| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | CELKEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Příjmení a jméno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| | | | | | | | |

# Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

16. dubna 2018, 11:20–13:20

**1** (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vašim jménem uveďte příjmení cvičícího.

**2** (6 bodů)
Nalezněte všechny kritické generující body, v nichž soustava

$$4z - u - v + 16 = 0, \quad 4x + 8y + 4z + u + v = 8, \quad 2xy + u + v = 8$$

negarantuje existenci implicitní funkce $z = z(u, v)$.

**3** (11 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{2x + 6y - 13}{\sqrt{x^2 + 9y^2 - 42y + 50}}.$$

Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

**4** (11 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 8u(x, y).$$

Užijte k tomu substituci

$$\xi = \frac{y^2}{x}, \quad \eta = x.$$

**5** (5 bodů)
Nechť je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8x^2(y+2)}{15x^4 + (y+2)^2} & \dots \quad (x, y) \neq (0, -2) \\ 1 & \dots \quad (x, y) = (0, -2). \end{cases}$$

Nalezněte alespoň dvě množiny, vzhledem k nimž je $f(x, y)$ spojitá v bodě $(0, -2)$.

**6** (7 bodů)
Rozviňte funkci

$$g(x, y) = \frac{x + y}{1 + 4(x + y)^2}$$

do Maclaurinovy řady. Výsledek upravte do tvaru řady s dvojitou sumou. Jaký je její obor konvergence? Obor konvergence také pečlivě načrtněte!

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | CELKEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Příjmení a jméno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| | | | | | | | |

# Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta B

16. dubna 2018, 11:20–13:20

**1** (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vašim jménem uveďte příjmení cvičícího.

**2** (10 bodů)
Nalezněte Taylorův polynom prvního stupně funkce $u = u(x, y, z)$ v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0) = (2, 3, -1)$. Funkce $u = u(x, y, z)$ nechť je zadána rovnicí

$$u^3 - xu^2 - 4zu + y - 4u = 3.$$

Dále vypočtěte $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{a})$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(\vec{a})$.

**3** (11 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial u}{\partial x} + u(x, y) = 0.$$

Užijte k tomu substituci

$$a = x, \quad b = \frac{x^2}{y}.$$

**4** (6 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$g(x, y, z) = 2x^3 + 9x^2 + 4y^2 + 7 + 12x + z^2 - 2z.$$

**5** (6 bodů)
Nalezněte všechny kritické generující body, v nichž soustava

$$4z - u - v + 16 = 0, \quad 4x + 8y + 4z + u + v = 8, \quad 2xy + u + v = 8$$

negarantuje existenci implicitní funkce $z = z(u, v)$.

**6** (7 bodů)
Prověřte, zda má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + \frac{2x^5}{x^4 + y^2} + 3y - 8 & \dots \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ -8 & \dots \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál v bodě $(0, 0)$. Své tvrzení podrobně komentujte!

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | CELKEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Příjmení a jméno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| | | | | | | | |

# Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta N

9. května 2018, 9:20–11:20

**1** (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vašim jménem uveďte příjmení cvičícího.

**2** (5 bodů)
Elipsu

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

aproximujte v bodě $(0, 3)$ parabolou. Uvažte, jaký aparát vhodný k aproximacím matematická analýza obvykle využívá. Nápomocna vám může také být teorie implicitních funkcí.

**3** (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$$

na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}$. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

**4** (5 bodů)
Jakou hodnotu funkce

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{2x^4+y^4} & \dots \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ ?? & \dots \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

je nutné zvolit v bodě $(0, 0)$, aby v něm existovala směrová derivace ve směru $(1, 2)$?

**5** (10 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u(x, y).$$

Užijte k tomu substituci

$$a = xy, \quad b = y.$$

**6** (10 bodů)
Nalezněte totální diferenciály funkcí, zadaných na okolí bodu $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 2, 2, 1)$ rovnicemi

$$\begin{aligned} xu^2 + yu^2v^4 &= v^2(x + y)^2 \\ u^4 - 2y^2v^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

v bodě $(x_0, y_0)$.

