Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4

04/06/2019, 9:00-11:00

1 (9 bodů) Pro parametry $a > 0$ a $b, c \in \mathbf{R}$ vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \frac{\cos^2(cx) - \cos^2(bx)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

2 (5 bodů) Rozhodněte, pro která $a \in \mathbf{R}$ platí tvrzení $\Theta(x)\Theta(1-x)x^a \in \mathscr{L}(\mathbf{R}, \lambda)$.

3 (11 bodů) Vyšetřete lokální extrémy funkce z, jež je zadána rovnicí

$$z^3 + 3uz^2 + 4x^2 + 24xy - u^3 + 68y + 2y^2 = 37.$$

Omezte se na případ, kdy $z > 0$ a současně $u > 0$.

4 (6 bodů) Heineovou větou rozhodněte, zda má funkce

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x+3)}{y^2+(x+3)^2} + 3(x-1) & \ldots \quad (x,y) \neq (-3,0), \\ -12 & \ldots \quad (x,y) = (-3,0), \end{cases}$$

limitu v bodě $(-3, 0)$. Své tvrzení podrobně komentujte!

5 (9 bodů) Nalezněte obecnou rovnici tečné roviny k ploše

$$\frac{x^2y^2}{a^4} + \frac{y^2z^2}{b^4} + \frac{x^2z^2}{c^4} = 1$$

v jejím bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledek maximálně zjednodušte.

6 (10 bodů) Vypočtěte

$$\int_{\mathrm{bd}(Q)} (y^3; -3xy^2) \, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge y > 1\}$. Rozvažte, zda nelze k výpočtu užít některou z integrálních vět.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4

11/06/2019, 9:00-11:00

1 (9 bodů) Vypočítejte integrál z vektorové funkce $(6x^2y^3, x^3y^2)$ po křivce

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^4=\frac{2xy}{ab}.$$

2 (12 bodů) Pro funkci $z(x,y)$, jež je implicitně zadána soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+16u &= 22,\\ z^3-2z^2y-4xyz+8x^2y^2 &= 0, \end{aligned}$$

určete hodnotu Laplaceova operátoru Δz v bodě $\vec{a}=(1,1)$.

3 (9 bodů) Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x,y,z)=xy^2z(10-2x-y-z)$ na množině $(0,+\infty)^3$.

4 (6 bodů) Nechť $a,b>0$ jsou pevně zvolené parametry. Zapište parametrizaci množiny

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbf{E}^2:\ \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}\ \wedge\ x\geqslant 0\ \wedge\ y\geqslant 0\right\}.$$

5 (8 bodů) Dvoudimenzionální míra $\mu(X)$ je zadána prostřednictvím dvou vytvořujících funkcí:

$$\psi(y)=y^3 \quad \& \quad \varphi(x)=\begin{cases} x & x<0,\\ 1+x^2 & x\geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Určete obsah elipsy

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}.$$

6 (6 bodů) Pro funkci

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2x^2}{(y^2+x^2)^{3/2}}+2x+3y+1 & \ldots\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \ldots\quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

vypočítejte směrovou derivaci ve směru $\vec{s}=(1,1)$ v bodě $(0,0)$ a hodnotu

$$\frac{\langle\vec{s}\,|\operatorname{grad} g(0,0)\rangle}{\|\vec{s}\|}$$

a diskutujte vztah mezi oběma výsledky. Jaký fakt z něho vyplývá?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB4

17/06/2019, 9:00-11:00

1 (8 bodů) Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x + 6y$ na množině

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \; x^2 + y^2 - 6x + 8y \leqslant 15\right\}.$$

Čemu se rovná $f(M)$ a proč?

2 (10 bodů) Nechť je dána množina $Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; \left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2 \;\wedge\; z = 7 \;\wedge\; x > 0\right\}$. Vypočítejte integrál

$$\int_Z z(x^3 - xy^2)\,\mathrm{d}\mu_c(x, y, z).$$

3 (13 bodů) Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2u(x, y) = 0$$

užitím transformace

$$(r, s) = \left(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{y}\right).$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadané transformace.

4 (5 bodů) Nalezněte alespoň jednu funkci, která splňuje všechny následující vlastnosti: V počátku souřadné soustavy má funkční hodnotu rovnou nule. Má stacionární bod, jehož všechny souřadnice jsou rovny jedné, a její Hessova matice v tomto stacionárním bodě má všech svých devět členů rovných třem. Nápověda: úloha má jedno- až dvouřádkové řešení.

