1 První přednáška

1. Heaviside ova funkce a centrovaná Heavisideova funkce
2. Prostor s úplnou mírou $\{\mathbf{E}^r, \lambda(X), \mathcal{M}_\lambda\}$
3. G bude vždy značit oblast a J bude znamenat kompakt
4. funkce: $f(\vec{x}) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$
5. Připomenout symboly $\mathscr{C}(M) = \mathscr{C}^0(M)$, $\mathscr{C}^n(M)$
6. definice symbolů $\mathscr{C}_0$: (třída všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem)
7. definice symbolů $\mathscr{C}_0^n$: (třída všech funkcí, které mají kompaktní nosič a spojité derivace až do řádu n včetně)
8. $\mathscr{L}(G)$, $\mathscr{L}^\star(G)$, $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$
9. připomenout, že:
$$f(x) \in \mathscr{L}(E,\mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(E,\mu) \wedge f(x) \in \Lambda_\mu(E).$$
10. **VĚTA:** o ekvivalentní definici třídy $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$
11. snaha o prehilbertovský prostor $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$
12. snaha o prehilbertovský prostor $\mathscr{L}(G)$ a protipříklad $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathscr{L}(0,1)$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \in \mathscr{L}(0,1)$
13. $\mathscr{L}_p(G)$
14. snaha o prehilbertovský prostor $\mathscr{L}_1(G)$ a protipříklad $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathscr{L}_1(0,1)$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \in \mathscr{L}_1(0,1)$
15. **VĚTA:** $f, g \in \mathscr{L}_2(G) \quad \Rightarrow \quad fg^\star \in \mathscr{L}_1(G)$
16. ale ani $\mathscr{L}_2(G)$ není prehilbertovský
17. Co jsou faktorové funkce
18. značení $\mathbb{L}_2(G)$ a $\mathbb{L}_2^{(w)}(G)$: váha musí být spojitá a kladná na G

2 Druhá přednáška

1. **VĚTA:** $f \in \mathscr{L}_2(G) \quad \wedge \quad H \subset G \quad \wedge \quad \mu(H) < \infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathscr{L}_1(H)$
2. **DŮSLEDEK:** $\mu(H) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_2(H) \subset \mathscr{L}_1(H)$
3. snaha o Hilbertův prostor $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$ se standardním skalárním součinem (není úplný)
4. snaha o Hilbertův prostor $\mathbb{L}_2(G)$
5. **VĚTA:** $\mathbb{L}_2(G)$ a $\mathbb{L}_2^{(w)}(G)$ jsou Hilbertovy prostory
6. Skalární součiny na funkcionálních vektorových prostorech jednorozměrných funkcí
   - Legendre $\Theta(x-a)\Theta(b-x)$, $G = (a, b)$
   - Laguerre $\Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$, $G = (0, +\infty)$
   - Hermite e^{-x^2}, $G = \mathbf{R}$
7. Typy konvergence na funkcionálních vektorových prostorech (bodová, stejnoměrná, podle normy)
8. **VĚTA:** o vztahu stejnoměrné konvergence a konvergence podle normy na $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$ pro $\langle f|g\rangle_w$. [Nezmiňoval jsem. Dokázáno v MAB3.]
9. **VĚTA:** o vztahu stejnoměrné konvergence a konvergence podle normy na $\mathscr{L}_2^{(w)}(G)$, kde $\mu(G) < \infty$. Váha musí být omezená na G.
10. **VĚTA:** o spojitosti skalárního součinu
11. Konvergence řad podle normy
12. **VĚTA:** o součtu podle normy
13. Uzavření tématu o konstrukci funkcionálních Hilbertových prostorů.
14. Domácí úkol: Je $||f||_\infty := \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f|$ normou na $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$? A je $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$ s touto normou úplný?
15. NOVÁ KAPITOLA: Operace konvoluce na prostoru klasických funkcí – definice na $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$
16. **VĚTA:** o existenci konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
17. Bilinearita konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ (ve cvičení)
18. Komutativita konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
19. o konvoluci funkcí tvaru $\Theta(x)F(x)$, kde $F(x) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$
20. definice pojmů hustota a hustota pravděpodobnosti