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | CELKEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Příjmení a jméno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| | | | | | | | |

# Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

25. května 2018, 9:20–11:20

**1** (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a prostudujte si následující nápovědu.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\cdot\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}; \quad \Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

**2** (6 bodů)
Jakou jedinou množinu $Y$ je třeba doplnit do soustavy $\mathscr{B} = \left\{\emptyset, Y, \{\blacktriangledown\}, \{\spadesuit, \bigstar\}, \{\bullet, \blacklozenge, \blacktriangledown\}\right\}$, aby tato byla polookruhem? Na $\mathscr{B}$ je míra definována výčtem

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \dots \quad X = \emptyset \\ 6 & \dots \quad X = \{\blacktriangledown\} \\ 3 & \dots \quad X = \{\spadesuit, \bigstar\} \\ 7 & \dots \quad X = \{\bullet, \blacklozenge, \blacktriangledown\} \end{cases}$$

Jak vypadá minimální okruh $\mathscr{O}$ generovaný soustavou $\mathscr{B}$? A jakou míru mají množiny z $\mathscr{O}$?

**3** (8 bodů)
Vypočítejte křivkový integrál $\int_A (y^2, x)\,\mathrm{d}\mu_c(x,y)$ přes křivku vyobrazenou fialově na přiloženém obrázku.

**4** (8 bodů)
Nechť je Lebesgueova míra zadána prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(\tau) = \tau^2\mathrm{sgn}(\tau)$ platné pro obě dimenze. Nalezněte těžiště množiny

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \; y > 0 \;\wedge\; \sqrt{\left|\frac{x}{a}\right|} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqslant 1\right\}.$$

**5** (10 bodů)
Nechť je na množině $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \; x^2 + 2xy - 2xz + 2y^2 - 4yz + 3z^2 = 1 \;\wedge\; \sqrt{2}x = 1\right\}$ dána funkce $g(x,y,z) = xy$. Rozhodněte, zda je bod

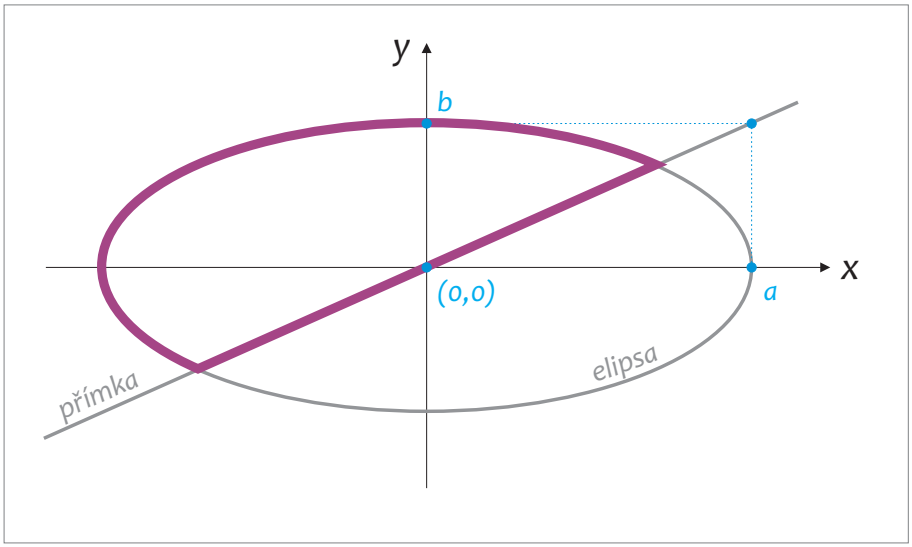
$$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

bodem lokálního vázaného maxima či minima? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

