Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	

Cvičící: `KLIKA|KOZAK`

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01RMF – varianta A

pondělí 24. listopadu 2014, 13:20–15:20

❶ (4 body)
Označme symbolem $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ třídu funkcí $\varphi(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, které jsou třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ a pro každé $m, k \in \mathbf{N}_0$ platí

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| x^m \cdot \frac{\mathrm{d}^k\varphi}{\mathrm{d}x^k} \right| < \infty.$$

Konvergence v $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ nechť je zavedena předpisem $x^m \cdot \frac{\mathrm{d}^k\varphi_k}{\mathrm{d}x^k} \overset{\mathbf{R}}{\rightrightarrows} x^m \cdot \frac{\mathrm{d}^k\varphi}{\mathrm{d}x^k}$ pro každé $m, k \in \mathbf{N}_0$. Označme dále symbolem $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ třídu všech lineárních a spojitých funkcionálů s definičním oborem rovným třídě $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. Ukažte, že existuje regulární distribuce $\tilde{g} \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{R})$, pro níž platí, že $\tilde{g} \notin \mathscr{S}'$.

❷ (11 bodů)
Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Ve třídě zobecněných funkcí vypočtěte

$$\lim_{\omega\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a\cdot\omega\cdot x)}{x(1+\omega^2x^2)}.$$

K vyčíslení pomocného integrálu užijte větu o derivaci integrálu s parametrem.

❸ (7 bodů)
Metodou postupných aproximací řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \frac{x^2\varphi(y)}{y}\,\mathrm{d}y + x^2.$$

Tvar ℓ–tého přiblížení ověřte detailně indukcí! Odlišná metoda řešení je nepřípustná!

❹ (8 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} + u(x,y) = 0.$$

❺ (6 bodů)
Nechť $t > 0$ je pevně zvolený parametr. Nalezněte spektrum integrálního operátoru

$$\widehat{K} = \int_0^\infty (xy+y^2)\mathrm{e}^{-ty^2} \bullet \,\mathrm{d}y \qquad \big(\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathscr{L}_2(0,+\infty)\big).$$

❻ (5 bodů)
Dokažte, že jsou-li $g(x), g'(x) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, pak funkcionál

$$(\tilde{g}, \varphi(x)) := \int_0^\infty g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

patří do $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Dále vypočtěte jeho první derivaci a výsledek upravte do nejjednoduššího možného tvaru. Jak souvisí $\tilde{g}' \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ s $g'(x)$?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	

Cvičící: KLIKA|KOZAK

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01RMF – varianta B

pondělí 24. listopadu 2014, 13:20–15:20

❶ (4 body)

Nechť $G \subset \mathbf{R}$ je omezená oblast. Dokažte, že vektorový prostor $\mathscr{C}(\overline{G})$ je úplný vzhledem k funkcionální σ–metrice $\|f\|_\sigma$. Důkaz zahajte definicí σ–metriky $\|f\|_\sigma$.

❷ (6 bodů)

Nechť $t > 0$ je pevně zvolený parametr. Nalezněte spektrum integrálního operátoru

$$\widehat{K} = \int_0^\infty y(x+y)\mathrm{e}^{-ty} \bullet \,\mathrm{d}y \qquad \left(\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathscr{L}_2(0,+\infty)\right).$$

❸ (10 bodů)

Nechť $c > 0$ je pevně zvolený parametr. Ve třídě zobecněných funkcí vypočtěte

$$\lim_{\omega\to+\infty} \tilde{f}_\omega := \lim_{\omega\to+\infty} \Theta(x)\mathrm{e}^{-\omega x}\frac{\cos^2(c\omega x) - \cos^2(\omega x)}{x}.$$

K vyčíslení pomocného integrálu užijte větu o derivaci integrálu s parametrem a vztahu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

❹ (8 bodů)

Metodou postupných aproximací řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu\int_0^x y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + x.$$

Tvar ℓ–tého přiblížení ověřte detailně indukcí! Výsledek vyjádřete pomocí speciální funkce

$$\omega_\beta(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-\beta\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

Nápověda: Pro součet Neumannovy řady sestavte Cauchyovu úlohu prvního řádu a tuto vyřešte. Odlišná metoda řešení je nepřípustná!

❺ (5 bodů)

Nechť $\mu \in \mathbf{R}$ je zvoleno pevně a nad prostorem $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ nechť je definován funkcionál

$$(\tilde{f}_\mu, \varphi(x)) := \int_{-\infty}^{\mu} x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Rozhodněte (a rozsáhle zdůvodněte), je-li $\tilde{f}_\mu \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Pokud ano, pak vypočtěte jeho druhou derivaci a výsledek upravte do nejjednodušího možného tvaru.

