Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

1.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - báze v Hilbertově prostoru
  - obory excentricity parciální diferenciální rovnice (a metoda jejich detekce pro PDR druhého řádu pro funkci dvou proměnných)
  - fundamentální řešení operátoru
- ❷ Dokažte: $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G) \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x})g^\star(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(G)$.
- ❸ Z jakého důvodu nemůže být rovnost

$$\big(\mathfrak{L}[f(t)](p), \varphi(p)\big) = \big(f(t), \mathfrak{L}[\varphi(p)](t)\big)$$

  prohlášena za definici zobecněné Laplaceovy transformace?
- ❹ O čem pojednává Hellingerův-Toeplitzův teorém? K čemu ho lze využít?
- ❺ Vyslovte a dokažte větu o omezenosti Volterrova integrálního operátoru a všech jeho mocnin.
- ❻ Vyslovte a dokažte větu o vyhlazení charakteristické funkce omezené oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

2.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - $\mathscr{L}_p$ a $\mathbb{L}_p$
  - násobení funkcí v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a afinní transformace (zůstává výsledek těchto operací skutečně v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$?)
  - komutující operátory
  - obor nulovosti zobecněné funkce
- ❷ Pro klasické funkce dokažte rovnost

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\big(f(\vec{x}) \star g(\vec{x})\big) = \frac{\partial f}{\partial x_k} \star g(\vec{x}).$$

  Jaké předpoklady pro $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ je nutno uvažovat?

- ❸ Vyslovte a dokažte větu o klasickém Laplaceově obrazu derivace.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o Fourierově obrazu fundamentálního řešení.
- ❺ Dokažte: $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G) \wedge H \subset G \wedge \mu(H) < +\infty \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(H)$.
- ❻ Dokažte, že transformační vztahy odvozené z řešení rovnice

$$y' = -\lambda_{1,2}(x, y)$$

  skutečně převádějí parabolickou diferenciální rovnici do normálního tvaru.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

3.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - hustota
  - derivace v $\mathscr{D}'$
  - geometrická násobnost vlastního čísla operátoru (jaké vlastnosti má geometrická násobnost u operátoru s čistě bodovým spektrem a jak to souvisí s počtem vlastních čísel?)
- ❷ Dokažte: Nechť $S = \{f_1(x), f_2(x), \dots\}$ je maximální ortonormální množina na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ a $g(x) \in \mathscr{H}$. Nechť pro každé $k \in \mathbf{N} : \langle g|f_k\rangle = 0$. Pak $g(\vec{x}) = 0$.
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o derivaci klasického Laplaceova obrazu.
- ❹ Vyslovte a dokažte základní větu o řešení diferenciální rovnice v $\mathscr{D}'$.
- ❺ Dokažte:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x) \wedge g(\vec{x}) \in \mathscr{H} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n|g\rangle = \langle s|g\rangle.$$
- ❻ Dokažte, že Fourierova transformace je zobrazení z $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ do $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Důkaz demonstrujte na případě $r = 1$.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

4.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - skalární součin na prostoru funkcí (a některé příklady)
  - $\mathscr{D}(G)$ a $\mathscr{D}'(G)$
  - Volterrova integrální rovnice a Volterrovo jádro
  - separabilní Hilbertův prostor
- ❷ Dokažte: $\mathfrak{L}[\Theta(t)\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau] = \frac{F(p)}{p}$
- ❸ Dokažte, že pro libovolnou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ existuje $\mathtt{K} \in \mathbf{R}_0^+$ tak, že pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ $(x \neq y)$ platí
$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right| \leqslant \mathtt{K}.$$
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o hermiticitě složeného operátoru $\widehat{K}\widehat{L}$.
- ❺ Z jakého důvodu nelze přijmout rovnost
$$\left(\tilde{f} \star \tilde{g}, \varphi(\vec{x})\right) = \left(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}), \varphi(\vec{x}+\vec{y})\right)$$
za definici konvoluce v $\mathscr{D}'$? Podrobně vysvětlete na příkladě.
- ❻ Prezentujte detailně konstrukci Legendreových polynomů.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

5.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - $\mathscr{D}'$ a $\mathscr{D}'_{\text{reg}}$
  - Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici a její převod do $\mathscr{D}'$
  - rezolventa integrální rovnice
- ❷ Odvoďte obrazy $\mathfrak{F}[\delta_{\vec{\mu}}]$ a $\mathfrak{F}[\sin(\alpha x)]$.
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o posunutí tenzorového součinu.
- ❹ Diskutujte pojem *unfoldované spektrum operátoru*. Jakým způsobem se konstruuje příslušná operátorová báze v $\mathscr{H}$?
- ❺ Vyslovte a dokažte větu o omezenosti Fredholmova integrálního operátoru na Banachově prostoru $\mathscr{C}_\sigma(\bar{G})$ i na prostoru kvadraticky integrabilních funkcí $\mathbb{L}_2(G)$.
- ❻ Prezentujte detailně konstrukci Hermiteových polynomů.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

