Dodatky a korekce ke skriptům Matematická analýza III

V tomto textu předkládáme dodatky ke skriptům *M. Krbálek, Matematická analýza III (třetí rozšířené vydání), Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2010.*

1 Korekce chyb

- Na straně 112 důsledek **4.4.14** říká, že pokud je wronskián alespoň pro jedno x nenulový, pak jsou funkce lineárně závislé (zde by mělo být nezávislé)
- na straně 112 (v poznámce k existenční větě) má být poslední rovnice ve tvaru

$$y_n(x) := y(x),\ y_{n-1}(x) := \frac{\mathtt{d}y_1}{\mathtt{d}x},\ y_{n-2}(x) := \frac{\mathtt{d}y_2}{\mathtt{d}x}, \ldots, y_1(x) := \frac{\mathtt{d}y_{n-1}}{\mathtt{d}x}.$$

1.1 Definice (oprava)

Nechť je dán prehilbertovský prostor $\{\mathcal{V}, \langle.|.\rangle\}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a dva nenulové vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. *Úhlem vektorů* $\vec{x}, \vec{y}$ budeme rozumět číslo

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) := \arccos\left(\frac{|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|}{\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\,\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle}}\right). \tag{1}$$

1.2 Poznámka k předešlé definici

Ve vzorci (1) musí skutečně být absolutní hodnota, protože skalární součin je obecně definován jako komplexní číslo, které z pochopitelných důvodů (neboť nelze vypočítat např. $arccos(2+3i)$) nemůže být dosazeno do vzorce bez absolutní hodnoty.

2 Doplňky ke skriptům

2.1 Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}_0$. Pak funkci $g(x) = x^n$ nazýváme *monomem stupně* n. Je-li navíc $c \in \mathbf{R}$ zvoleno pevně, pak funkci $f(x) = (x-c)^n$ nazýváme *monomem stupně n centrovaným do bodu c*.

2.2 Definice

Nechť $\hat{L}$ je diferenciální operátor řádu $n \in \mathbf{N}$ působící na definičním oboru $\mathscr{C}^n(I)$. Pak definujeme

$$\Omega_0 := \{y(x) \in \mathrm{Dom}(\hat{L}) :\ \hat{L}(y(x)) = 0\}.$$

Je-li $q(x) \in \mathscr{C}(I)$ libovolná funkce, pak definujeme

$$\Omega_q := \{y(x) \in \mathrm{Dom}(\hat{L}) :\ \hat{L}(y(x)) = q(x)\}.$$

2.3 Definice

Nechť A, B jsou libovolné množiny. *Kartézským součinem* množin A a B rozumíme množinu

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

2.4 Lemma

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Nechť $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$ je vektorový prostor všech komplexních funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána reálná funkce $w(x) \in \mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$ kladná na $\langle a, b\rangle$. Pak formule

$$\big\langle f(x)|g(x)\big\rangle_w := \int_a^b f(x)g^\star(x)w(x)\,\mathtt{d}x \tag{2}$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$.

2.5 Lemma

Nechť $a \in \mathbf{R}$. Nechť $\mathscr{C}_0(\langle a, +\infty)$ je vektorový prostor všech komplexních funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých a omezených na intervalu $\langle a, +\infty)$ zavedený nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dále dána kladná reálná funkce $w(x) \in \mathscr{C}(\langle a, +\infty))$, která je na $\langle a, +\infty)$ integrabilní. Pak formule

$$\big\langle f(x)|g(x)\big\rangle_w := \int_a^\infty f(x)g^\star(x)w(x)\,\mathtt{d}x \tag{3}$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{C}_0(\langle a, b\rangle)$.

2.6 Lemma

Nechť $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ je vektorový prostor všech komplexních funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých a omezených na $\mathbf{R}$ zavedený nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dále dána kladná reálná funkce $w(x) \in \mathscr{C}(\mathbf{R})$, která je na $\mathbf{R}$ integrabilní. Pak formule

$$\big\langle f(x)|g(x)\big\rangle_w := \int_{-\infty}^\infty f(x)g^\star(x)w(x)\,\mathtt{d}x \tag{4}$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$.

3 Dodatek ke kapitole o bilineárních a kvadratických formách

3.1 Definice

Nechť je dána $r-$dimenzionální bilineární, popř. kvadratická forma s maticí $\mathbb{A}$, jež má hodnost rovnou číslu $s \in \hat{r}$. Nechť jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ uspořádána následovně. Pro $i \in \hat{r} \setminus \hat{s}$ nechť $\lambda_i = 0$ a pro $i \in \hat{s}$ nechť $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_s$. Pak vektor

$$\vec{\sigma}(q) \equiv \vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

budeme nazývat *(uspořádaným) vektorovým spekrem* bilineární/kvadratické formy, resp. matice A.