❻ (8 bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici

$$4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u(x,y).$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01RMF – varianta A

úterý 06/01/2015, 13:30–15:30

❶ (7 bodů)
Aplikací Laplaceovy transformace vypočtěte Lebesgueův integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(x)}{x^4}\,\mathrm{d}x.$$

❷ (8 bodů)
Pro parciální diferenciální operátor

$$\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (a > 0 \wedge b > 0)$$

zformulujte příslušnou Cauchyovu úlohu, převeďte ji do prostoru zobecněných funkcí a nalezněte fundamentální řešení. Pro účely tohoto příkladu si na základě vlastností Fourierova desatera odvoďte Fourierův obraz funkce $g(x) = \mathrm{e}^{-c(x-d)^2}$.

❸ (5 bodů)
Dokažte:

$$g, f_k \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R}) \wedge f_k \xrightarrow{\mathscr{D}'} f \quad \Rightarrow \quad f_k \star g \xrightarrow{\mathscr{D}'} f \star g.$$

❹ (8 bodů)
Fourierova transformace může být, jak známo, zavedena na $\mathscr{S}, \mathscr{L}_1$ nebo $\mathscr{S}'$. Rozhodněte, zda $x^2 \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, resp. $x^2 \in \mathscr{L}_1$, resp. $x^2 \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Je-li vaše odpověď v kterémkoli bodě kladná, vypočtěte $\mathfrak{F}[x^2]$. Při hledání Fourierova obrazu není dovoleno užívat vlastností Fourierova desatera. Jediné, co lze z vlastností Fourierovy transformace užít kromě definic, je: $\mathfrak{F}[\delta] = 1$ a $\mathfrak{F}\mathfrak{F}[f(x)] = \sqrt{2\pi} f(-x)$.

❺ (6 bodů)
Nechť $\mathtt{D} \in \mathbf{R}$ je zvoleno pevně. Pro funkci

$$f_n(x) = \Theta(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\mathtt{D}x} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

odvoďte jednoduchý vzorec pro konvoluci $f_n(x) \star f_m(x)$. Zvažte možné postupy a volte jednodušší variantu výpočtu.

❻ (7 bodů)
Na základě definice tenzorového součinu dokažte, že pro libovolnou zobecněnou funkci $h(t) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Theta_\mu(x) \otimes h(t)) = \delta_\mu(x) \otimes h(t).$$

Důkaz podrobně komentujte a nevyužívejte komutativitu tenzorového součinu! Dokažte také pomocné tvrzení o derivaci centrované Heavisideovy funkce. Jakou hodnotu vrátí zobecněná funkce $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Theta(x) \otimes h(t))$ při volbě $h(t) = t^3$ pro Cimrmanovu buřinku?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01RMF – varianta B

pondělí 12/01/2015, 13:00–15:00

❶ (8 bodů)
Užitím Laplaceovy transformace vypočtěte pro $\alpha, \beta, \gamma > 0$ integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x} \left(\cos^2(\beta x) + \sin^2(\gamma x) - \cos^2(\gamma x) - \sin^2(\beta x)\right) \mathrm{d}x.$$

❷ (5 bodů)
Pro $m, n \in \mathbf{N}$ vypočtěte $\Theta(x)x^n \star \Theta(x)x^m$.

❸ (8 bodů)
Pro parciální diferenciální operátor

$$\widehat{L} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad (a > 0 \wedge b > 0)$$

zformulujte příslušnou Cauchyovu úlohu, převeďte ji do prostoru zobecněných funkcí a nalezněte příslušné fundamentální řešení.

❹ (7 bodů)
Pro Cauchyovu úlohu z předešlého příkladu sestavte příslušné vzorce pro její řešení. Tyto maximálně zjednodušte!

❺ (4 body)
Alespoň dvěma způsoby dokažte v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ rovnost $\delta \star f = f$.

❻ (8 bodů)
Fourierova transformace může být, jak známo, zavedena na $\mathscr{S}, \mathscr{L}_1$ nebo $\mathscr{S}'$. Rozhodněte, zda $x^2 \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, resp. $x^2 \in \mathscr{L}_1$, resp. $x^2 \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Je-li vaše odpověď v kterémkoli bodě kladná, vypočtěte $\mathfrak{F}[x^2]$. Při hledání Fourierova obrazu není dovoleno užívat vlastností Fourierova desatera. Jediné, co lze z vlastností Fourierovy transformace užít kromě definic, je: $\mathfrak{F}[\delta] = 1$ a $\mathfrak{F}\mathfrak{F}[f(x)] = \sqrt{2\pi} f(-x)$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01RMF – varianta C

úterý 06/01/2015, 13:30–15:30

❶ (6 bodů)

Nechť $a > 0$ a $\mu \in \mathbf{R}$ jsou parametry. Pro parametrizovanou funkci

$$g(x|a,\mu) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-a(x-\mu)^2}$$

odvoďte jednoduchý vzorec pro konvoluci $g(x|a,\mu) \star g(x|a,\mu)$. Zvažte možné postupy a volte jednodušší variantu výpočtu.