6.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - konvergence na prostoru zobecněných funkcí
  - Cauchyova úloha pro Schrödingerovu rovnici a její převod do $\mathscr{D}'$
  - nosič zobecněné funkce a zobecněná funkce s pozitivním nosičem
- ❷ Vyslovte a dokažte větu o násobení tenzorového součinu funkcí

$$a(\vec{y}) \cdot \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big).$$

- ❸ Jak souvisí hodnota funkcionálního diskriminantu $d(x, y)$ s typem excentricity parciální diferenciální rovnice? Dokažte.
- ❹ Dokažte následující tvrzení (tzv. lemma o kruhovém spektru): *Nechť $\widehat{L} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ je operátor s čistě bodovým spektrem, pro který platí, že $\sigma(\widehat{L})$ leží na jednotkové kružnici v Gaussově rovině. Dokažte, že vzdálenost obrazů dvou funkcí z $\mathscr{H}$ se aplikací operátoru $\widehat{L}$ nemění.*
- ❺ Vyslovte a dokažte větu o řešení Fredholmovy integrální rovnice se separabilním jádrem.
- ❻ Dokažte komutativitu tenzorového součinu.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

7.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - operace rovnosti, sčítání a násobení na prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ (z jakého důvodu zůstávají výsledky těchto operací v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$?)
  - Diracova prostá vrstva
  - Co je faktorová funkce a faktorový prostor funkcí?
- ❷ Dokažte rovnost
$$\mathcal{D}^{(1,1,\dots,1)}\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) = \delta_{\vec{\mu}}(\vec{x}).$$
- ❸ Dokažte, že jsou-li f, g regulární distribuce s generátory $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_1(\mathbf{E}^r)$, pak $f \star g$ existuje a je také regulární. Co je jejím generátorem?
- ❹ Dokažte, že je-li Fredholmův operátor zadán spojitým jádrem, pak lze volit $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathscr{C}_\sigma(\bar{G})$ i $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathbb{L}_2(G)$.
- ❺ Dokažte, že konverguje-li $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ k jedničce, pak
$$\left(\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\right)_{k=1}^{\infty}$$
také.
- ❻ Vyslovte a dokažte větu o vlastních číslech integrálního operátoru se separabilním jádrem.

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

8.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - Hilbertův prostor funkcí a konvergence podle normy
  - tenzorový součin v $\mathscr{D}'$
  - spojitost operátoru
  - třída funcí $\mathscr{D}_{\mathtt{sep}}(\mathbf{E}^{r+s})$ a její zásadní vztah k $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$
- ❷ Nechť $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Za jakých předpokladů platí $a(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$? Své tvrzení dokažte. Jaká je alternativa tohoto tvrzení pro $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$?
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o limitě obrazu pro klasickou Laplaceovu transformaci.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o reálnosti kvadratické formy hermiteovského operátoru. Obě implikace dokažte. Co lze z tohoto tvrzení odvodit pro vlastní čísla hermiteovského operátoru?
- ❺ Dokažte, že je-li Volterrův operátor zadán spojitým jádrem, pak lze volit

$$\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathscr{C}_\sigma\big(\langle 0, a\rangle\big).$$

- ❻ Vyslovte a dokažte větu o derivaci konvoluce zobecněných funkcí.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

9.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - hlavní hodnota integrálu
  - konvoluce v $\mathscr{D}'$
  - omezenost operátoru
- ❷ Vyslovte a dokažte věty o vztahu klasického a zobecněného řešení parciální diferenciální rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$.
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o obrazu konvoluce pro klasickou Laplaceovu transformaci.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o ortogonalitě vlastních funkcí.
- ❺ Vyslovte a dokažte větu o řešení Volterrovy integrální rovnice metodou postupných aproximací.
- ❻ Dokažte větu: Nechť $f, g \in \mathscr{D}'$ a g je finitní. Pak existuje konvoluce $f \star g$ a pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big),$$

kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce, která je na okolí nosiče $\operatorname{supp}(g)$ rovna jedné.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