3 Třetí přednáška

1. **VĚTA:** o zachování vlastností hustoty pravděpodobnosti
2. **VĚTA:** f, g jsou hustoty pravděpodobnosti a $\int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \mu_1$ a $\int_{\mathbf{R}} y g(y)\,\mathrm{d}y = \mu_2$, pak $\int_{\mathbf{R}} z(f \star g)(z)\,\mathrm{d}z = \mu_1 + \mu_2$
3. **VĚTA:** o posunutí v konvoluci v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
4. **VĚTA:** o derivaci v konvoluci: $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r) \cap \mathscr{C}_0^1$
5. ortonormální množina: Řekneme, že množina S z Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$ je ortonormální, pokud pro každou funkci $f(\vec{x}) \in S$ je $\|f(\vec{x})\| = 1$ a zároveň pro každé dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in S$ takové, že $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$ platí rovnost $\langle f|g\rangle = 0$.
6. **LEMMA:** prvky každé ortonormální množiny jsou LN
7. zmínka o Grammově-Schmidtově proceduře vyrábějící ON množinu z množiny LN funkcí
8. **VĚTA:** o Besselově nerovnosti: Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})\}$ je (konečná) ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathscr{H}$ je zvolen libovolně. Označme $a_k := \langle g|f_k\rangle$. Pak platí
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2. \tag{1}$$
9. Definice maximální ortonormální množiny: S je maximální ortonormální množina v $\mathscr{H}$, pokud pro jakoukoli ortonormální množinu $S' \supset S$ platí, že $S' = S$.
10. Přípravná věta k větě o Fourierově rozvoji

    Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ je (spočetná) ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathscr{H}$ zvolena libovolně. Označme $a_k = \langle g|f_k\rangle$. Pak existuje limita
    $$\operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) =: h(\vec{x}) \in \mathscr{H}.$$
    Navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle g - h|f_k\rangle = 0$.

4 Čtvrtá přednáška

1. Definice báze v Hilbertově prostoru
2. Definice separability Hilbertova prostoru
3. **VĚTA:** Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ je (spočetná) maximální ortonormální množina v separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathscr{H}$ zvolena libovolně. Nechť pro každé $k \in \mathbf{N}$ je $\langle g|f_k\rangle = 0$. Pak $g(\vec{x}) = o(\vec{x})$.
4. **VĚTA:** o Fourierově rozvoji
5. **VĚTA:** o Parsevalově vzorci [Zapomněl jsem. Dodělá se ve cvičení.]
6. **VĚTA:** o Parsevalově rovnosti [Zapomněl jsem. Dodělá se ve cvičení.]
7. Trigonometrická báze v $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$
8. Legendreovy polynomy – pokus o přímou konstrukci
9. Legendreovy polynomy jako báze v $\mathbb{L}_2(-1, 1)$
10. Rodriguesova formule pro Legendreovy polynomy
11. Legendreova diferenciální rovnice
12. Laguerreovy polynomy - komentář
13. Hermiteovy polynomy - odkaz do cvičení
14. NOVÁ KAPITOLA: Lineární operátory na separabilních Hilbertových prostorech
15. lineární operátor, jeho definiční obor a obor hodnot
16. příklad operátoru, jehož definičním oborem není celý Hilbertův prostor: např. $\hat{L} = x$ na $\mathscr{H} = \mathbb{L}_2(\mathbf{R})$.
17. Úmluva: v dalším textu budeme předpokládat, že $\mathrm{Dom}(\hat{L}) = \mathscr{H}$
18. bilineární forma přidružená k $\hat{L}$
19. kvadratická forma přidružená k $\hat{L}$
20. typy definitností operátorů
21. hermiteovský operátor (= hermiteovsky sdružený operátor, popř. samosdružený operátor)
22. **VĚTA:** o konvergenci číselné posloupnosti $(\langle \hat{L} f_n|g\rangle)_{n=1}^{\infty}$ – pro hermiteovský operátor

