Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

16. dubna 2019, 9:20–11:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vašim jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (9 bodů)
Vyšetřete extrémy funkce $z = z(x, y)$, jež je generována rovnicí

$$x^2 + 8y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz - 12yz = 8.$$

3 (6 bodů)
Hessova matice jisté funkce, o níž je známo, že je třídy C^2 na celém svém definičním oboru, obsahuje samé jedničky a jednu jedinou odlišnou hodnotu (označme ji α). Nechť $\vec{a} = (5, -1, 1)$ je stacionárním bodem uvedené funkce. Pro která α lze použitím postačující podmínky rozhodnout, zda je $\vec{a}$ lokálním extrémem?

4 (7 bodů)
Rozhodněte, zda rovnice

$$-3ux + u + xy^2 + 3yz + z^3 = -7$$

zadává v bodě $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1, -2, 1, 3)$ implicitní funkci $z = z(x, y, u)$. Pod jakým úhlem (ve stupních) bude stoupat/klesat graf této funkce, budeme-li se z bodu $(x_0, y_0, u_0) = (1, -2, 3)$ přesunovat směrem k bodu $(0, -1, 5)$?

5 (8 bodů)
Podle definice dokažte, že funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2x^2}{\sqrt{y^2+x^2}} + x - 7y + 2 & \dots \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \dots \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

má v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál.

6 (10 bodů)
Transformujte výraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

do pseudosférických souřadnic $\varrho, \vartheta, \varphi$ zavedených vztahy

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos(\vartheta) \cos^2(\varphi) \\ y &= \varrho \cos(\vartheta) \sin^2(\varphi) \\ z &= \varrho \sin(\vartheta). \end{aligned}$$

Neopomeňte diskutovat regularitu zadané substituce.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta B

16. dubna 2019, 9:20–11:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (7 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x,y,z,u) = xy - 2xz + 7x + 3yz - 15y + 3z + u\mathrm{e}^{-u}$.

3 (8 bodů)
Nechť je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2(x-3)^2}{\sqrt{y^2+(x-3)^2}} - x + 3y + 7 & \dots \quad (x,y) \neq (3,0), \\ 4 & \dots \quad (x,y) = (3,0), \end{cases}$$

Nalezněte všechny přímky, vzhledem k nimž je tato funkce spojitá v bodě $(3,0)$. Dále vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3,0)$ pro $\vec{s} = (2,1)$.

4 (10 bodů)
Nalezněte Taylorův polynom prvního stupně funkce $u = u(x,y,z)$ v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0) = (2,3,-1)$. Funkce $u = u(x,y,z)$ nechť je zadána rovnicí

$$u^3 - xu^2 - 4zu + y - 4u = 3.$$

Dále vypočítejte $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(\vec{a})$.

5 (6 bodů)
Nechť je funkce $\tilde{H}(x,y,z)$ definována na okolí bodu $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ jako složení funkcí $H(u,v) \in C^1(\mathbf{E}^2)$, $u(x,y,z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$ a $v(x,y,z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$. Nechť pro totální diferenciály těchto funkcí platí:

$$\mathrm{d}H_{\vec{b}}(h_u, h_v) = 3h_u - 2h_v,$$

$$\mathrm{d}u_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = h_x - 3h_y + h_z,$$

$$\mathrm{d}v_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = -h_y + 5h_z.$$

Nalezněte tvar totálního diferenciálu funkce $\tilde{H}(x,y,z)$ v bodě $\vec{a}$. Čemu se musí rovnat $\vec{b}$, aby úloha byla řešitelná?

6 (9 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 7x \frac{\partial f}{\partial x} + 9y \frac{\partial f}{\partial y} = 4\frac{y^4}{x^4}$$

aplikací substitučních vztahů

$$a = \frac{y}{x}, \quad b = xy.$$

Neopomeňte diskutovat regularitu zadané substituce.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta N

2. května 2019, 13:20–15:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vašim jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (8 bodů)
Pod jakým úhlem (ve stupních) stoupá/klesá funkce $w = 3 \cdot u(x,y,z)$ v bodě $\vec{a} = (-1,2,4)$ ve směru $(1,1,1)$? Funkce $u(x,y,z)$ nechť je zadána rovnicí

$$u^3 + 3ux + y^2 = z - 2.$$

3 (7 bodů)
Ukažte, že při vhodné volbě čísla $a \in \mathbf{R}$ má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4(y+2) & \dots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ a & \dots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gradient v bodě $(0,0)$, ale totální diferenciál nikoli.