❷ (7 bodů)

Na základě definice tenzorového součinu dokažte, že pro libovolnou zobecněnou funkci $\beta(t) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Theta_\mu(x) \otimes \beta(t)) = \delta_\mu(x) \otimes \beta(t).$$

Důkaz podrobně komentujte a nevyužívejte komutativitu tenzorového součinu! Dokažte také pomocné tvrzení o derivaci centrované Heavisideovy funkce. Jakou hodnotu vrátí zobecněná funkce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Theta_\mu(x) \otimes \beta(t))$$

při volbě $\beta(t) = (t-\mu)^5$ pro Cimrmanovu buřinku centrovanou do bodu (μ,μ)?

❸ (7 bodů)

Aplikací Laplaceovy transformace vypočtěte Lebesgueův integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \sin(\gamma x)\,\mathrm{d}x, \qquad (\alpha,\beta,\gamma > 0)$$

❹ (8 bodů)

Fourierova transformace může být, jak známo, zavedena na $\mathscr{S}, \mathscr{L}_1$ nebo $\mathscr{S}'$. Rozhodněte, zda $x^2 \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, resp. $x^2 \in \mathscr{L}_1$, resp. $x^2 \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Je-li vaše odpověď v kterémkoli bodě kladná, vypočtěte $\mathfrak{F}[x^2]$. Při hledání Fourierova obrazu není dovoleno užívat vlastností Fourierova desatera. Jediné, co lze z vlastností Fourierovy transformace užít kromě definic, je: $\mathfrak{F}[\delta] = 1$ a $\mathfrak{F}\mathfrak{F}[f(x)] = \sqrt{2\pi} f(-x)$.

❺ (5 bodů)

Dokažte:

$$g, f_k \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R}) \wedge f_k \xrightarrow{\mathscr{D}'} f \quad \Rightarrow \quad f_k \star g \xrightarrow{\mathscr{D}'} f \star g.$$

❻ (8 bodů)

Pro parciální diferenciální operátor

$$\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (a > 0 \wedge b > 0)$$

zformulujte příslušnou Cauchyovu úlohu, převeďte ji do prostoru zobecněných funkcí a nalezněte fundamentální řešení. Pro účely tohoto příkladu si na základě vlastností Fourierova desatera odvoďte Fourierův obraz funkce $g(x) = \mathrm{e}^{-c(x-d)^2}$.

Opravná zápočtová písemná práce z předmětu 01RMF

pondělí 19/01/2015, 13:00–15:00

❶ (7 bodů)
Užitím Laplaceovy transformace vypočtěte konvoluci

$$\Theta(x)\, x\, \mathrm{e}^{-ax} * \Theta(x)\, x\, \mathrm{e}^{-ax} \qquad (a > 0)$$

a dokažte alespoň jeden použitý vztah z Laplaceova desatera.

❷ (8 bodů) Nechť $f, g \in \mathscr{D}'$ jsou zobecněné funkce definované předpisy

$$(f, \varphi(x,y)) := \left(\Theta(x)\sin(x) \otimes y\,\Theta(y)\,,\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right),$$

$$(g, \varphi(x,y)) := \varphi(0,0).$$

Čemu se rovná $g - f$? Výsledek maximálně zjednodušte.

❸ (10 bodů)
Definujte klasickou Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbf{R}^{r+1}$, převeďte ji do prostoru zobecněných funkcí a nalezněte fundamentální řešení příslušného operátoru v $\mathbf{R}^{1+1}$.

❹ (7 bodů)
Nechť

$$f_\varepsilon(x,y) = \Theta(x,y)\, \frac{xy}{\varepsilon^4}\, \mathrm{e}^{-\frac{x+y}{\varepsilon}}.$$

Nechť $\widetilde{f_\varepsilon}$ je zobecněná funkce, jejímž generátorem je funkce $f_\varepsilon(x,y)$. Vypočtěte limitu $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \widetilde{f_\varepsilon}$ ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$.

❺ (10 bodů)
Metodou iterovaných jader řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x x^3 y^3 \varphi(y)\, \mathrm{d}y + x^3$$

Tvar ℓ–tého jádra prověřte detailně matematickou indukcí! Odlišná metoda řešení je nepřípustná!

Pro udělení zápočtu je nutno získat alespoň 21 bodů.