5 (6 bodů) Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Zapište parametrizaci množiny

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \; \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} \;\wedge\; x > 0 \;\wedge\; y > 0\right\}.$$

6 (8 bodů) Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochou

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

Výsledek vyjádřete pomocí Gamma-funkce (viz zadní strana zadání).

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB4

26/06/2019, 9:00-11:00

1 (7 bodů) Vypočítejte integrál z funkce x^2y^2 přes množinu $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$.

2 (9 bodů) Nalezněte jednotkový směr, v němž funkce $z(x,y)$ (zadaná níže uvedenou soustavou rovnic) v bodě $(a_x, a_y) = (-1, 1)$ nestoupá ani neklesá.

$$32(x^2 + y^2) = z^2 + 32u^3, \quad 4(x + y) = 8 + 4u - z.$$

3 (8 bodů) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ na vazbě $4x + 2y + z = 7$.

4 (9 bodů)
Vyčíslete hodnotu integrálu

$$H(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \cos(ax)\,\mathrm{d}x$$

v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbf{R}$. Všechny tři předpoklady užité věty explicitně ověřte. Hodnotu Gaussova integrálu odvoďte!

5 (8 bodů) Vypočítejte objem a těžiště koule o poloměru R, je-li míra zadána prostřednictvím vytvořujících funkcí $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = \Theta(y)y^2$, $\omega(z) = z^3$. Symbol $\Theta(y)$ reprezentuje Heavisideovu skokovou funkci.

6 (9 bodů) Parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 40x^5 y$$

transformujte substitučními vztahy $r = xy$ a $s = x^2/y^2$ a vyřešte ji!

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB4

01/07/2019, 9:00–11:00

1 (5 bodů) Zapište všech pět axiomů míry a ukažte, že jeden z nich lze z definice míry vynechat, tedy že uvedená vlastnost může být dokázána ze zbylých čtyř.

2 (9 bodů) Vypočítejte:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^6} - \mathrm{e}^{-bx^6}}{x^4}\, \mathrm{d}x.$$

Tvrzení o integrabilní majorantě explicitně (tj. výpočtem) prokažte. Dále ukažte, že integrand (ačkoli sám není spojitý v nule) je na $\langle 0, +\infty)$ ekvivalentní s jistou spojitou funkcí. Zapište ji.

3 (9 bodů) Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte klasickou třídimenzionální míru množiny

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}} \right\}.$$

4 (8 bodů) Ověřte, že soustava rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0, \quad u = xy^2z^3$$

zadává na okolí bodu $\vec{\lambda} = (1, 1, 1, 1)$ funkci $u(x, y)$. Poté vypočítejte její totální diferenciál prvního řádu v bodě $\vec{a} = (1, 1)$. Na základě znalosti totálního diferenciálu pak sestavte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $u(x, y)$ v bodě $\vec{a}$.

5 (9 bodů) Nechť $a > 0$ je parametr. Vypočítejte integrál z funkce $g(x, y) = xy$ přes množinu

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y > 0 \wedge (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \right\}.$$

6 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = yz + 2x(y + z)$$

na části elipsoidu

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x, y, z > 0 \wedge 4x^2 + y^2 + z^2 = 12 \right\}.$$

Pozn. Je-li chybně určen stacionární bod (stacionární body), v opravě se dále nepokračuje.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB4

16/07/2019, 9:00–11:00

1 (7 bodů) Na elipsoidu

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2xz + 2yz + 6z^2 = 1$$

nalezněte bod s nejvyšší hodnotou složky z. Řešení zahajte slovním popisem postupu, který k tomu hodláte využít.

2 (9 bodů) Aplikací vhodné integrální věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{bd}(A)} (0; x^2 y)\,\mathrm{d}\mu_c(x, y),$$

kde

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{5}{12}} \leqslant \frac{x}{a} \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\right\}.$$

3 (10 bodů) Nechť $a, b, c > 0$ a $c \notin \{a, b\}$. Užitím věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + c^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right)\mathrm{d}x.$$

Nepodceňte diskusi formalit řešení.