10.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - lokálně integrabilní funkce (kde se tento pojem uplatňuje v teorii zobecněných funkcí?)
  - Diracova $\delta-$funkce a centrovaná $\delta-$funkce
  - operátor s čistě bodovým spektrem
- ❷ Uvažujme integrální rovnici $\mu\widehat{K}(\varphi) + f(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ a množiny $W_0 := \{\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{K}) : \mu\widehat{K}(\varphi) = \varphi(\vec{x})\}$ a $W_f := \{\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{K}) : \mu\widehat{K}(\varphi) + f(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})\}$. Diskutujte, jaké vlastnosti obě množiny splňují a jaká je mezi nimi vazba. Jak tyto vlastnosti souvisejí s počtem řešení rovnice s pravou stranou a bez pravé strany?
- ❸ Dokažte spojitost tenzorového součinu.
- ❹ Podle definice ukažte, že $\delta \star \widetilde{f} = \widetilde{f} \star \delta = \widetilde{f}$.
- ❺ Dokažte, že Volterrův operátor se spojitým jádrem je lineární, spojitý a omezený na definičním oboru $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathscr{C}_\sigma\big(\langle 0, a\rangle\big)$.
- ❻ Zodpovězte a vaše tvrzení podpořte korektním výpočtem: Nechť
$$u(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2) \setminus \mathscr{C}^2(\mathbf{R}^2).$$
Nechť $\tilde{w}(x,t)$ je zobecněná funkce generovaná klasickou funkcí $\Theta(t)u(x,t)$. Čemu je v $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$ roven výraz
$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(x,t)\,?$$

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

11.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - konečná část (partie finie)
  - superstejnoměrná konvergence ve Schwartzově prostoru
  - kvadratická a bilineární forma indukovaná operátorem
- ❷ Diskutujte vztah mezi $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ a $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}$. Jednotlivá tvrzení zdůvodněte.
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o vztahu stejnoměrné konvergence a konvergence podle normy na $\mathscr{L}_2^{(w)}(G)$, kde $\mu(G) < \infty$.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o asociativitě konvoluce v $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$.
- ❺ Formulujte Cauchyovu úlohu pro dopravní rovnici a převeďte ji do řeči zobecněných funkcí.
- ❻ Odvoďte metodu pro hledání transformačních vztahů pro hyperbolickou PDR druhého řádu pro funkci dvou proměnných.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

12.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - superstejnoměrná konvergence v prostoru testovacích funkcí
  - Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla a její převod do $\mathscr{D}'$
  - Neumannova řada integrální rovnice (dokažte její regulární konvergenci pro Fredholmův i Volterrův integrální operátor)
- ❷ Leží Heavisideova, resp. Diracova funkce (včetně centrovaných variant) v $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$? Podrobně komentujte.
- ❸ Dokažte, že zobrazení $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$ je spojité.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o derivaci tenzorového součinu.
- ❺ Dokažte, že je-li $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$, pak $\mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ existuje.
- ❻ Dokažte větu: *Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_k(\vec{x}), \ldots\}$ je báze v separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ tvořená vlastními funkcemi operátoru $\widehat{L}$ s čistě bodovým spektrem. Označme μ_k vlastní číslo příslušné vlastní funkci $f_k(\vec{x})$. Nechť $U = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots\}$. Pak $\sigma(\widehat{L}) = U$.*

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

13.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - funkcionál (jeho spojitost a linearita)
  - Heavisideova a centrovaná Heavisideova funkce (klasická a zobecněná)
  - hermiticita operátoru
  - okolí množiny
- ❷ Z definice hermiticity operátoru odvoďte podmínku pro jádro $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ integrálního operátoru $\widehat{K}$ definovaného na $\mathscr{L}_2(G)$ postačující pro to, aby $\widehat{K}$ byl hermiteovský.
- ❸ Dokažte, že je-li $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}$, pak $\mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ existuje.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o existenci konvoluce pro klasické funkce.
- ❺ Vyslovte a dokažte větu o řešení Fredholmovy integrální rovnice metodou iterovaných jader.
- ❻ Jak vypadá obecný vztah pro laplaceovskou inverzi? Vztah důkladně rozeberte a jeho aplikací odvoďte Laplaceův vzor k obrazu $F(s) = \Theta(s)/s$.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

14.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - spojitost skalárního součinu
  - Sochockého distribuce
  - typy definitnosti operátoru
  - finitní distribuce
- ❷ Vyslovte větu o zjednodušení definice zobecněné konvoluce za předpokladu, že obě funkce f, g budou ze třídy $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$. K čemu lze takové zjednodušení dále využít?
- ❸ Dokažte, že je-li $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, pak $\mathfrak{L}[f(t)]$ existuje.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o řešení Fredholmovy integrální rovnice metodou postupných aproximací.
- ❺ Co zajímavého lze demonstrovat na konvoluci $\Theta \star \delta' \star 1$?
- ❻ Odvoďte metodu detekce normalizačních transformačních vztahů pro diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