5 Pátá přednáška

1. **VĚTA:** o konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty}\langle \hat{L}f_n|g\rangle$ – pro hermiteovský operátor
2. **VĚTA:** $\hat{L}$ je hermiteovský právě tehdy, když pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{H}$ platí, že $\langle \hat{L}f|f\rangle \in \mathbf{R}$.
3. Je-li $\hat{L}$ jakkoli definitní, pak je hermiteovský.
4. Úkol: rozmyslet, za jakých podmínek kladených na spojitou funkci $\mathscr{K}(x,y) : \overline{G}\times\overline{G} \mapsto \mathbf{C}$ je integrální operátor $\hat{K} := \int_G \mathscr{K}(x,y)\bullet \mathrm{d}y$ hermiteovský na $\mathbb{L}_2(G)$? Uvažujte, že G je omezená oblast.
5. komutující operátory
6. **VĚTA:** $\hat{K},\hat{L}$ hermiteovské operátory, které komutují. Pak $\hat{K}\hat{L}$ i $\hat{L}\hat{K}$ jsou hermiteovské.
7. Definice spektra operátoru (pro účely RMF se jedná o zúžený pojem)
8. **VĚTA:** $\hat{L}$ hermiteovský, pak $\sigma(\hat{L}) \subset \mathbf{R}$
9. **VĚTA:** $\hat{L}$ pozitivně definitní, pak $\sigma(\hat{L}) \subset \mathbf{R}^+$ (+ analogická tvrzení)
10. **VĚTA:** o kolmosti vlastních funkcí
11. **VĚTA:** o vektorovém prostoru generovaném všemi vlastními funkcemi příslušnými k témuž vlastnímu číslu
12. geometrická násobnost/prosté vlastní číslo/nedegenerovaný vs. degenerovaný operátor
13. Definice spojitého operátoru a její ekvivalentní alternativa
14. **VĚTA:** o přenosu konvergence (podle normy) vzorů na konvergenci (podle normy) operátorových obrazů
15. **VĚTA:** o přenosu součtu (podle normy) vzorů na součet (podle normy) operátorových obrazů
16. příklad nespojitého operátoru: $\hat{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ na $\mathbb{L}_2(0,1)$

6 Šestá přednáška

1. Definice omezenosti operátoru
2. **VĚTA:** o ekvivalenci omezenosti a spojitosti operátoru
3. příklad neomezeného operátoru: $\hat{L} = x$ na $\mathbb{L}_2(\mathbf{R})$
4. Hellingerův-Toeplitzův teorém
5. Definice omezeného operátoru s čistě bodovým spektrem: Řekneme, že operátor $\hat{L} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ je operátorem s čistě bodovým spektrem, je-li omezený a v $\mathscr{H}$ existuje báze tvořená pouze vlastními funkcemi tohoto operátoru.
6. **VĚTA:** o spektru operátoru s čistě bodovým spektrem: Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_k(\vec{x}), \ldots\}$ je báze v separabilním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ tvořená vlastními funkcemi operátoru $\hat{L}$ s čistě bodovým spektrem. Označme μ_k vlastní číslo příslušné vlastní funkci $f_k(\vec{x})$. Nechť $U = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots\}$. Pak $\sigma(\hat{L}) = U$.
7. Kolik vlastních hodnot tedy může mít operátor s čistě bodovým spektrem? A jak to souvisí s geometrickou násobností vlastních čísel.
8. Definice unfoldovaného spektra a příslušné operátorové báze
9. **VĚTA:** o hermiteovskosti operátoru s čistě bodovým spektrem: Operátor s čistě bodovým spektrem, pro který $\sigma(\hat{L}) \subset \mathbf{R}$, je hermiteovský.
10. Poznámka k Fourierovu rozvoji podle operátorové báze operátoru s čistě bodovým spektrem
11. **VĚTA:** o separabilitě jádra integrálního operátoru s čistě bodovým spektrem: Nechť je dán Fredholmův integrální operátor $\hat{K}$ s čistě bodovým spektrem, jehož definičním oborem je $\mathbb{L}_2(G)$. Nechť soubor $\sigma_{\mathrm{unf}}(\hat{K}) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots)$ je unfoldovaným spektrem tohoto operátoru a $B = \{\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}), \varphi_3(\vec{x}) \ldots\}$ příslušná operátorová báze. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ konverguje. Pak integrální jádro takového operátoru může být přepsáno do tvaru $\mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell \varphi_\ell(\vec{x}) \varphi_\ell^\star(\vec{y})$.
12. Diskuse k předešlé větě, zejména k požadavku, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ konverguje.
13. Shrnutí: V dalším výkladu budeme pracovat s Hilbertovými prostory $\mathbb{L}_2^{(w)}(G)$ (nejčastěji ve variantě $\mathbb{L}_2(G)$) nebo s Banachovým prostorem $\mathscr{C}_\sigma(J)$ funkcí spojitých na kompaktu J, kde je norma definována předpisem $\|f\|_\sigma := \max_{\vec{x} \in J} |f(\vec{x})|$.
14. NOVÁ KAPITOLA: Integrální rovnice
15. Definice Fredholmovy integrální rovnice
16. spojité jádro
17. **LEMMA:** o dvou definičních oborech Fredholmova integrálního operátoru se spojitým jádrem (bude dokázáno ve cvičení)

