Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMDS – varianta 01

úterý 5. června 2018, 9:00–11:00

1 (7 bodů)
Definujte *Balanční částicový systém* a vysvětlete, co v něm představují pojmy *rozteč* $\mathcal{R}_0$, *multirozteč* $\mathcal{X}_n$, *intervalová frekvence* $\mathcal{N}_\mathrm{L}$ a tzv. *trendová funkce* $\lambda(L)$.

2 (10 bodů)
Veličinu $\mathbb{E}(\mathcal{N}_\mathrm{L}^2)$, kde $\mathcal{N}_\mathrm{L}$ je intervalová frekvence balančního částicového systému, přepište do tvaru využívajícího pouze shlukové funkce.

3 (10 bodů)
Zreplikujte Montrollův mikroskopický model z roku 1969 a ukažte, jak lze matematickými úpravami dospět ke Greenbergově makroskopické závislosti (publikované o třicet let dříve) mezi intenzitou (tokem) a hustotou.

4 (4 body)
Vysvětlete, co představuje pojem *statistická rezistivita* částicového systému. Jaké stavy popisují krajní varianty přípustných hodnot statistické rezistivity?

5 (8 bodů)
Dokažte: Má-li veličina $\mathcal{N}_\mathrm{L}$ Poissonovo rozdělení, pak má rozteč $\mathcal{R}_0$ exponenciální rozdělení a navíc pro hustotu $n-$té multisvětlosti $\mathcal{X}_n$ platí, že $g_n(x) = \bigstar_{\ell=0}^{n} g_0(x)$.

6 (11 bodů)
Nechť $\wp(r)$, resp. $q(v)$ jsou hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost, resp. rychlost vozidel v dopravním vzorku. Odvoďte hustotu pravděpodobnosti pro časový odstup vozidel. Jaký předpoklad je třeba při výpočtu použít? Výsledek aproximujte za použití Taylorova rozvoje vhodné funkce a užitím předpokladu, že rychlost v je gaussovsky rozdělena. Velikosti centrálních momentů normálního rozdělení odvoďte ze vztahu

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^m \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \, \mathrm{d}x = \Theta(1 + (-1)^m) \frac{m! \, b^m}{m!!}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMDS – varianta 02

úterý 26. června 2018, 9:00–11:00

1 (5 bodů)
Definujte *termodynamický dopravní plyn* a jeho atributy. Co se u takového plynu rozumí pod pojmem *termální rovnováha?* Jak jsou v takovém plynu rozděleny vzdálenosti sousedních částic při nulové hodnotě stochastické rezistivity?

2 (12 bodů)
V dopravním systému ideálních (bezrozměrných) vozidel bylo detekováno rozdělení vzdáleností sudých vozidel (rozumí se samozřejmě nejbližších sudých). Příslušnou hustotou pravděpodobnosti byla zjištěna funkce

$$f(x) = \frac{8}{3}x^3\mathrm{e}^{-2x}.$$

Vykreslete průběh příslušné shlukové funkce. A jak velký je rozptyl vzdálenosti sudých a lichých vozidel?

3 (8 bodů)
V modelu TASEP o velkém SUDÉM počtu buněk (s hodnotami parametrů $\alpha > \frac{1}{2}$ a $\beta = \frac{1}{2}$) je známo chování partiční sumy:

$$Z_m = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}\frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}.$$

Jaká je pravděpodobnost, že konfigurace systému (detekovaná v ustáleném stavu) nabude střídavého uspořádání mezer a obsazených buněk?

4 (12 bodů)
Odvoďte hustotu pravděpodobnosti pro vzájemné odstupy částic v termodynamickém transportním plynu o N částicích s krátkodosahovou logaritmickou repulzí. Nalezněte limitní rozdělení pro velký počet částic. Odvození provádějte pro celočíselné hodnoty rezistivity, což značně zjednodušuje a zpřehledňuje celé odvození.

5 (8 bodů)
Fundamentální diagram dopravního proudu je popsán křivkou

$$y = \alpha x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^2 \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Při reálném experimentu bylo naměřeno:

- průměrná rychlost $V = 40\,km \cdot h^{-1}$ při hustotě $\varrho = 80\,veh \cdot km^{-1}$,
- průměrná rychlost $V = 90\,km \cdot h^{-1}$ při hustotě $\varrho = 60\,veh \cdot km^{-1}$.

Jaká nejmenší hodnota průměrných časových odstupů může být v systému naměřena?

6 (5 bodů)
Podle definice rozhodněte, zda je funkce $g(x) = \Theta(x)\left(x^2\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-5x}\right)$ balancovanou hustotou, a pokud ano, jaký je její balanční index.