3.2 Definice

Nechť je dána matice $\mathbb{A}$. Nechť $\vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ je její vektorové spekrum. Pak matici $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ budeme nazývat *kanonickou maticí* přidruženou k matici $\mathbb{A}$.

4 Dodatek ke kapitole o skalárním součinu

4.1 Definice

Řekneme, že funkce $f(x)$ je *komplexní funkcí reálné proměnné,* pokud $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbf{R}$ a $\mathrm{Ran}(f) \subset \mathbf{C}$.

4.2 Poznámka

Symbol $\mathscr{R}(M)$ bude reprezentovat množinu všech funkcí $g(x)$, pro něž existuje Riemannův integrál $(\mathscr{R}) \int_M g(x)\,\mathtt{d}x$ a je konečný, tj.

$$\mathscr{R}(M) = \Big\{ g(x) : M \mapsto \mathbf{R} :\ (\mathscr{R}) \int_M g(x)\,\mathtt{d}x \in \mathbf{R} \Big\}.$$

4.3 Definice

Nechť $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné a $M \subset \mathbf{R}$. Nechť $\mathrm{Re}(f(x)), \mathrm{Im}(f(x)) \in \mathscr{R}(M)$. Pak definujeme

$$\int_M f(x)\,\mathtt{d}x := (\mathscr{R}) \int_M \mathrm{Re}(f(x))\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\,(\mathscr{R}) \int_M \mathrm{Im}(f(x))\,\mathtt{d}x.$$

4.4 Lemma

Nechť $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné a $M \subset \mathbf{R}$. Nechť $\mathrm{Re}(f(x)), \mathrm{Im}(f(x)) \in \mathscr{R}(M)$. Pak

$$\int_M f^\star(x)\,\mathtt{d}x = \left[\int_M f(x)\,\mathtt{d}x \right]^\star.$$

4.5 Věta – *o funkcionálním skalárním součinu*

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a

$$\mathcal{V} = \Big\{ f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}(f(x)), \mathrm{Im}(f(x)) \in \mathscr{C}\big(\langle a, b \rangle\big) \Big\}$$

je funkcionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení

$$\langle f | g \rangle := \int_a^b f(x) g^\star(x)\,\mathtt{d}x$$

definované na $\mathcal{V}$ reprezentuje skalární součin, a dvojice $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

Důkaz:

- nejprve dokážeme, že pro libovolné $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$ definiční integrál existuje a je konečný
- snadno nahlédneme, že

$$\int_a^b \big(\mathrm{Re}(f) + \mathtt{i}\,\mathrm{Im}(f)\big)\big(\mathrm{Re}(g) - \mathtt{i}\,\mathrm{Im}(g)\big)\,\mathtt{d}x = \int_a^b \big(\mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(g) + \mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(g)\big)\,\mathtt{d}x +$$

$$+\mathtt{i} \int_a^b \big(\mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(g) - \mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(g)\big)\,\mathtt{d}x$$

- jelikož jsou oba integrandy spojitými funkcemi na kompaktu $\langle a,b\rangle$, oba integrály existují a jsou konečné
- tedy $\langle f|g\rangle \in \mathbf{C}$ pro každé $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$
- levou linearitu, tedy první axiom skalárního součinu, prokážeme sérií následujících úprav

$$\int_a^b (f+\alpha h)g^\star \mathtt{d}x = \int_a^b (f+\alpha h)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x - \mathtt{i}\int_a^b (f+\alpha h)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x =$$

$$= \int_a^b (\mathrm{Re}(f) + \mathtt{i}\mathrm{Im}(f) + \alpha\mathrm{Re}(h) + \alpha\mathtt{i}\mathrm{Im}(h))\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x -$$

$$-\mathtt{i}\int_a^b (\mathrm{Re}(f) + \mathtt{i}\mathrm{Im}(f) + \alpha\mathrm{Re}(h) + \alpha\mathtt{i}\mathrm{Im}(h))\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x + \alpha\int_a^b \mathrm{Re}(h)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\alpha\int_a^b \mathrm{Im}(h)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x -$$

$$-\mathtt{i}\int_a^b \mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x - \mathtt{i}\alpha\int_a^b \mathrm{Re}(h)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x + \int_a^b \mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x + \alpha\int_a^b \mathrm{Im}(h)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}(f)g^\star(x)\,\mathtt{d}x + \alpha\int_a^b \mathrm{Re}(h)g^\star(x)\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f)g^\star(x)\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\alpha\int_a^b \mathrm{Im}(h)g^\star(x)\,\mathtt{d}x =$$

$$= \int_a^b f(x)g^\star(x)\,\mathtt{d}x + \alpha\int_a^b h(x)g^\star(x)\,\mathtt{d}x$$

