

5 bodů

$$\rho^2(f, g) = \|f - g\|^2 = \langle f - g | f - g \rangle = \int_0^{+\infty} (f(x) - g(x))^2 \cdot w(x) dx$$

vzorec pro vzdálenost ✓

$$\Rightarrow \rho^2(f, g) = \int_0^{\infty} (f(x) - g(x))^2 \cdot e^{-3x} dx$$

anebo toto

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = g_a(x) = x^2 + e^{-ax} \quad (a \geq 0)$$

Aby funkce $g_a(x)$ neležela v okolí prvku $f(x) = x^2$ o poloměru $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10}}$,
musí být jejich vzdálenost $\rho(f, g) \geq \frac{1}{\sqrt{10}}$, tj. $\rho^2(f, g) \geq \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} \rho^2(f, g) &= \int_0^{\infty} (x^2 - x^2 - e^{-ax})^2 \cdot e^{-3x} dx = \int_0^{\infty} e^{-2ax} \cdot e^{-3x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(2a+3)x} dx = \frac{1}{2a+3} \checkmark \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2a+3} \geq \frac{1}{10}$$

A toto platí pouze pro

1)	$a = 0$	}
2)	$a = 1$	
3)	$a = 2$	
4)	$a = 3$	

✓

nic už nic

$\hat{L}(f) = 4x^6$ & $\hat{L}(g) = 4x^6$ & $q(x) = 4x^6$ je prava strana 9 bodů
z vlastnosti operátoru $\hat{L}$:

$$\hat{L}(f-g) = \hat{L}(f) - \hat{L}(g) = 0 \Rightarrow f-g = 2x^2 \in \mathcal{R}_0 \Rightarrow x^2 \in \mathcal{R}_0$$

Našli jsme funkci ($v(x) = x^2$) vhodnou ke snížení řádku.

o) $y = \kappa \cdot x^2$ ✓

$$\left. \begin{aligned} y' &= \kappa' x^2 + 2x\kappa \\ y'' &= \kappa'' x^2 + 4x\kappa' + 2\kappa \\ y''' &= \kappa''' x^2 + 6x\kappa' + 6\kappa' \end{aligned} \right\} \checkmark$$

Dosazení:

$$\kappa''' x^5 + \kappa'' (6x^4 - 6x^4 - x^5) + \kappa' (6x^3 - 24x^3 - 4x^4 + 18x^3 + 4x^4 - 2x^5) = 0$$

$$\kappa''' x^5 - x^5 \kappa'' - 2x^5 \kappa' = 0$$

$$\kappa''' - \kappa'' - 2\kappa' = 0 \checkmark \checkmark$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \checkmark$$

$$F_3 = \{1; e^{2x}; e^{-x}\}$$

$$\kappa(x) = \alpha + \beta e^{2x} + \gamma e^{-x} \checkmark$$

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x^2 e^{2x} + \gamma x^2 e^{-x} \dots \text{řešení rovnice } \hat{L}(y(x)) = 0$$

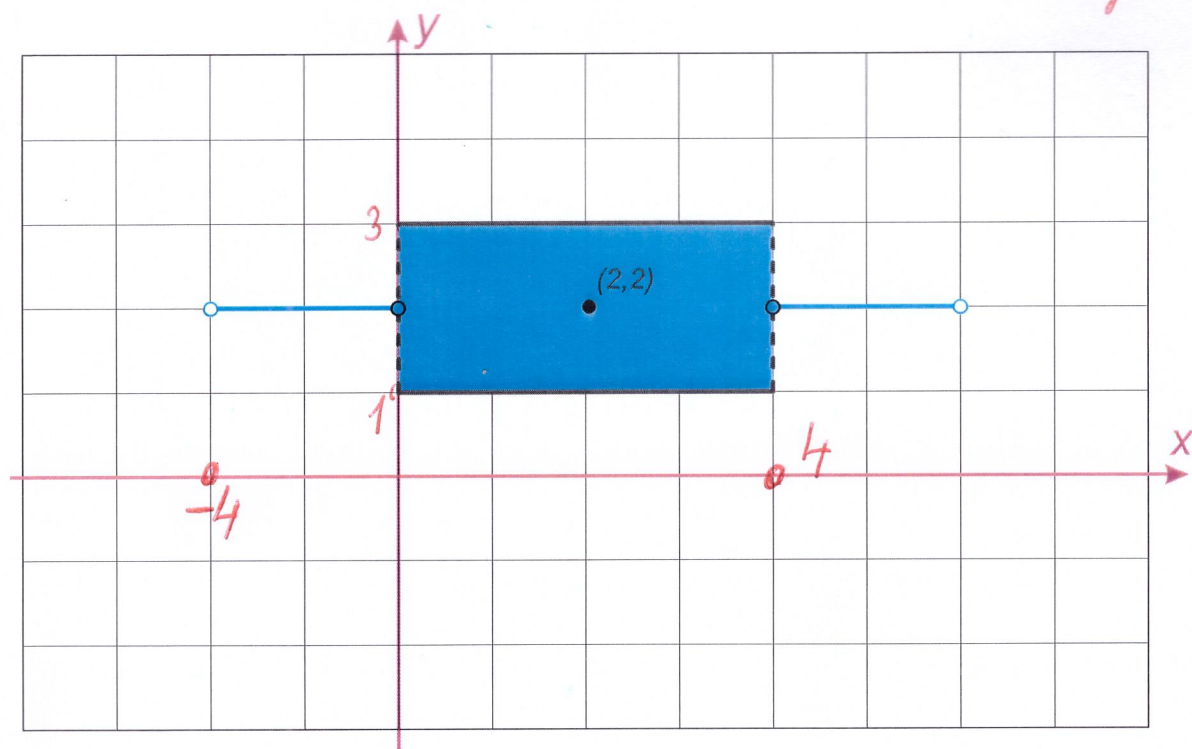
Čelkové řešení:

