Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

11/01/2018, 9:00-11:00

1 (8 bodů)
Pro která β reprezentuje vztah

$$2x + x^2 - 6y - 4xy + 3y^2 - 64z - 4xz + 12yz + 16z^2 = \beta$$

rovnici eliptického kužele? A jaký je jeho střed? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

2 (7 bodů)
Čemu se rovná součet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{2^k} \ ?$$

3 (10 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2(m+1)^2}{x^4 + m^4}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

4 (8 bodů)
Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbf{R}$ taková, aby v Hilbertově prostoru $[1, x, x^2, \ldots, x^8]_\lambda$ se skalárním součinem

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 x^\alpha f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$$

svíraly funkce x a x^2 úhel $45°$.

5 (8 bodů)
Detekujte obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} (x-1)^n.$$

6 (9 bodů)
Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + y'' - 10y' = 20,$$

jehož Maclaurinův polynom třetího stupně je tvaru $1 + 6x - 4x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

17/01/2018, 9:00-11:00

1 (9 bodů)
Vypočítejte

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\sqrt[4]{3}}\frac{x^3+x^5+xn^2+x}{(x^2+n^2)(x^4+1)}\,\mathrm{d}x.$$

2 (7 bodů)
Má množina $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ |x|+|y|\leqslant 1\}$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\sigma(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{3}\Theta(|x_1-y_1|)+|x_2-y_2|$$

nějaké izolované body? Vykreslete také tvary okolí $\mathcal{U}_{1/3}(0,0)$, $\mathcal{U}_{1/2}(0,0)$ a $\mathcal{U}_1(0,0)$. Pozn. $\Theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

3 (8 bodů)
Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathbf{R}^2$, v němž množina

$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ 2x+x^2+2(a-b+ax)y+(a^2+b^2)y^2<7\right\}$$

reprezentuje okolí bodu $(3,1)$ o jistém neznámém poloměru ε. Čemu se musejí rovnat čísla a a b? A jaký je potom poloměr uvedeného okolí? Nápověda: rozmyslete, co mají všechna okolí bodu $(3,1)$ společného.

4 (8 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu pro diferenciální rovnici

$$y'''-y''-9y'+9y=24\mathrm{e}^{-3x},$$

$$y(0)=8\quad\&\quad y'(0)=-7\quad\&\quad y''(0)=34.$$

5 (9 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(3m-1)!!!}{(3m+1)!!!}\frac{x^2}{\sqrt{m^6+2x^6}}$$

na množině $\langle 0,\infty)$.

6 (9 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy'+2y=4x^2\mathrm{e}^{x^2}+2x^2y,$$

procházející bodem a) $(x,y)=(1,4\mathrm{e})$, b) $(x,y)=(0,0)$, pokud existují.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

25/01/2018, 9:00-11:00

1 (7 bodů)
(Tuto úlohu řešte na zadní straně tohoto zadání.) Jsou v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varkappa(\vec{z}, \vec{y}) = 5|z_1 - y_1| + 2|z_2 - y_2|$$

množiny $\mathcal{U}_{10}(0,0)$ a $\mathcal{U}_{10}(4,0)$ oddělené nebo ne? Obě množiny načrtněte do obrázku na zadní straně zadání a své tvrzení podrobně vysvětlete!

2 (9 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu pro diferenciální rovnici

$$y''(x+1)^2 + 4y'(x+1) + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

3 (8 bodů)
Pro které $a \in \mathbf{Z}$ nerozhodne o konvergenci v krajních bodech oboru konvergence řady

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m-a)!!}{m! \cdot (m-1)!} x^m$$

Raabeovo kritérium?

4 (9 bodů)
Ukažte, že implicitním řešením rovnice

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4y - x + 2}$$

je systém jistých kuželoseček. Stanovte jejich typ a střed, existuje-li. Která z řešení procházejí bodem $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?