15.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - Fourierova řada funkce $f \in \mathscr{H}$, Fourierovy koeficienty
  - prostory $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$
  - posloupnost konvergující k jedničce (+ příklad konstrukce)
- ❷ Vyslovte a dokažte větu o vektorovém prostoru vlastních funkcí. Jak souvisí tato věta s pojmem *geometrická násobnost?*
- ❸ Rozhodněte o platnosti následující implikace:

$$f(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}) \wedge \mathrm{Dom}(f) \subset (0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}[f] \text{ existuje.}$$

- ❹ Vyslovte a dokažte větu o záměně klasického laplaceovského obrazu a vzoru v určitém integrálu.
- ❺ Dokažte Sochockého vzorce a všechny kroky důkazu korektně zdůvodněte.
- ❻ Dokažte větu: Konvoluce zobecněných funkcí je na $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ spojitá v obou argumentech, tj. pro libovolnou zobecněnou funkci $g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ a libovolnou posloupnost zobecněných funkcí $f_k \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$, která v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ konverguje k funkci $f \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$, platí rovnosti

$$\lim_{k\to\infty} (f_k \star g) \overset{\mathscr{D}'}{=} f \star g, \qquad \lim_{k\to\infty} (g \star f_k) \overset{\mathscr{D}'}{=} g \star f.$$

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

16.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - Parsevalův vzorec, Parsevalova rovnost a Besselova nerovnost (diskuse jejich vztah)
  - klasická Laplaceova transformace
  - funkcionální $\sigma-$norma (diskutujte, proč jde o normu a na co je třeba dát při definici funkcionální $\sigma-$normy pozor)
- ❷ Dokažte, že centrovaná Diracova $\delta-$funkce je singulární.
- ❸ Dokažte: *Nechť* $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ *a* $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ *jsou regulární distribuce generované funkcemi* $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$*. Pak v* $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ *platí rovnost*

$$\left(\widetilde{\mathfrak{F}[\varphi]}, \psi(\vec{x})\right) = \left(\tilde{\varphi}, \mathfrak{F}[\psi(\vec{x})]\right).$$

  Proč se tato věta dokazuje ještě před zavedením Fourierovy transformace na prostoru temperovaných distribucí?
- ❹ Dokažte, že každý skalární součin na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ je spojitý. Jaký je důsledek této vlastnosti?
- ❺ Odvoďte tvar jádra integrálního operátoru $\widehat{K}^2$ pro Volterrův integrální operátor. Je operátor $\widehat{K}^2$ také Volterrova typu?
- ❻ Vyslovte a dokažte větu o harmonickém řešení vlnové rovnice a rovnice vedení tepla.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

17.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - parciální diferenciální operátor druhého řádu a jeho vlastnosti (zapište tvar operátoru v multiindexové notaci)
  - klasická Fourieova transformace
  - třídy W_0 a W_f pro parciální diferenciální operátor $\widehat{L}$ a jejich vztah
  - konvergence ve třídě temperovaných distribucí
- ❷ Za jakých podmínek platí implikace

$$\operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} f_n(\vec{x}) = f(\vec{x}) \in \mathscr{H} \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} \widehat{L}\big(f_n(\vec{x})\big) = \widehat{L}\big(f(\vec{x})\big)\,?$$

$$\operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} f_n(\vec{x}) = f(\vec{x}) \in \mathscr{H} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{L}(f_n)|g\rangle = \langle \widehat{L}(f)|g\rangle.$$

  Dokažte a srovnejte.
- ❸ Dokažte komutativitu konvoluce (v $\mathscr{L}_1$ i v $\mathscr{D}'$).
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o derivaci obrazu ve Fourierově transformaci (v $\mathscr{S}$ i $\mathscr{S}'$).
- ❺ Vyslovte a dokažte větu o řešení Volterrovy integrální rovnice metodou iterovaných jader.
- ❻ Řešte rovnici $x^m f(x) = 0$ v $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ a znalosti jejího řešení užijte při odvození Fourierova obrazu jednotkové funkce.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