- jako další chod tohoto důkazu nabízíme ověření hermiticity

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g^\star(x)\,\mathtt{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x - \mathtt{i}\int_a^b f(x)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x =$$

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x - \mathtt{i}\int_a^b \mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x + \int_a^b \mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x =$$

$$= \left[\int_a^b \mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x - \mathtt{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\int_a^b \mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x + \int_a^b \mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x\right]^\star =$$

$$= \left[\int_a^b f^\star(x)\mathrm{Re}(g)\,\mathtt{d}x + \mathtt{i}\int_a^b f^\star(x)\mathrm{Im}(g)\,\mathtt{d}x\right]^\star = \left[\int_a^b f^\star(x)g(x)\,\mathtt{d}x\right]^\star = \langle g|f\rangle^\star$$

- pro argumentaci, že hodnota $\langle f|f\rangle$ je nulová právě tehdy, když $f(x)$ je striktně nulová funkce, je třeba si uvědomit, že

$$\int_a^b f(x)f^\star(x)\,\mathtt{d}x = \int_a^b \left(\mathrm{Re}^2(f) + \mathrm{Im}^2(f)\right)\mathtt{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\mathtt{d}x$$

- aby integrál $\int_a^b |f(x)|^2\mathtt{d}x$ z reálné funkce, která je nezáporná a (vzhledem k předpokladům věty) spojitá, byl nulový, musí nutně $|f(x)| = 0$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$
- to ale může nastat jedině tehdy, když $f(x) = 0$ na $\langle a,b\rangle$
- tím je prokázáno naplnění axiomu pozitivní definitnosti, a $\{\mathcal{V}, \langle\cdot|\cdot\rangle\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem

4.6 Důsledek – *o funkcionálním skalárním součinu s vahou*

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a

$$\mathcal{V} = \Big\{ f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}(f(x)), \mathrm{Im}(f(x)) \in \mathscr{C}\big(\langle a, b\rangle\big) \Big\}$$

je funkcionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť $w(x) \in \mathscr{C}\big(\langle a, b\rangle\big)$ je kladná funkce na $\langle a, b\rangle$. Pak zobrazení

$$\langle f|g\rangle_w := \int_a^b f(x) g^\star(x) w(x)\,\mathrm{d}x$$

definované na $\mathcal{V}$ reprezentuje skalární součin s vahou $w(x)$, a dvojice $\{\mathcal{V}, \langle\cdot|\cdot\rangle_w\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

5 Dodatek k ekvivalenci metrik

V celé sekci předpokládáme, že je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad $\mathbf{C}$ konečné dimenze $\dim(\mathcal{V}) = n$, v němž je zvolena pevná ale libovolná báze $\mathcal{X} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$. Souřadnice libovolného vektoru $\vec{x} \in \mathcal{V}$ v bázi $\mathcal{X}$ označme $\omega_k \in \mathbf{C}$, tj. $\vec{x} = \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k$.

5.1 Věta

Zobrazení $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}_0^+$, které každému vektoru $\vec{x} \in \mathcal{V}$ přiřazuje číslo

$$\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} := \sum_{k=1}^n |\omega_k|$$

splňuje axiomy normy.

Důkaz:

- norma $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$ je nulová právě tehdy, když všechny $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ jsou nulové, což může nastat pouze pro nulový vektor, čímž je naplněn axiom nulovosti
- pro každé $\lambda \in \mathbf{C}$ a $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí, že

$$\|\lambda\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = \left\| \lambda \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda\omega_k)\vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^n |\lambda\omega_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |\omega_k| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$$

- proto je splněn také axiom homogenity
- axiom trojúhelníkové nerovnosti prokážeme sérií následujících úprav

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k + \sum_{k=1}^n \varkappa_k \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=1}^n (\omega_k + \varkappa_k)\vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^n |\omega_k + \varkappa_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n |\omega_k| + \sum_{k=1}^n |\varkappa_k| = \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} + \|\vec{y}\|_{\mathcal{X}},$$

  kde bylo využitu faktu, že nerovnost $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ platí pro každá komplexní $a, b \in \mathbf{C}$

5.2 Definice

Normu $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}_0^+$ z věty 5.1 nazýváme *souřadnicovou normou v bázi* $\mathcal{X} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$, nebo krátce *souřadnicovou normou.*

5.3 Lemma

Relace *býti ekvivalentní* (označme ji symbolem $\triangleq$) je ve třídě všech norem zavedených nad týmž vektorovým prostorem $\mathcal{V}$

- *a) reflexivní,* tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_1$,
- *b) symetrická,* tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2 \quad \Rightarrow \quad \|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_1$,
- *a) tranzitivní,* tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2 \quad \wedge \quad \|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_3 \quad \Rightarrow \quad \|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_3$.