7 Sedmá přednáška

1. komentář k $\mathscr{C}_\sigma(\overline{G})$
2. Mez jádra
3. Separabilní jádro
4. **VĚTA:** o omezenosti Fredholmova integrálního operátoru se spojitým jádrem v Banachově prostoru $\mathscr{C}_\sigma(\overline{G})$.
5. **VĚTA:** o omezenosti Fredholmova integrálního operátoru se spojitým jádrem v Hilbertově prostoru $\mathbb{L}_2(G)$.
6. **VĚTA:** o shrnutí základních vlastností Fredholmova integrálního operátoru se spojitým jádrem
7. **VĚTA:** o omezenosti spektra Fredholmova integrálního operátoru se spojitým jádrem
8. **VĚTA:** o spektru Fredholmova integrálního operátoru se separabilním jádrem
9. návod na řešení rovnice se separabilním jádrem
10. **VĚTA:** – přípravná věta na metodu postupných aproximací

8 Osmá přednáška

1. **VĚTA:** – metoda postupných aproximací
2. Definice *Neumannovy řady*
3. Odvození tvaru jádra pro složený integrální operátor
4. Definice *posloupnosti iterovaných jader*
5. **VĚTA:** – metoda iterovaných jader
6. Definice *rezolventy*
7. Definice Volterrovy integrální rovnice
8. spojité jádro
9. **VĚTA:** o shrnutí základních vlastností Volterrova integrálního operátoru se spojitým jádrem (včetně definičního oboru a oboru hodnot)
10. **VĚTA:** – přípravná věta na metodu postupných aproximací pro Volterrovu rovnici (o omezenosti σ–normy ℓ–té operátorové mocniny Volterrova operátoru)
11. **VĚTA:** – metoda postupných aproximací pro Volterrovu rovnici

9 Devátá přednáška

1. shrnutí metody postupných aproximací pro Volterrovu integrální rovnici (diskuse o normě řešení)
2. Odvození tvaru jádra pro složený Volterrův integrální operátor
3. **VĚTA:** – metoda iterovaných jader pro Volterrovu rovnici
4. NOVÁ KAPITOLA: Normalizace parciálních diferenciálních rovnic
5. Parciální diferenciální operátor, jeho koeficienty a jeho definiční obor
6. PDE druhého řádu
7. W_0 a W_q a jejich vlastnosti
8. kvadratická forma přidružená k PDE
9. typy excentricity PDE
10. obory excentricity PDE
11. PDE v normálním tvaru
12. Obecný převod PDE do normálního tvaru

10 Desátá přednáška

1. Alternativní normální tvar PDE
2. Aplikace na PDE s konstatními koeficienty
3. PDE druhého řádu pro funkci dvou proměnných
4. nalezení oborů excentricity podle hodnot funkcionálního diskriminantu
5. odvození metody pro nalezení vztahů převádějících PDE do normálního tvaru pro rovnici hyperbolického typu
6. o převodu parabolické PDE do normálního tvaru
7. o převodu eliptické PDE do normálního tvaru
8. multiindex, jeho absolutní hodnota a sumace, multiindexová derivace
9. PDE vyšších řádů – diferenciální operátor v multiindexovém formalizmu

