Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

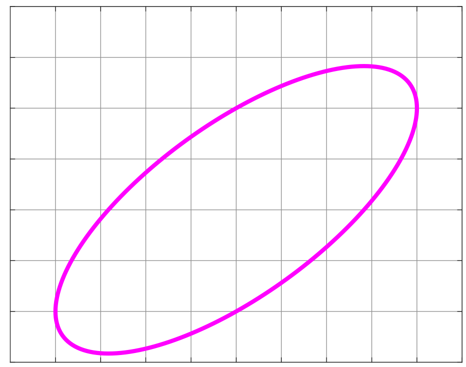
09/01/2020, 9:00-11:00

1 (8 bodů)

Kde na obrázku leží bod $(6, 3)$? Užijte faktu, že zakreslená křivka představuje formální řešení rovnice

$$y'(2y - x) + x - y - 1 = 0$$

a uvedený bod na ní leží. Poznámka: Čtverečky v obrázku mají rozměr 1×1.



2 (10 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n)!!}{(4n+1)!!} \frac{\cosh(nx) + \sinh(nx)}{\cosh(nx)}$$

na množině $A = \langle 0, \infty)$.

3 (9 bodů)
Rovnici

$$xy''' + (3 - 6x)y'' + 12(x - 1)y' + (12 - 8x)y = -8x^2 + 24x - 12$$

řeší funkce $w_1(x) = x(e^{2x} + 1)$ a $w_2(x) = x$. Nalezněte všechna její řešení.

4 (8 bodů)
Nechť $a > 0$ je zvoleno pevně. Přímou metodu (tj. dosazením do definičního vztahu a bez použití rozvojů elementárních funkcí) sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x) = \ln(1 + ax),$$

nalezněte její obor konvergence a prokažte, že součtem získané řady je skutečně funkce $g(x)$.

5 (6 bodů)
Která z funkcí x^2, x^6 svírá s funkcí x^4 větší úhel? Úlohu řešte pro Hilbertův prostor spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Skalární součin zaveďte jako standardní.

6 (9 bodů)
Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

Návod: Řadu čtyřikrát derivujte a sestavte Cauchyovu úlohu pro její součet. Tuto vhodnými metodami řešte.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

15/01/2020, 9:00-11:00

1 (10 bodů)
Sestavte Taylorovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{7+x}}$$

v bodě $x = 9$. Nalezenou řadu upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály a poté určete obor konvergence vypočtené řady.

2 (5 bodů)
Pro která $\alpha \in \mathbf{R}$ má kvadratická plocha

$$x^2 - 2\alpha xy + \alpha y^2 + 2\alpha x = \alpha^2$$

hlavní signaturu rovnou trojici $(1, 1, 1)$? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

3 (10 bodů)
Nalezněte alespoň jedno explicitní a poté i všechna implicitní řešení (tj. řešení ve formálním tvaru) rovnice

$$y' = \frac{-x + 3y - 10}{x + y + 2}.$$

Nalezená řešení upravte do tvaru, který neobsahuje logaritmy.

4 (10 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)!!} \frac{2^n \cdot n^2}{n^2 + x^2}$$

na množině $A = \langle 0, \infty)$.

5 (10 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \frac{10}{x} \mathrm{e}^{2x}.$$

6 (5 bodů)
Vykreslete okolí $\mathcal{U}_6(0,0)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = 2\lceil |x_1 - y_1| \rceil + |x_2 - y_2|.$$

Nepřehlédněte horní celou část v prvním sčítanci!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

23/01/2020, 9:00-11:00

1 (5 bodů)
Pro dvě funkce $f(x), g(x)$ z Hilbertova prostoru platí rovnosti:

$$\langle g|g\rangle = 5, \quad \langle f|f\rangle = 3, \quad \varrho(f,g) = 2, \quad \varrho(f, \mathrm{i}g) = \sqrt{2}.$$

Vypočítejte, jakou hodnotu má skalární součin $\langle g|f\rangle$.

2 (9 bodů)
Pro kvadratickou plochu

$$x^2 - 4xy + 2xz + 3y^2 - 6yz + 9z + 9 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar, název a střed. Stanovte také normalizující transformaci a její tvar upravte do maticové podoby. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

3 (10 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx}{\sqrt{1 + 3n^4x^2}}$$

na množině $A = \langle 0, \infty)$.

4 (9 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2\frac{y}{x^2} = 54 \ln(x).$$

5 (6 bodů)
V metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ je zadána metrika

$$\varkappa(\vec{x}, \vec{y}) = a|x_1 - y_1| + b|x_2 - y_2|,$$

kde $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Načrtněte okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{0})$ a vypočítejte jeho obsah.