5.4 Věta

Pro každé $\vec{x}$ z normovaného prostoru $\{V, \|\cdot\|\}$ s libovolnou normou platí nerovnost

$$\|\vec{x}\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} \|\vec{\varepsilon}_k\|.$$

Důkaz:

- snadno:

$$\|\vec{x}\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \omega_k \vec{\varepsilon}_k \right\| \overset{❶}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \|\omega_k \vec{\varepsilon}_k\| \overset{❷}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} |\omega_k| \cdot \|\vec{\varepsilon}_k\| \overset{❸}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} \|\vec{\varepsilon}_k\|$$

- v odvození bylo využito ❶ axiomu trojúhelníkové nerovnosti, ❷ axiomu homogenity a nakonec také ❸ rovnosti $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$ platné pro libovolná nezáporná čísla

5.5 Věta

Pro libovolnou normu v normovaném prostor $\{V, \|\cdot\|\}$ existuje číslo $\mu \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro všechny $\vec{x} \in \mathcal{V}$, pro něž $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$, je $\|\vec{x}\| \geqslant \mu$.

Důkaz:

- předpokládejme naopak, že pro všechny $\mu \in \mathbf{R}^+$ existuje vektor takový, že $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$ a $\|\vec{x}\| \leqslant \mu$
- je-li ale $\|\vec{x}\|$ menší než libovolné kladné číslo μ, pak zjevně $\|\vec{x}\| = 0$, odkud plyne, že $\vec{x} = \vec{0}$
- to je ale ve sporu s faktem, že $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$, protože podle axiomu nulovosti nemůže nulový vektor mít nenulovou normu

5.6 Věta

Všechny normy zkonstruované nad $\mathcal{V}$ jsou ekvivalentní se souřadnicovou normou $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- podle definice ekvivalence norem je třeba pro libovolně zvolenou normu $\|\cdot\|$ dokázat, že $\|\cdot\| \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, tedy, že existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro všechny $\vec{x} \in \mathcal{V}$:

$$\|\vec{x}\| \leqslant \alpha\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \quad \wedge \quad \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \beta\|\vec{x}\|$$

- z povahy definice ekvivalence norem je zřejmé, že není třeba se zaobírat vektorem $\vec{x} = \vec{0}$, proto ho z následujících odvození vyjmeme
- z věty 5.4 vyplývá, že

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}|\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^{n}\|\vec{\varepsilon}_k\|}{\sum_{k=1}^{n}|\omega_k|} = \sum_{k=1}^{n}\|\vec{\varepsilon}_k\|,$$

  kde číslo $\sum_{k=1}^{n}\|\vec{\varepsilon}_k\|$ je nezávislé na volbě $\vec{x}$, neboť se jedná o konečný součet norem vektorů pevně zvolené báze ve $\mathcal{V}$

- za hledané α z definice ekvivalence norem lze tedy klást $\alpha := \sum_{k=1}^{n}\|\vec{\varepsilon}_k\|$
- pak totiž $\|\vec{x}\| \leqslant \alpha\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$
- pro důkaz druhé nerovnosti nejprve uvažme, že pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathcal{V}$ existují číslo $\sigma > 0$ a vektor $\vec{x}_0 \in \mathcal{V}$ tak, že $\|\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}} = 1$ a $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = \|\sigma\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}$
- pro libovolné $\vec{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}$ tedy nalezneme σ a $\vec{x}_0$ dle předchozího a provedeme sérii těchto úprav založených na substituci $\vec{x} = \sigma\vec{x}_0$:

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} = \frac{\|\sigma\vec{x}_0\|}{\|\sigma\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}} = \frac{\|\vec{x}_0\|}{\|\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}} = \|\vec{x}_0\|$$

- hodnota $\|\vec{x}_0\|$ je ale podle věty 5.5 omezena zdola univerzální hodnotou $\mu > 0$ nezávislou na volbě $\vec{x}_0$, a tedy nezávislou na volbě $\vec{x}$
- proto

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} \geqslant \mu \quad \Rightarrow \quad \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \frac{\|\vec{x}\|}{\mu} =: \beta\|\vec{x}\|,$$

  což bylo dokázat

5.7 Věta – *o ekvivalenci všech norem*

Je-li dimenze normovaného prostoru $\mathcal{V}$ konečná, jsou každé dvě normy na $\mathcal{V}$ ekvivalentní.

<u>*Důkaz:*</u>

- zvolme tedy dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ zavedené na týmž vektorovým prostorem $\mathcal{V}$
- podle věty 5.6 platí, že $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ a $\|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$
- jelikož je ale relace ekvivalence podle lemmatu 5.3 symetrická a tranzitivní, vyplývá odsud, že také $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2$, což dokládá platnost tvrzení