4 (9 bodů) Jaký je podíl plochy útvaru

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x, y \geqslant 0 \wedge \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} \leqslant 1\right\}$$

ku ploše obdélníku $O = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$ při volbě vytvořující funkce $\varphi(\tau) = \tau^3$? Situaci pro přehlednost nakreslete do obrázku.

5 (6 bodů) Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3(y+2)^2 x^4}{(y+2)^4 + 5x^8} & \dots \quad (x, y) \neq (0, -2), \\ \frac{4}{7} & \dots \quad (x, y) = (0, -2), \end{cases}$$

je spojitá v bodě $(0, -2)$ vzhledem k jistým množinám $M_{\alpha\beta} = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : y = \alpha x^2 + \beta\}$. Kolik řešení má daná úloha?

6 (9 bodů) Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - 3u(x, y) = 0.$$

Užijte k tomu zobrazení $(r; s) = (y + \ln(x); x)$.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 7 z předmětu 01MAB4

31/07/2019, 9:00-11:00

1 (10 bodů)

Nechť $a > 0$. Užitím věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x.$$

2 (9 bodů)

Vypočítejte objem tělesa

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \ x,y,z > 0 \ \wedge \ \left(\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^{7/2} \leqslant \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 - \frac{z^4}{c^4}\right\}.$$

3 (5 bodů)

Rozhodněte, zda má funkce

$$h(x,y) = \begin{cases} 2(x+5) + \frac{y(x+2)}{y^2+(x+2)^2} & \dots \ (x,y) \neq (-2,0), \\ 6 & \dots \ (x,y) = (-2,0), \end{cases}$$

limitu v bodě $(-2,0)$. Své tvrzení podrobně komentujte!

4 (10 bodů)

Nalezněte lokální extrémy funkce $g(x,y,z) = xy(z^2-9)$ na množině

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \ x,y,z > 0 \ \wedge \ 3x^2 + 3y^2 - z^4 = 0\right\}.$$

5 (7 bodů)

Nechť $a,b,c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Nalezněte obecnou rovnici tečné roviny k ploše

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - \frac{z^3}{c^3} = 1$$

v jejím bodě (x_0, y_0, z_0). Upravte do elegantního tvaru. Diskutujte rozsah platnosti výsledku.

6 (9 bodů)

Nechť $a > 0$ je zvoleno pevně. Křivku

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : y = a \ \wedge \ x^2 + z^2 = 4az\}$$

korektně parametrizujte a poté vypočtěte integrál

$$\int_W z^2 y \,\mathrm{d}\mu_c(x,y,z).$$

Jakou geometrickou představu o křivce máte?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 8 z předmětu 01MAB4

27/08/2019, 9:00-11:00

1 (4 body) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + xz + yz$.

2 (9 bodů) Jaký je podíl plochy (v procentech) útvaru

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} \leqslant 1\right\}$$

ku ploše obdélníku $O = \langle -a, a\rangle \times \langle -b, b\rangle$ při volbě vytvořující funkce $\varphi(\tau) = \tau^5|\tau|$? Neopomeňte teoretické aspekty řešení (např. splnění předpokladů u použitých metod) .

3 (7 bodů)
Prověřte, zda má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + \frac{2x^5}{x^4+y^2} + 3y - 8 & \ldots \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ -8 & \ldots \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál v bodě $(0, 0)$. Své tvrzení podrobně komentujte!

4 (12 bodů) Nalezněte Taylorův polynom prvního stupně funkce $u = u(x, y, z)$ v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0) = (2, 3, -1)$. Funkce $u = u(x, y, z)$ nechť je zadána rovnicí

$$u^3 - xu^2 - 4zu + y - 4u = 3.$$

Dále vypočtěte $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(\vec{a})$.

5 (9 bodů)
Nechť $a > 0$ je zvoleno pevně. Křivku

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + 6ax + y^2 - 8ay = 0 \ \wedge\ z = a\}$$

korektně parametrizujte a poté vypočtěte integrál

$$\int_W \frac{x^2}{z^2}\, \mathrm{d}\mu_c(x, y, z).$$

Jakou geometrickou představu o křivce máte?

6 (9 bodů)
Vypočítejte integrál $\int_U \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}\, \mathrm{d}(x, y, z)$, kde

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x, y, z \geqslant 0 \ \wedge\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 \leqslant \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right\}.$$