11 Jedenáctá přednáška

1. Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-x\frac{\partial u}{\partial x}+u(x,y)=0.$$

2. NOVÁ KAPITOLA: Teorie zobecněných funkcí

3. okolí množiny a uzavřená koule

4. Definice třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

5. Leibnizova formule pro derivaci součinu funkcí z $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

6. Cimrmanovy buřinky

7. diskuse o konstrukci dalších zástupců ve třídě $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

8. **VĚTA:** Pro libovolnou testovací funkci $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ existuje $\mathrm{K}\in\mathbf{R}_0^+$ tak, že pro každé $x,y\in\mathbf{R}$ $(x\neq y)$ platí

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right|\leqslant \mathrm{K}.$$

9. **VĚTA:** o vyhlazení charakteristické funkce: Pro libovolnou oblast $G\subset\mathbf{E}^r$ a libovolné $\varepsilon>0$ existuje funkce $\eta(\vec{x})\in\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ taková, že

   - $0\leqslant\eta(\vec{x})\leqslant 1,$
   - pro všechna $\vec{x}\in G_\varepsilon$ je $\eta(\vec{x})=1,$
   - pro všechna $\vec{x}\in\mathbf{E}^r\setminus G_{3\varepsilon}$ je $\eta(\vec{x})=0.$

10. **VĚTA:** Vektorový prostor $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je hustou množinou v $\mathbb{L}_p(\mathbf{E}^r)$.

12 Dvanáctá přednáška

1. superstejnoměrná konvergence $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows \varphi(\vec{x})$ ve třídě $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
2. Definice třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$
3. příklady zobecněných funkcí
   - $(\tilde{f}, \varphi(\vec{x})) := 0$
   - $(\tilde{h}, \varphi(\vec{x})) := \varphi(\vec{0})$
   - $(\tilde{g}, \varphi(x)) := \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$
   - $(\tilde{w}, \varphi(x)) := \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
   - $(\tilde{u}, \varphi(x)) := \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{x^2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$
   - $(\tilde{\ell}, \varphi(\vec{x})) := \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$
4. **VĚTA:** o regulární distribuci
5. definice regulární distribuce
6. nulová distribuce
7. rovnost distribucí
8. **VĚTA:** o centrované Diracově funkci
9. definice Diracovy funkce (včetně centrované varianty)
10. **VĚTA:** o Heavisideově distribuci
11. definice Heavisideovy distribuce (včetně centrované varianty)

13 Třináctá přednáška

1. proč $\frac{1}{x}$ v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ neexistuje?
2. o dvou alternativách pro náhradu $\frac{1}{x}$ - definice Sochockého distribuce a konečné části
3. **VĚTA:** o konečné části – důkaz ve cvičení
$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}; \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x$$
4. Sochockého vzorce:
$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$
5. operace v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$: součet & násobek & násobení regulární distribucí & derivace & afinní transformace
6. příklad na derivaci Heavisideovy distribuce
7. příklad na afinní transformaci Diracovy distribuce
8. **VĚTA:** o parciální derivaci součinu
9. **VĚTA:** o derivaci skokové funkce
10. dvojí konvergence v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$: a) $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k = \tilde{f}$; b) $\lim_{\mu\to\sigma} \tilde{f}_\mu = \tilde{f}$;
11. příklad na konvergenci Gausse k Diracovi
12. definice prosté Diracovy vrstvy