4 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $u(x,y)$, jež je zadána implicitně rovnicí

$$x^2 + 5y^2 + 10u^2 + 4xy + 2xu - 2yu + u = 1.$$

5 (9 bodů)
Do parciální diferenciální rovnice

$$3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

zaveďte nové proměnné $r = \frac{y^3}{x}$ a $s = xy$. Nalezněte také příslušnou maximální množinu regularity.

6 (7 bodů)
Pro funkci

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1+x}}{1+y}$$

určete obecný předpis pro všechny parciální derivace a na tomto základě sestavte Maclaurinovu řadu zadané funkce. Stanovte její obor konvergence.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (8 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ na množině

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \ 2x + 3y + 4z = 9 \ \wedge \ x,y,z > 0\right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a,b,c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(Y)$ množiny

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x,y > 0 \ \wedge \ \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^{7/2} \leqslant \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 - \frac{z^4}{c^4}\right\}.$$

3 (8 bodů)
Greenovou větou vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{bd}(A)} (-xy^2; x^2y)\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{5}{12}} \leqslant \frac{x}{a} \ \wedge \ x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant 0\right\}.$$

4 (7 bodů)
Nechť je jednodimenzionální Lebesgueova míra $\mu(X)$ zadána vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = 7\,\Theta(x) + 5\,\Theta(x-1) + 3\,\Theta(x-2) + \Theta(x-3).$$

Vypočítejte $\mu(\mathbf{N})$ a $\int_{\mathbf{N}} x^2 \mathrm{d}\mu(x)$, kde symbol $\mathbf{N}$ reprezentuje množinu všech přirozených čísel a $\Theta(x)$ Heavisideovu skokovou funkci. Výpočet doprovoďte vysvětlujícím komentářem.

5 (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ x^2 + y^2 + 9 = 6(x+y)\right\}.$$

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta B

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (7 bodů)
Dvoudimenzionální míra $\mu(X)$ je zadána prostřednictvím dvou vytvořujících funkcí:

$$\psi(y) = y^3 \quad \& \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0, \\ x^2 & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Určete obsah elipsy

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2) - \ln(b^2 + x^2)}{c^2 + x^2}\, \mathrm{d}x.$$

3 (6 bodů)
Nechť $a > 0$. Vypočtěte těžiště křivky

$$W = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1 \ \wedge \ y > 0\right\}.$$

4 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = 8\sin(3x)\sin(y)\sin(2z)$$

na množině

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x,y,z > 0 \ \wedge \ 6x + 2y + 4z = \pi\right\}.$$

5 (9 bodů) Nechť a, b, c jsou pozitivní parametry. Vypočtěte třírozměrnou Lebesgueovu míru tělesa ohraničeného plochou

$$\left(\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c}\right)^2 = \frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

30. května 2019, 9:00–11:00

1 (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(X)$ množiny

$$X = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x, y, z \geqslant 0\right\}.$$

2 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ na množině

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \wedge x, y, z \geqslant 0\right\}.$$

3 (7 bodů)
Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{10} + y = x, \quad y = 0.$$

4 (6 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou parametry. Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtěte plošný integrál

$$\int_S (x|z|; y|z|; x|y|) \, \mathrm{d}\mu_S(x, y, z),$$

kde

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}.$$

5 (9 bodů)
Nechť $a, b \geqslant 0$. Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x(1 + a^2x^2)} \, \mathrm{d}x.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Opravná zápočtová písemná práce předmětu 01MAB4

6. června 2019, 9:00–11:00

1 (10 bodů)
Nalezněte Taylorův polynom prvního stupně funkce $u(x, y)$, jež je zadána implicitně vztahy

$$2x^2 + 2y^2 = z^2 + 2u^3,$$
$$x + y = 2 + u - z,$$

v bodě $\vec{a} = (a_x, a_y) = (-1, 1)$.

2 (10 bodů)
Nechť $a, b > 0$. Pro množinu

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \ x, y > 0 \ \wedge \ \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^2 \leqslant \frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4}\right\}$$

vypočítejte integrál

$$\int_S x^3 y^3 \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{-3/2} \mathrm{d}(x, y).$$

3 (8 bodů)
Dokažte, že funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 x^2}{(y^2+x^2)^{3/2}} + 2x + 3y + 1 & \dots \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \dots \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nemá v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál.

4 (8 bodů)
Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = y - 2x + 4z$ na množině $R = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \ x^2 + y^2 + 4z^2 = 9\right\}$.

5 (8 bodů)
Nechť $a, b > 0$. Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^6} - \mathrm{e}^{-bx^6}}{x^4} \, \mathrm{d}x.$$

Předpoklad o integrabilní majorantě explicitně prověřte.

Pro udělení zápočtu je nutno získat alespoň **22** bodů.