2.24 Věta – *o Fourierově rozvoji*

Nechť $\mathcal{H}$ je separabilní Hilbertův prostor a $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ jeho báze. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ je zvoleno libovolně, ale pevně. Označme $a_k = \langle g|f_k\rangle$. Pak

$$g(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}). \tag{0.7}$$

Důkaz:

- dokázali jsme $h(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(\vec{x})$
- nyní je S maximální
- je-li $\langle h - g|f_k\rangle = 0$ pro všechna k a pro S maximální, pak $h(\vec{x}) - g(\vec{x}) = 0 \Rightarrow h(\vec{x}) = g(\vec{x})$.

2.25 Definice

Rovnost (0.7) diskutovaná v předchozí větě je tzv. *Fourierův rozvoj* a její koeficienty a_k nazýváme fourierovými koeficienty funkce $g(\vec{x})$ (přidružené k bázi).

2.26 Věta – *o Parsevalově vzorci*

Nechť je $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ báze v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každé dvě funkce $g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí:

$$\langle g|h\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k^\star,$$

kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$ a $b_k = \langle h|f_k\rangle$.

*Důkaz:*Dodělat důkaz!

2.27 Věta – *o Parsevalově rovnosti*

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ je báze v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\|g(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^2, \tag{0.8}$$

kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$.

Důkaz:

- jde o přímý důsledek věty o parsevalově vzorci

2.28 Definice

Rovnost (0.8) nazýváme *Parsevalovou rovností.*

2.29 Poznámka

Známe 4 základní typy bází:

- trigonometrická - je představována goniometrickými funkcemi

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Legendreova}\\ \bullet\ \text{Laguerrova}\\ \bullet\ \text{Hermiteova}\end{array}\right\} - \text{polynomy}$$