Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

20. dubna 2017, 13:20–15:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (9 bodů)
Pro funkci

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{7x^3}{x^2+5(y-3)^2} + 2x - y & (x,y) \neq (0,3); \\ \alpha & (x,y) = (0,3); \end{cases}$$

nejprve nalezněte α tak, aby existoval její gradient v bodě $\vec{a} = (0,3)$ a poté rozhodněte, zda má uvedená funkce totální diferenciál v bodě $\vec{a}$.

3 (10 bodů)
Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pro neznámou funkci $u(x,y)$ na rovnici pro funkci $u(\varrho,\varphi)$ prostřednictvím vztahů $x = \varrho\cos(\varphi)$, $y = \varrho\sin(\varphi)$.

4 (7 bodů)
Nechť je dána funkce

$$g(x,y) = \frac{xy - 2x + y - 2}{x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5}.$$

V jejím definičním oboru sestrojte posloupnost bodů, která

- konverguje k bodu nespojitosti funkce $g(x,y)$ a
- pro kterou konverguje posloupnost příslušných funkčních hodnot k číslu $\frac{4}{17}$.

5 (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu implicitní funkce $z(x,y)$ zadané rovnicí

$$\frac{x^2y^2}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1$$

v jeho bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledku upravte do elegantního tvaru, který využívá skutečnosti, že bod (x_0, y_0, z_0) splňuje uvedenou rovnost.

6 (7 bodů)
Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y) = xy^2$ na množině $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 16x^2 + y^4 \leqslant 32\}$. Čemu se rovná $\mathrm{Ran}(f)$ a proč?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta B

20. dubna 2017, 13:20–15:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (7 bodů)
Pro vektorovou funkci $\vec{G}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2; xyz; x + y + z)$ nalezněte všechny body, které neleží v množině regularity této funkce a zároveň je v nich splněna rovnost $\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{G}(x, y, z)\| = 0$.

3 (9 bodů)
Stacionárním bodem funkce $g(x, y, z) = 2xy + 2xz - 6x - 4y^2 - 3yz + 12y - 3z$ vzhledem k množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x, y, z > 0 \wedge 4x^2 - 16xy + 17y^2 - 6y + z^2 = 3\}$$

je bod $(x_0, y_0, z_0) = (11, 5, 2)$. Rozhodněte, jaký typ vázaného extrému v uvedeném bodě nastává.

4 (9 bodů)
Pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} 5x + \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+4y^2} & (x, y) \neq (1, 0); \\ 5 & (x, y) = (1, 0); \end{cases}$$

určete:

- gradient v bodě $(1, 0)$, existuje-li;
- totální diferenciál v bodě $(1, 0)$, existuje-li;
- směrovou parciální derivaci ve směru $(2, -1)$ v bodě $(1, 0)$, existuje-li.

5 (9 bodů)
Užitím transformace $(\alpha, \beta) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$ řešte parciální diferenciální rovnici

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} - 3y\frac{\partial u}{\partial y} = 8\frac{y}{x}.$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadané transformace.

6 (7 bodů)
Nalezněte přímku, která na okolí bodu $(x_0, y_0) = (13, 5)$ nejlépe aproximuje křivku

$$18x + 9x^2 - 52y - 36xy + 40y^2 = 155.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta N

11. května 2017, 11:20–13:20

1 (8 bodů)
Parciální diferenciální rovnici

$$x^4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + y^4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

transformujte regulárním zobrazením

$$(\xi,\eta) = \left(\frac{x-y}{xy}, y\right).$$

2 (7 bodů)
V $\mathbf{R}^2$ existuje jediný bod, kde ani jedna z funkcí

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2(x-1)-y+3} & 2(x-1)-y+3 \neq 0; \\ 0 & 2(x-1)-y+3 = 0; \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} y + \frac{y-4}{(x-2)^2+y-4} & (x-2)^2+y-4 \neq 0; \\ 1 & (x-2)^2+y-4 = 0; \end{cases}$$

nemá totální diferenciál. Určete ho. Která z funkcí v tomto bodě stoupá ve směru osy x strměji?

3 (8 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x+3y^2}}$$

a podrobným výpočtem určete její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru dvojné sumy s vícenásobnými faktoriály.

4 (8 bodů)
Nechť je funkce $z(x,y)$ zadána implicitně rovnicí

$$z^3 - 2xz^2 + 6y = 30.$$

Nalezněte její totální diferenciál v bodě $(x_0,y_0) = (3,5)$ a na jeho základě sestavte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z(x,y)$ v příslušném bodě. Diskutujte všechna přípustná řešení této úlohy!

5 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = 2xy + 2xz + yz$$

na vazbové množině

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x,y,z > 0 \wedge 4x^2 + y^2 + z^2 = 12\}.$$

6 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.