14 Čtrnáctá přednáška

1. NOVÁ KAPITOLA: Nosič zobecněné funkce
2. $\mathscr{D}(G)$
3. $\tilde{f}$ je nulová na otevřené množině $H \subset \mathbf{E}^r$
4. Obor nulovosti distribuce $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$
5. $\mathrm{supp}(\tilde{f})$ a pojem finitní distribuce
6. **VĚTA:** o nosiči Diracovy funkce a centrované Diracovy funkce
7. $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$
8. poznámka, že $\delta \notin \mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$
9. NOVÁ KAPITOLA: Tenzorový součin
10. definice tenzorového součinu
11. Komentář o korektnosti definice tenzorového součinu (odkaz na důležitou teoretickou větu)
12. **VĚTA:** o bilinearitě tenzorového součinu
13. **VĚTA:** o husté množině v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$
14. **VĚTA:** o komutativitě tenzorového součinu
15. **VĚTA:** o asociativitě tenzorového součinu
16. **VĚTA:** o spojitosti tenzorového součinu
17. **VĚTA:** o derivaci tenzorového součinu
18. **VĚTA:** o posunutí tenzorového součinu
19. **VĚTA:** o násobení tenzorového součinu regulární distribucí

15 Patnáctá přednáška

1. pokus o přenesení konvoluce z prostoru klasických funkcí do $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a diskuse problému takového pokusu o definici
2. Konvergence k jedničce
3. Definice konvoluce v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$
4. Podmíněná bilinearita konvoluce
5. Podmíněná komutativita konvoluce
6. **VĚTA:** Nechť $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'_{\text{reg}}(\mathbf{E}^r)$ s generátory $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak $\tilde{f} \star \tilde{g}$ existuje, je z $\mathscr{D}'_{\text{reg}}(\mathbf{E}^r)$ a jejím generátorem je $f(\vec{x}) \star g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$.
7. Příklad: $\tilde{\delta} \star \tilde{g} = \tilde{g} \star \tilde{\delta} = \tilde{g}$
8. **VĚTA:** Nechť $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $\tilde{f} \star \tilde{g}$ existuje. Pak
$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{f} \star \tilde{g}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k} \star \tilde{g} = \tilde{f} \star \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_k}.$$
9. **DŮSLEDEK:** o $\mathcal{D}^{\alpha}(\tilde{f} \star \tilde{g})$.
10. **VĚTA:** o $[\tilde{f} \star \tilde{g}](\vec{x} + \vec{\mu}) = \tilde{f}(\vec{x} + \vec{\mu}) \star \tilde{g} = \tilde{f} \star \tilde{g}(\vec{x} + \vec{\mu})$.
11. diskuse asociativy konvoluce: $(\tilde{\Theta} \star \tilde{\delta}') \star 1 \neq \tilde{\Theta} \star (\tilde{\delta}' \star 1)$.
12. některé konvoluce neexistují ani v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$: $1 \star 1$.

16 Šestnáctá přednáška

1. Nechť $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $\tilde{g}$ je finitní. Pak $\tilde{f} \star \tilde{g}$ existuje ma navíc pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí

$$(f \star g, \varphi(\vec{x})) = (f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x} + \vec{y})),$$

   kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce, která je na okolí nosiče $\mathrm{supp}(g)$ rovna jedné.

2. Nechť $f, g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$. Pak existuje konvoluce $f \star g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ a pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí

$$(f \star g, \varphi(x)) = (f(x) \otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x + y)), \tag{2}$$

   kde $\eta_1(x)$, resp. $\eta_2(y)$ jsou libovolné funkce třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, které jsou na okolí intervalu $\langle 0, \infty)$ rovny jedné a existuje pro ně $\mathrm{K} < 0$ tak, že platí implikace

$$x < \mathrm{K} \wedge y < \mathrm{K} \quad \Longrightarrow \quad \eta_1(x) = \eta_2(y) = 0. \tag{3}$$

3. **VĚTA:** o spojitosti konvoluce na $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$
4. **VĚTA:** o asociativitě konvoluce na $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$
5. NOVÁ KAPITOLA: Laplaceova transformace
6. o tvaru budoucí definice
7. funkce exponenciálního růstu
8. Laplaceův prostor
9. **VĚTA:** o zobrazitelnosti funkce z Laplaceova prostoru
10. Které funkce patří do Laplaceova prostoru?
11. definice Laplaceovy transformace
12. rozšířený Laplaceův prostor
13. linearita