6 (11 bodů)
Sestavte Taylorovu řadu funkce

$$g(x) = \int_3^x \frac{1}{\sqrt{y+1}}\,\mathrm{d}y$$

se středem v bodě $x = 3$ a určete její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály.
Návod: řešení zahajte hledáním Taylorovy řady integrandu v bodě $y_0 = 3$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

30/01/2020, 9:00-11:00

1 (9 bodů)
Nalezněte součtovou funkci pro řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

a její definiční obor.

2 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^n x}{\mathrm{e}^n(n^2+x^2)}$$

na množině všech reálných čísel.

3 (6 bodů)
Nalezněte průnik jader operátorů

$$\hat{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(2 - \frac{2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{2+x(x-2)}{x^2}, \quad \hat{K} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

4 (11 bodů)
Nalezněte všechna řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$x^3y''' - 2x^2y'' - 8xy' + 20y = \left(\frac{28}{x}\right)^2.$$

Neopomeňte hledat také řešení s definičním oborem rovným intervalu $(-\infty, 0)$.

5 (8 bodů)
Nechť je v prostoru $\mathbf{R}^2$ zadána metrika $\varrho(\vec{x},\vec{y}) := \max\{3|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. Rozhodněte, zda existuje bod $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$, který

1. současně leží v okolích $\mathcal{U}_6(0,0)$ a $\mathcal{U}_3(3,9)$;
2. současně leží v uzávěrech okolí $\overline{\mathcal{U}_6(0,0)}$ a $\overline{\mathcal{U}_3(3,9)}$.

Obě okolí podrobně načrtněte! Dále rozhodněte, zda má posloupnost se členy

$$\vec{x}_n = \left(\frac{n+3}{n+2}; \frac{(n+3)^2}{(n+2)^2}\right)$$

v takovém metrickém prostoru limitu či ne.

6 (8 bodů)
V závislosti na hodnotě $\mu \in \mathbf{R}$ určete hlavní signaturu kvadriky

$$Q(x,y,z) = \mu^2 + x^2 + 2\mu x(1+y) - z^2 - 9 = 0$$

a její střed.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

03/02/2020, 9:00-11:00

1 (4 body)
Ze které Eulerovy diferenciální rovnice vznikne substitucí $x = \mathrm{e}^t$ rovnice $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = 0$?

2 (9 bodů) Vypočtěte

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty x\mathrm{e}^{-n^4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Užijte faktu, že $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Neopomeňte diskutovat oprávněnost všech operací.

3 (8 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(4n-3)!!!!}{n!}(x-1)^{2n}.$$

Jak se změní výsledek, pokud ze zadání zmizí faktor $(-1)^n$?

4 (10 bodů)
Rozhodněte, zda je možno derivovat řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+8n^2}}$$

na libovolném intervalu $(-c, c)$, kde $(c > 0)$, člen po členu. Korektně a detailně zdůvodněte!

5 (10 bodů)
Formálním řešením úlohy

$$2y' = \frac{y}{x} - 3 - \frac{9x}{3x+y}, \qquad y\left(\frac{2}{3}\right) = -2$$

je jistá kuželosečka. Jaká? Nalezněte její střed, existuje-li.

6 (9 bodů)
Pro která $\mu \in \mathbf{R}$ je kvadratická forma

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} \mu & -1 & -1 \\ -1 & \mu & -1 \\ -1 & -1 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

semidefinitní? Stanovte, zda pozitivně či negativně a pro nalezená μ zapište vektorové spektrum dané formy. Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB3

19/02/2020, 9:00-11:00

1 (8 bodů)
Rozhodněte, zda je možno derivovat řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^4x^2}}{n^4}$$

na $\mathbf{R}$ člen po členu. Korektně a detailně zdůvodněte!

2 (6 bodů)
Nalezněte vektorové spektrum matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a na jeho základě určete obě signatury a název kvadriky $\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\vec{x} = 1$.

3 (6 bodů)
Která z funkci x^α $(\alpha \geqslant 0)$ leží nejblíže funkci $4x^2$ v Hilbertově prostoru, který je zaveden skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x?$$

4 (10 bodů)
Řešte diferenciální rovnice

$$y'' - 8y' + 16y = 12x\mathrm{e}^{4x}, \quad y'' - 8y' + 16y = 12x^{-1}\mathrm{e}^{4x}.$$

5 (10 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2x \cdot y' = \frac{2y^2 - x^2}{2y + x}$$

vyhovující podmínce $y(4) = 0$. Detailně diskutujte, jakou kuželosečku vypočtené řešení představuje a jaký je její střed. Formální řešení také načrtněte.

6 (10 bodů)
Sestavte Taylorovu řadu funkce

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{y^2 + 4}\,\mathrm{d}y$$

se středem v bodě $x = 0$ a určete její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály.