Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

17/01/2017, 9:30-11:30

1 (12 bodů)
Pro diferenciální rovnici

$$x^2(1-x^2)y'' + x(4x^2-5)y' + (8-6x^2)y = 0.$$

existuje monom, který leží v jejím fundamentálním systému. Rovnici vyřešte.

2 (10 bodů)
Nalezněte střed formálního řešení rovnice

$$y'(4x+17y-50) + x + 4y - 12 = 0.$$

Co je tímto formálním řešením? Která z formálních řešení procházejí bodem $(x_0, y_0) = (6, 2)$?

3 (5 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^x)}{\sqrt{x^4+n^2}}$$

na množině všech kladných reálných čísel.

4 (6 bodů)
Nechť je dána množina $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x}, \vec{z}) = |x_1 - z_1| + \lceil |x_2 - z_2| \rceil.$$

Rozhodněte (a řádně zdůvodněte), zda jsou body $\vec{a} = (0,1)$, $\vec{b} = (1,0)$ hromadnými nebo izolovanými body množiny X. Nepřehlédněte horní celou část ve druhém sčítanci!

5 (9 bodů)
Hledejte analytickou funkci $y(x)$, pro kterou platí, že

$$\forall n \in \mathbf{N}_0 : \ y^{(n)}(0) = \frac{3^{n+2}}{n+2}.$$

6 (8 bodů)
Pro kvadriku

$$x^2 - 2xy + u^2 - 2uv + 2v^2 - 2z = 2$$

stanovte obě signatury, normální tvar a příslušnou normalizující transformaci. Je zadaná kvadrika regulární nebo singulární? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

24/01/2017, 9:30–11:30

1 (13 bodů)
Nalezněte řešení diferenciální rovnice
$$(25 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$
procházející bodem $(x_0, y_0) = (4, 13)$ a mající v bodě $x_1 = \sqrt{5/2}$ lokální maximum.

2 (5 bodů)
Rozhodněte, zda v Hilbertově prostoru se skalárním součinem
$$\langle f|g\rangle := 35\int_0^1 f(x)g(x)x^2\,\mathrm{d}x$$
platí, že $x^2 \in \mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(x)$.

3 (9 bodů)
V prostoru $\mathbf{R}^3$ sestrojte polární bázi $\mathcal{B}$, která je generována kvadratickou formou
$$q(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 20z^2 - 4xy - 14xz - 10yz,$$
a splňující následující požadavky:

- $(1, 3, -1)^\mathsf{T} \in \mathcal{B}$
- $\exists \vec{u} \in \mathcal{B} : \langle (0, 0, 1)^\mathsf{T} | \vec{u}\rangle = 0.$

Na základě znalosti polární báze sestavte transformační vztahy $\vec{x} = \mathbb{D}\vec{y}$, které zadanou kvadratickou formu převádějí na její normální tvar. Tento zapište. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

4 (9 bodů)
Ukažte, že z dvojice Abelovo/Dirichletovo kritérium lze pro vyšetření stejnoměrné konvergence řady
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \frac{n}{\sqrt{8n^2 + x^2}}; \qquad M = \mathbf{R}$$
užít pouze jediné. Detailně zdůvodněte!

5 (6 bodů)
Zkompletujte fundamentální systém diferenciální rovnice třetího řádu, víte-li, že se v něm jistě nachází funkce e^{2x}, že nultý koeficient $\wp_0(x)$ v příslušném diferenciálním operátoru je nulový a že hodnota wronskiánu hledaného fundamentálního systému je $4\mathrm{e}^{2x}(2x - 1)$. Výsledek upravte do nejjednoduššího možného tvaru.

6 (8 bodů)
Sestavte číselnou řadu reprezentující hodnotu integrálu
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

07/02/2017, 9:30-11:30

1 (11 bodů)

Formálním řešením diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1}{\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1}$$

je kružnice o poloměru $R = 4\sqrt{2}$. Do přiloženého obrázku (vloženého do složky určené k řešení) dokreslete souřadnicový systém tak, aby korespondoval se zadáním úlohy.

2 (7 bodů)

Nechť je v $\mathbf{R}^3$ dána báze $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ polárně sdružená s kvadratickou formou $q(\vec{x})$, jejíž matice má následující minory $\Delta_1 = -8$, $\Delta_2 = 4$ a $\Delta_3 = -2$. Čemu se rovná $q(\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w})$?

4 (7 bodů)

Nalezněte úplné řešení diferenciální rovnice

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

víte-li, že funkce $v(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ je jedním z jejích řešení.

5 (7 bodů)

Na Hilbertově prostoru se standardním funkcionálním skalárním součinem $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ je dána množina

$$A = \left\{g_a(x) = x + 2\sqrt{a^2x^3 + 6(1 - ax^2)} : \ a \in \mathbf{R}\right\}.$$

Vypočtěte vzdálenost $\operatorname{dist}(x, A)$ funkce x od množiny A.