5 (6 bodů)
Pro jaké $\alpha \in \mathbf{R}$ je bod $(11, 3)$ hraničním bodem okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 5$ v Hilbertově prostoru $\mathbf{R}^2$ se skalárním součinem

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}?$$

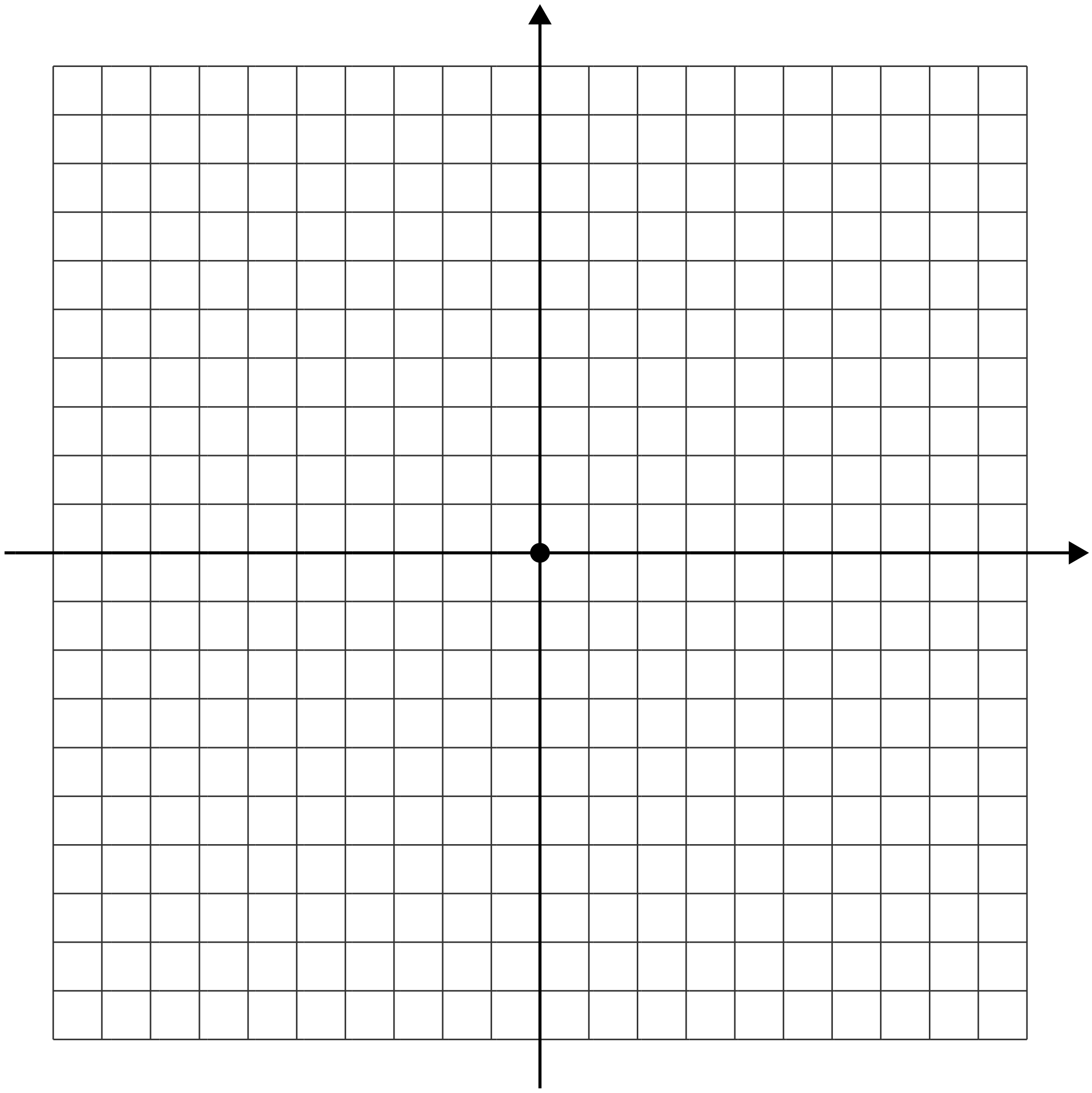
Neopomeňte prověřit, zda uvedený předpis pro zjištěné α skutečně skalární součin zadává!

6 (11 bodů)
Sestavte Taylorovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{7+x}}$$

v bodě $x = 9$. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály. Určete také obor konvergence vypočtené řady.

❶ Jsou v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou $\varkappa(\vec{z},\vec{y}) = 5|z_1 - y_1| + 2|z_2 - y_2|$ množiny $\mathcal{U}_{10}(0,0)$ a $\mathcal{U}_{10}(4,0)$ oddělené? Obě množiny načrtněte do obrázku na zadní straně zadání a své tvrzení podrobně vysvětlete!



Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

13/02/2018, 9:00-11:00

1 (10 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \frac{10}{x}\mathrm{e}^{2x}.$$

2 (6 bodů)
Jaká je v Hilbertově prostoru $\mathscr{H} = [1, x, x^2, \dots, x^8]_\lambda$ se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = 30\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

vzdálenost množiny $A = \{g(x) \in \mathscr{H} : g(x) = ax \wedge a \in \mathbf{R}\}$ od prvku x^2?

3 (11 bodů)
Rovnice

$$xy' - 2y = 5x, \quad x^2(1-x^2)y'' + (4x^3 - 5x)y' + (8 - 6x^2)y = 0$$

mají neprázdný průnik fundamentálních systémů. Vyřešte je.

4 (10 bodů)
Lze nebo nelze užitím Weierstrassova kritéria rozhodnout o stejnoměrné konvergenci funkcionální řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{(4n-5)!!}}{4^n(n-1)!}\frac{x}{x^2+n^2}$$

na množině všech reálných čísel?

5 (9 bodů)
V prostoru $\mathbf{R}^3$ je zadána kvadrika rovnicí

$$2x_1^2 + 31x_2^2 - 2x_3^2 + 16x_1x_2 - 4x_1x_3 - 20x_2x_3 = 16.$$

Stanovte její hlavní a vedlejší signaturu, název a normální tvar. Dále rozhodněte, jedná-li se o regulární či singulární kvadriku. Pro příslušnou kvadratickou formu poté stanovte typ definitnosti.Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

6 (4 body)
Jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet řady

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1}\frac{3^m x^{m+1}}{m!},$$

jsou-li x volena z množiny kladných reálných čísel?

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

03/05/2018, 12:20-14:20

1 (5 bodů)
Lineární varieta

$$\Omega_q = \left[e^{3x}\cos(x); e^{3x}; xe^{3x}; e^{3x}\sin(x)\right]_\lambda + x$$

je prostorem všech řešení jisté diferenciální rovnice. Nalezněte ji.

2 (7 bodů)
Na prostoru $\mathbf{R}^2$ je zadána metrika

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) := |x_1 - y_1| + \Theta(|x_2 - y_2|).$$

Rozhodněte, zda je bod $\vec{a} = (1, 1)$ vnitřním či hraničním bodem množiny $B = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Nápověda: Funkce $\Theta(x)$ je zadána předpisem

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 \ldots x > 0 \\ 0 \ldots x \leqslant 0. \end{cases}$$

3 (10 bodů)
Rozhodněte, zda lze užitím Weierstrassova kritéria rozhodnout o stejnoměrné konvergenci funkcionální řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{(2n+1)!!} x e^{-xn}$$

na množině kladných reálných čísel.

4 (8 bodů)
Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce $g(x) = \operatorname{arctg}(x^3)$ a její obor konvergence.

5 (10 bodů)
V prostoru $\mathbf{R}^3$ je zadána kvadrika rovnicí

$$x^2 - 4xy + 4xz - 6x + 3y^2 - 6yz + 2y + 4z^2 - 10z = 0.$$

Stanovte její hlavní a vedlejší signaturu, název a normální tvar. Dále rozhodněte, jedná-li se o regulární či singulární kvadriku a určete polohu jejího středu. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

6 (10 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$y'' - \frac{y'}{x} - 3\frac{y}{x^2} = 0 \quad \& \quad y(2) = 26 \quad \& \quad y'(2) = 35.$$

Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB3

29/05/2018, 9:00-11:00

1 (11 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 8x^3\mathrm{e}^{2x}.$$

Funkci nutnou pro snížení řádu lze nalézt velice snadno.

2 (8 bodů)
Vyšetřete obor konvergence O mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-2)!!}{(2n)!} \frac{(x-7)^n}{n}.$$

3 (8 bodů)
Nalezněte funkci $y(x)$ vyhovující rovnosti

$$y'' - 4y' + 4y = (6x+2)\mathrm{e}^{2x}$$

a podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$.

4 (7 bodů)
Pro která $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ zadává vztah

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} \beta & -2 & -2 \\ \alpha & \beta & -2 \\ -2 & -2 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

skalární součin v $\mathbf{R}^3$?

5 (7 bodů)
Stanovte typ kvadratické plochy

$$x^2 - xy + xz - 2yz + x + y + z = 0,$$

její hlavní signaturu a střed. Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují!

6 (9 bodů)
Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

a její obor konvergence.