17 Sedmnáctá přednáška – 7/12

1. $\mathfrak{L}[f(cx)]$
2. $\mathfrak{L}[f'(x)]$
3. $\mathfrak{L}[x^k f(x)]$
4. $\mathfrak{L}[\Theta(x) \int_0^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi]$
5. $\mathfrak{L}[\frac{f(x)}{x}] = \int_p^\infty F(q)\, \mathrm{d}q$
6. $\mathfrak{L}[\mathrm{e}^{ax} f(x)] = F(p-a)$
7. $\int_0^\infty f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{p\to 0_+} F(p)$
8. **VĚTA:** o obrazu konvoluce
9. $\int_0^\infty f(x)G(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty F(x)g(x)\, \mathrm{d}x$
10. inverzní Laplaceova transformace

18 Osmnáctá přednáška – 8/12

1. NOVÁ KAPITOLA: Klasická Fourierova transformace
2. Schwartzův prostor $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
3. vazba mezi $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ a $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
4. tři způsoby zavedení: a) $\mathscr{S}$; a) $\mathscr{L}_1$; a) $\mathscr{S}'$;
5. pokud $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1$, pak $\mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ existuje
6. pokud $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}$, pak $\mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ existuje
7. pokud $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}$, pak $\mathfrak{F}[f(\vec{x})] \in \mathscr{S}$ (ve cvičení)
8. linearita
9. $\mathfrak{F}[f(c\vec{x})]$ $(c \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$
10. $\mathfrak{F}[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})]$
11. $\mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$
12. $\mathfrak{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})] = F(\vec{\xi} + \vec{\mu})$
13. $\mathfrak{F}[f(\vec{x} - \vec{\mu})] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}} F(\vec{\xi})$
14. **VĚTA:** o obrazu konvoluce
15. $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) G(\vec{x}) \,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} F(\vec{x}) g(\vec{x}) \,\mathrm{d}\vec{x}$
16. Třída temperovaných distribucí $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$
17. **VĚTA:** Nechť $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ jsou regulární distribuce generované funkcemi $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Pak v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost
$$\left(\widetilde{\mathfrak{F}[\varphi]}, \psi(\vec{x})\right) = (\tilde{\varphi}, \mathfrak{F}[\psi(\vec{x})])$$
18. Definice Fourierovy transformace v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$

19 Devatenáctá přednáška – 14/12

1. **VĚTA:** o fourierovské inverzi: $\mathfrak{F}\mathfrak{F}^\star = (2\pi)^r \mathfrak{I}_d$
2. Formulace vztahu o inverzní Fourierově transformaci
3. Riemannovo-Lebesgueovo lemma
4. ZOBECNĚNÉ DESATERO
5. **VĚTA:** o fourierovské inverzi v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$
6. **VĚTA:** o spojitosti Fourierovy transformace
7. fourierovské obrazy Diracových funkcí a jejich derivací
8. řešení rovnice $x^m f(x) = 0$ v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$

20 Dvacátá přednáška – 15/12

1. $\mathfrak{F}[\mathrm{e}^{-a\|\vec{x}\|^2}] = ?$
2. $\mathfrak{F}[1] = ?$
3. NOVÁ KAPITOLA: Řešení PDE
4. **VĚTA:** o vztahu klasického a zobecněného řešení (2x)
5. operátor s konstantními koeficienty
6. Fundamentální řešení operátoru
7. příklady

21 Dvacátáprvní přednáška – 21/12

1. **VĚTA:** o fourierovském obrazu fundamentálního řešení operátoru
2. Formulace úloh matematické fyziky
3. **LEMMA:** o zobecněné derivaci

$$\frac{\partial \tilde{w}(\vec{x}, t)}{\partial t},$$

   kde $\tilde{w}(\vec{x}, t) = \Theta(\widetilde{t) u(\vec{x}}, t)$

4. převody úloh do prostoru zobecněných funkcí

22 Dvacátádruhá přednáška – 22/12

1. fundamentální řešení dopravního operátoru
2. převody úloh do prostoru zobecněných funkcí
3. základní věta o řešení diferenciální rovnice v $\mathscr{D}'$
4. věty o harmonickém řešení
5. sestavování vzorců pro řešení