**6** (7 bodů)
Nechť $a > 0, \mu \in \mathbf{R}$ a $n \in \mathbf{N}_0$. Vypočítejte hodnoty všech integrálů tvaru

$$\int_\mu^\infty (x-\mu)^n \mathrm{e}^{-a(x-\mu)}\mathrm{d}x.$$

Uvažte, jak vám při jejich vyčíslování může být nápomocna technika derivování integrálu podle parametru.


y
b
x
(0,0)
a
přímka
elipsa

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | CELKEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Příjmení a jméno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| | | | | | | | |

# Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

29. května 2018, 9:00–11:00

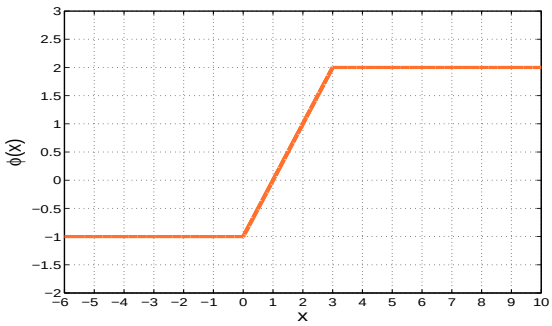
**1** (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtěte klasickou třírozměrnou míru množiny

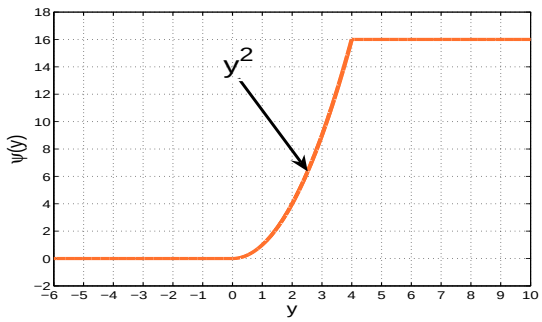
$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{5/2} \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right\}.$$

**2** (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\beta x)}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x.$$

**3** (5 bodů)
Nechť vytvořující funkce




generují na množině $\mathbf{E}^2$ Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Vypočtěte Lebesgueův integrál

$$(\mathscr{L}) \iint_{\mathbf{R}^2} \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \,\mathrm{d}\mu(x, y).$$

**4** (8 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy^2z$ na množině

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge x^2 + \frac{y^4}{16} + \frac{z^2}{9} = 3\right\}.$$

**5** (8 bodů)
Aplikací Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál $\int_{\mathbf{bd}(A)} (x^3 - y; x + y^3)\,\mathrm{d}\mu_c(x, y)$, kde

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{5}{12}} \leqslant \frac{x}{a} \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\right\}.$$

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | CELKEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Příjmení a jméno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| | | | | | | | |

# Opravná zápočtová písemná práce z předmětu 01MAB4

5. června 2018, 9:00–11:00

**1** (7 bodů)
Pro $a > 0, b > 0$ vypočítejte

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**2** (7 bodů)
V bodě $(x_0, y_0) = (5, 1)$ nalezněte rovnici tečné přímky ke křivce

$$x^2 - 2xy + 2x + 2y^2 + 2y = 29.$$

**3** (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x, y, z) = xyz$ na množině

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \; x, y, z > 0 \;\wedge\; xy + 2z(x + y) = 12\right\}.$$

**4** (5 bodů)
Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2+2x^3}{x^2+y^2} & \dots \quad (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \dots \quad (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

a směr $\vec{s} = (3, -4)$ nalezněte směrovou derivaci v bodě $(0, 0)$.

**5** (9 bodů)
Nechť $a, b$ jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k souřadnicím $\varrho, \varphi$ zavedeným vztahy

$$x = a\varrho^4 \cos^4(\varphi), \quad y = b\varrho \sin(\varphi),$$

vypočtěte obsah plochy

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \; \sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{y}{b}\right\}.$$

Odklon od zadání (zejména užití jiných souřadnic) se hodnotí nulovým bodovým ziskem.

---

Pro udělení zápočtu je nutno získat alespoň **19** bodů.