Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – varianta 01

pondělí 12. listopadu 2018, 13:30–14:30

1 (4 body)
Nechť $\beta, \lambda > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Ověřte, zda funkce

$$g(x) = \Theta(x)x^2\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{x}-\lambda x}$$

leží v $\mathscr{B}$. Podrobně zdůvodněte, které axiomy funkce splňuje a které ne!

2 (8 bodů)
Vypočítejte

$$4x\Theta(x)\mathrm{e}^{-2x} \star 4x\Theta(x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

3 (8 bodů)
Nechť je dána hustota $h(x) = A\Theta(x)x^2\mathrm{e}^{-Dx}$. Stanovte hodnoty parametrů tak, aby $\mu_0(g) = \mu_1(g) = 1$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MCS – varianta 01

čtvrtek 20. prosince 2018, 12:00–14:00

1 (11 bodů)
Odvoďte vztah mezi trendovou funkcí druhého řádu $\lambda_2(L) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2)$ a shlukovou funkcí. Užijte k tomu pouze definice balančního částicového systému, základních popisných veličin (roztečí, multiroztečí a intervalových frekvencí) a vztahů mezi nimi. Získaný výsledek poté převeďte do tvaru vyjádřeného pomocí laplaceovských obrazů.

2 (11 bodů)
Nechť $\beta > 0$. Vypočítejte

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\beta x) - x\beta\cos(\beta x)}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

3 (16 bodů)
Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$. Určete co nejvíce vlastností funkce

$$h(x) = \Theta(x)\int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y$$

a všechna svá tvrzení dokažte. Stanovte rovněž vztah mezi Laplaceovými obrazy obou funkcí. Tento vztah dokažte, tj. neomezte se pouze na reformulaci vlastností z Laplaceovského desatera.

4 (11 bodů)
V důkazu Lerchova teorému, jehož část je přiložena k zadání, se zkoumá spojitost jisté funkce. Proč je prokázání spojitosti této funkce nezbytnou součástí důkazu? Podrobně vysvětlete a důkaz poté dokončete. Soustřeďte se zejména na vysvětlení toho, proč se dané kroky v důkaze dělají.

5 (11 bodů)
Nechť je balanční částicový systém zadán momentovým kódem svého generátoru

$$\left(\frac{k!}{2^k}\binom{5+k}{5}\right)_{k=0}^\infty.$$

Zkontrolujte, zda není tímto zadáním porušen axiom škálování a vypočítejte rozptyl nulté rozteče tohoto systému. Dále výpočtem určete, čemu se rovná balanční index takto zadaného generátoru.

Nápověda: Níže uvedený vztah platí i pro záporné hodnoty parametru a.

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n} x^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}\,x^n.$$

Znění Lerchova teorému:
Nechť $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ splňuje následující předpoklady.

1. $\operatorname{supp}(g) \subset \langle 0, +\infty)$,
2. $g(x) \in \mathscr{PC}(\mathbf{R})$,
3. $(\exists \alpha \in \mathbf{R})(\exists K > 0) :\mid g(x) \mid \leqslant K\mathsf{e}^{\alpha x}$ na $\mathbf{R}$.

Pokud existuje $s_0 \in \mathbf{R}$ tak, že $\forall s > s_0$, platí: $\int_0^{+\infty} g(x)\mathsf{e}^{-sx} = 0$, pak $g(x) \sim 0$.

Důkaz:

Pro $\varphi(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathsf{e}^{-sx}\mathsf{d}x$ platí, že $\operatorname{Dom}(\varphi(s)) = (s_0, +\infty)$ a $\varphi(s) = 0$ na $\operatorname{Dom}(\varphi(s))$. Označíme $P(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k$, kde pro všechny koeficienty platí, že $a_k \in \mathbf{R}$. Pak platí

$$\int_0^{+\infty} f(x)P(\mathsf{e}^{-x})\mathsf{e}^{-sx}\mathsf{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{+\infty} f(x)\mathsf{e}^{-(s+k)x}\mathsf{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi(s+k) =$$

$$=\mid s + k > s_0 \mid= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 0 = 0$$

a také

$$\int_0^{+\infty} f(x)P(\mathsf{e}^{-x})\mathsf{e}^{-sx}\mathsf{d}x = |y = \mathsf{e}^{-x}| = \int_0^1 y^{s-1} f(-\ln(y)) \cdot P(y)\mathsf{d}y.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Opravná zápočtová práce z předmětu 01MCS – varianta 01

středa 16. ledna 2019, 9:30–11:30

1 (11 bodů)
Laplaceovou transformací řešte integrodiferenciální rovnici

$$y'' - 5y' + 17y - 13\int_0^x y(s)\,\mathrm{d}s = 28$$

zadanou společně s podmínkami $y(0_+) = 3$, resp. $y'(0_+) = 4$.

2 (8 bodů)
Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově obrazu konvoluce.

3 (9 bodů)
Pro balanční částicový systém je znám generátor $4\Theta(x)x\mathrm{e}^{-2x}$. Určete jeho trendovou a shlukovou funkci a obě detailně načrtněte.

4 (6 bodů)
Vyslovte definici balancované hustoty a prověřte, zda funkce

$$g(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-3\sqrt{x}}$$

leží v $\mathscr{B}$. Pokud ano, určete $\mathtt{inb}(g)$, pokud ne, uveďte která ze tří částí tento problém způsobuje.

5 (9 bodů)
Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově obrazu shlukové funkce a o jejích vlastnostech. Kde se v důkaze uplatní Lerchův teorém?

6 (7 bodů)
Dokažte, že v Poissonově balančním částicovém systému mají intervalové frekvence Poissonovo rozdělení.

Pro udělení zápočtu je nutno získat alespoň 25 bodů.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Opravná zápočtová práce z předmětu 01MCS – varianta 02

čtvrtek 2. května 2019, 13:20–15:20

1 (8 bodů)
Dokažte, že je-li v balančním částicovém systému generátorem funkce $g(x) = \Theta(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, pak mají intervalové frekvence Poissonovo rozdělení. Jaká je příslušná střední hodnota intervalových frekvencí? Dodatek: Ignorujte skutečnost, že v uvedeném BČS není splněn požadavek na škálování.

2 (6 bodů)
Vyslovte definici balancované hustoty a prověřte, zda funkce

$$g(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-3\sqrt{x}}$$

leží v $\mathscr{B}$. Pokud ano, určete $\mathtt{inb}(g)$, pokud ne, uveďte která ze tří částí tento problém způsobuje.

3 (10 bodů)
Laplaceovou transformací řešte Cauchyovu úlohu

$$y'' - 2y' + y = 25\mathrm{e}^{-x}\cos(x),\ y(0) = 5,\ y'(0) = -8.$$

4 (8 bodů)
Pro balanční částicový systém je znám generátor $g(x) = 4\Theta(x)x\mathrm{e}^{-2x}$. Jakého tvaru je hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost čtyř sousedních částic?

5 (9 bodů)
Dokažte, že Laplaceův obraz balancované hustoty je analytickou funkcí v bodě $c = 0$. Čemu se rovnají koeficienty příslušné Maclaurinovy řady?

6 (9 bodů)
Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově obrazu shlukové funkce a o jejích vlastnostech. Kde se v důkaze uplatní Lerchův teorém?