohu řešte na zadní straně tohoto zadání.) Nechť je na prostoru $\mathbf{R}^2$ definována metrika

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) := 3 \cdot \lceil |x_1 - y_1| \rceil + \lceil |x_2 - y_2| \rceil.$$

Do přiloženého obrázku pečlivě načrtněte tvar okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(-2,3)$ o poloměru $\varepsilon = \frac{15}{2}$. Na závěr rozhodněte, zda je posloupnost

$$(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty} := \left(\frac{2}{n}; \frac{1-n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

konvergentní v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$.

3 (10 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^3y''' - (5x^3 + 6x^2)y'' + (6x^3 + 20x^2 + 18x)y' - (12x^2 + 30x + 24)y = -4x^5\mathrm{e}^{2x},$$

víte-li, že její fundamentální systém má neprázdný průnik s fundamentálním systémem rovnice $y' - 2\frac{y}{x} = x^2$.

4 (3 body)
Vypište normální tvary všech čtyřdimenzionálních kvadrik, které mají hlavní signaturu rovnou trojici $(3,2,0)$ a určete, které z nich jsou centrální a které ne. Vysvětlete také, jakým způsobem centrálnost určujete.

5 (7 bodů)
Ve funkcionálním Hilbertově prostoru $[1, x, x^2]_\lambda$ se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle := \frac{1}{5}\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

nalezněte všechny prvky, které mají jednotkovou normu a jsou současně kolmé k funkcím $f(x) = 1$ a $h(x) = 4x - 2$.

6 (7 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = \frac{x^4}{\ln(x)}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta B

pondělí 8. ledna 2018, 13:00–15:00

1 (10 bodů)
Nalezněte kuželosečku reprezentující formální řešení diferenciální rovnice

$$2y' + 3\,\frac{y+6x}{y+3x} = \frac{y}{x}$$

vyhovující podmínce $y(\frac{2}{3}) = -2$. Stanovte typ kuželosečky a rozhodněte, zda (případně kde) má střed.

2 (3 body)
Vypište normální tvary všech čtyřdimenzionálních kvadrik, které mají hlavní signaturu rovnou trojici $(4,1,0)$ a určete, které z nich jsou centrální a které ne. Vysvětlete také, jakým způsobem centrálnost určujete.

3 (7 bodů)
Které členy funkcionální posloupnosti $\left(\frac{xn}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ leží v okolí funkce x o poloměru $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{250}}$? Úlohu řešte na Hilbertově prostoru, kde je skalární součin zadán vztahem

$$\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4 (6 bodů)
Pro která $\alpha \in \mathbf{R}$ má kvadratická forma $q(x,y,z) = x^2 - 2\alpha xy + 2\alpha xz + 9z^2 + 3\alpha z^2$ stejnou signaturu jako forma $r(x,y,z) = y^2 + 6xy$? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

5 (8 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$x^3y''' + 5x^2y'' - xy' - 8y = 0, \quad (y(1), y'(1), y''(1)) = (-1, 11, -19).$$

6 (6 bodů)
(Tuto úlohu řešte na zadní straně tohoto zadání.) Nechť je na prostoru $\mathbf{R}^2$ definována metrika

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) := \lceil |x_1 - y_1| \rceil + 2\cdot|x_2 - y_2|.$$

Do přiloženého obrázku pečlivě načrtněte tvar okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 3$. V obrázku neopomeňte zohlednit, která část hranice je/není součástí hledaného okolí.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta C

čtvrtek 11. ledna 2018, 9:00–11:00

1 (5 bodů)
Pro která $\omega \in \mathbf{R}$ zadává předpis

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

skalární součin na prostoru $\mathbf{R}^4$?

2 (9 bodů)
Pro kvadratickou plochu

$$x^2 - 6xy + 6xz - 2x + 13y^2 - 14yz + 2y + 10z^2 - 10z - 7 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje, a převeďte ji do maticového tvaru. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

3 (9 bodů)
Formálním řešením diferenciální rovnice

$$y' + \frac{y + 4x}{y + 2x} = \frac{y}{2x}$$

je elipsa se středem v bodě $(-3, 6)$. Nalezněte toto formální řešení a načrtněte ho. Pro přesnější náčrt zjistěte jeho průsečíky s osami souřadného systému Oxy.

4 (4 body)
Nechť je funkce $\Theta(x)$ definována předpisem

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 \ldots x > 0 \\ 0 \ldots x \leqslant 0. \end{cases}$$

Nechť je zadán metrický prostor $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ s metrikou zavedenou vztahem $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) := |x_2 - y_2| + \Theta(|x_1 - y_1|)$. Vykreslete okolí bodu $(0, 0)$ o poloměrech

- $\varepsilon = 3$,
- $\varepsilon = 1/5$,
- $\varepsilon = 1/10$.

5 (4 body)
Pro funkce $f(x)$, $g(x)$ z Hilbertova prostoru platí vztahy:

$$\langle f|g\rangle = 1 + 2\mathrm{i}, \quad \langle f|f\rangle = 8, \quad \langle g|g\rangle = 3.$$

Leží funkce $g(x)$ v okolí funkce $f(x)$ o poloměru $\varepsilon = 3$?

6 (9 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$x^2y''' + 2xy'' - 6y' = -6, \quad y(2) = y'(2) = 12 \wedge y''(2) = \frac{27}{2}.$$