18.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - klasifikace parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu
  - Fourierova transformace v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$
  - integrální rovnice (typologie integrálních rovnic)
- ❷ Dokažte rovnost $\delta_{\vec{\mu}} = \delta(\vec{x} - \vec{\mu})$. Čemu se rovná $\mathrm{supp}(\delta_{\vec{\mu}})$? Své tvrzení dokažte.
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o substituci ve vzoru ve Fourierově transformaci (v $\mathscr{S}$ i $\mathscr{S}'$).
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o omezenosti spojitého operátoru.
- ❺ Vyslovte a dokažte větu o Parsevalově vzorci a Parsevalově rovnosti.
- ❻ Dokažte větu: *Operátor s čistě bodovým spektrem, pro který $\sigma(\widehat{L}) \subset \mathbf{R}$, je hermiteovský.*

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)					
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení			
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta	

19.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - zobecněná alternativa pro klasickou funkci $\frac{1}{x-\mu}$
  - diferenciální operátor v $\mathscr{D}'$ a řešení diferenciální rovnice v $\mathscr{D}'$
  - jádro integrálního operátoru a jeho spojitost, resp. separabilita
- ❷ Vyslovte a dokažte větu o parciální derivaci součinu zobecněných funkcí.
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o Fourierově obrazu konvoluce v $\mathscr{S}$.
- ❹ Vyslovte a dokažte větu o harmonickém řešení dopravní rovnice.
- ❺ Jak lze rozepsat $\delta(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ za pomoci tenzorového součinu? Dokažte.
- ❻ Dokažte větu: *Nechť je dán Fredholmův integrální operátor $\widehat{K}$ s čistě bodovým spektrem, jehož definičním oborem je $\mathbb{L}_2(G)$. Nechť soubor $\sigma_{\text{unf}}(\widehat{K}) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots)$ je unfoldovaným spektrem tohoto operátoru a $B = \{\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}), \varphi_3(\vec{x}) \ldots\}$ příslušná operátorová báze. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ konverguje. Pak integrální jádro takového operátoru může být přepsáno do tvaru $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell \varphi_\ell(\vec{x}) \varphi_\ell^\star(\vec{y})$.*

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

20.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - prostor testovacích funkcí a příklady
  - Cauchyova úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici a její převod do $\mathscr{D}'$
  - mez integrálního jádra a důkaz její konečnosti
- ❷ Vyslovte a dokažte větu o zobecněné derivaci skokové funkce.
- ❸ Čemu se rovná $\mathfrak{L}[\frac{f(t)}{t}]$ a za jakých předpokladů? Dokažte.
- ❹ Dokažte Besselovu nerovnost.
- ❺ Proč v $\mathscr{D}'$ neexistuje $\frac{1}{x}$? Jak se absence této distribuce řeší?
- ❻ Vyslovte a dokažte tvrzení o tvaru Fourierovy inverzní transformace v $\mathscr{S}$ i $\mathscr{S}'$. Užijte faktu, že $\mathfrak{F}[1] = (2\pi)^r \delta(\vec{\xi})$.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01RMF (akademický školní rok 2015/2016)				
Příjmení a jméno	Datum	Hodnocení		
✍	✍	Písemka	Celkové hodnocení	Podpis studenta

21.

- ❶ Definujte níže uvedené pojmy, zařaďte je do probírané teorie a diskutujte jejich užití:
  - Cimrmanovy buřinky
  - linearita a spojitost funkcionálu nad $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ - definici demonstrujte na příkladě

$$(\tilde{f}, \varphi(\vec{x})) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(\vec{\mu} - 2\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} \quad (\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r).$$

  - Banachův prostor $\mathscr{C}_\sigma(J)$
- ❷ Dokažte, že $\tilde{\delta}_{\vec{\mu}} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $\tilde{\Theta}_{\vec{\mu}} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.
- ❸ Vyslovte a dokažte větu o obrazu derivace ve Fourierově transformaci (v $\mathscr{S}$ i $\mathscr{S}'$).
- ❹ Vyslovte větu o Fourierově rozvoji a diskutujte, jakým způsobem lze dokázat.
- ❺ Za jakých podmínek platí vlastnost $\int_{\mathbf{R}} f(x)G(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} F(x)g(x)\, \mathrm{d}x$ z Fourierova desatera? Dokažte.
- ❻ Dokažte: Nechť $S = \{f_1(x), f_2(x), \dots\}$ je ortonormální množina na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ a $g(x) \in \mathscr{H}$. Označme $a_k := \langle g | f_k \rangle$. Pak existuje limita

$$\operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \in \mathscr{H}.$$

Označíme-li tuto limitu $h(x)$, pak navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí: $\langle g - h | f_k \rangle = 0$.

✍