6 (10 bodů)

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n)!!}{(4n+1)!!} \frac{\cosh(nx) + \sinh(nx)}{\cosh(nx)}$$

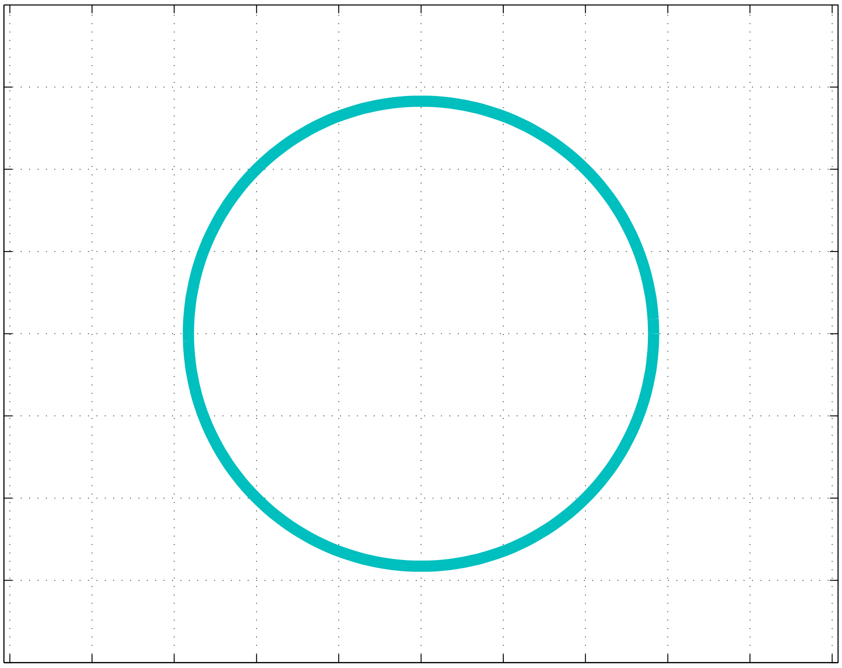
na množině $U = \langle 0, \infty)$.

3 (8 bodů)

Ověřte splnění (popř. prokažte nesplnění) nutné podmínky stejnoměrné konvergence funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^x)}{\sqrt{x^4 + n^2}}$$

na množině všech kladných reálných čísel.



Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

14/02/2017, 9:30–11:30

1 (9 bodů)
Pro kvadriku

$$x^2 - 4xy - 14xz + 4y^2 + 29yz + 49z^2 = 0$$

stanovte obě signatury, normální tvar, polární bázi a příslušnou normalizující transformaci. Je zadaná kvadrika regulární nebo singulární? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

2 (10 bodů)
Určete Taylorovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

v bodě $x_0 = 7$ a stanovte její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály.

3 (5 bodů)
Co nejpřesněji vykreslete okolí $\mathcal{U}_6(0,0)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x},\vec{z}) = 3\sqrt{|x_1 - z_1|} + 2\sqrt{|x_2 - z_2|}.$$

4 (9 bodů)
Nalezněte úplné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

5 (9 bodů)
Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{5^m}.$$

Výsledek upravte do tvaru zlomku v základním tvaru.

6 (8 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$y - 2x = y'(y - x)$$

a rozhodněte, co nalezené řešení představuje.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

08/03/2017, 9:20-11:20

1 (5 bodů)
Dokažte, že matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \langle\vec{u}|\vec{u}\rangle & \langle\vec{w}|\vec{u}\rangle \\ \langle\vec{u}|\vec{w}\rangle & \langle\vec{w}|\vec{w}\rangle \end{pmatrix}$$

je téměř za všech okolností (tj. skoro pro všechny volby vektorů $\vec{u}, \vec{w}$ z libovolného prehilbertovského prostoru) pozitivně definitní. Kdy tomu tak není?

2 (7 bodů)
Následující úloha se odehrává na jistém Hilbertově prostoru funkcí definovaných na $\langle 0, +\infty)$, kde je zaveden skalární součin s Laguerreovou vahou $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Je-li níže uvažováno o čísle ε, myslí se jeho konkrétní hodnota, a sice $\varepsilon = \frac{\sqrt{7!}}{3^9}$. Při řešení lze užít faktu, že

$$\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x = \frac{(m-1)!}{\beta^{m+1}}.$$

Znění úlohy: Kolik členů posloupnosti $(x^n \mathrm{e}^{-nx})_{n=1}^\infty$ neleží v ε–ovém okolí její limitní funkce?

3 (9 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 3y' - 2y = 6\mathrm{e}^{-x} - 4x\mathrm{e}^{x}.$$

4 (8 bodů)
Vyšetřete obor konvergence řady

$$\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{7}{m^2} + \frac{2}{m}\right)(x+4)^m.$$

5 (10 bodů)
Sestavte Cauchyovu úlohu pro součet mocninné řady

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{x^{4m}}{(4m)!}$$

a tuto vyřešte.

6 (11 bodů)
Nalezněte řadu reprezentující funkci

$$\varphi(x) = \int_0^x \sum_{m=1}^\infty \frac{2y}{m^4 + y^4}\,\mathrm{d}y$$

a rozhodněte, zda na svém oboru konvergence konverguje stejnoměrně.