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x^2 e^{2x} + \gamma x^2 e^{-x} + x^3 - x^4; \quad I = \mathbb{R}$$

za chybějící I $\frac{1}{2}$ body
dolní

partikulární řešení

4 body



✓✓ správny geometrický tvar : 

✓ správne hranice obdĺmíka

✓ prázdne krajné body úsečky 

$$y''' + 3y'' - 4y = 12e^{-2x}$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \Rightarrow F_\lambda = \{e^x; e^{-2x}; xe^{-2x}\}$$

8 bodů

Řešení rovnice s nulovou pravou stranou:

Partikulární řešení hledáme ve tvaru:

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-2x} + \gamma x e^{-2x}$$

✓ jedno z toho

$$y_p(x) = A \cdot x^2 e^{-2x}$$

polynom nultého stupně

✓ správná předpověď (minimalistická!)

číslo $\alpha = -2$ je dvojnásobným kořenem charakt. polynomu

$$\begin{aligned} 0. \quad y_p' &= A(2x - 2x^2) e^{-2x} \\ 3. \quad y_p'' &= A(2 - 4x - 4x + 4x^2) e^{-2x} = A(2 - 8x + 4x^2) e^{-2x} \\ 1. \quad y_p''' &= A(-8 + 8x - 4 + 16x - 8x^2) e^{-2x} = A(-12 + 24x - 8x^2) e^{-2x} \end{aligned}$$

$$A(-12 + 24x - 8x^2 + 6 - 24x + 12x^2 - 4x^2) e^{-2x} \stackrel{!}{=} 12e^{-2x}$$

$$-6A = 12$$

$$A = -2$$

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-2x} + \gamma x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x}; \quad I = \mathbb{R}$$

✓ Nemí-li uveden Dom(y), odebrá se půl bod

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + \theta(|x_2 - y_2|)$$

def) Normierte bad $(0,0)$ ✓

$$a) g(\vec{a}_n, \vec{0}) = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| + \theta\left(\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 < \varepsilon \quad \text{K} \checkmark \text{ konverguje}$$

$$b) g(\vec{b}_n, \vec{0}) = \theta\left(\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|\right) = 1 < \varepsilon \quad \text{K} \checkmark \text{ konverguje}$$

$$c) g(\vec{c}_n, \vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \text{K} \checkmark \text{ konverguje}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n}$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1 \neq \checkmark$$

$$x^3 y''' - 2x^2 y'' - 8xy' + 20y = 0$$

9 bodů

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$$

$$y' = \dot{y} \frac{1}{x} \quad \& \quad y'' = \ddot{y} \frac{1}{x^2} - \dot{y} \frac{1}{x^2} \quad \& \quad y''' = \dddot{y} \frac{1}{x^3} - 3\ddot{y} \frac{1}{x^3} + 2\dot{y} \frac{1}{x^3}$$

$$\ddot{y} - 5\ddot{y} - 4\dot{y} + 20y = 0$$

$$(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 4\lambda + 20) : (\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$$

$$F_0 = \{e^{2t}; e^{-2t}; e^{5t}\} \rightsquigarrow y(t)$$

1

$$y(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t} + \mu e^{5t}$$

$$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x^2} + \mu x^5 \quad I = (0; +\infty)$$

$$y' = 2\alpha x - 2\beta x^{-3} + 5\mu x^4$$

$$y'' = 2\alpha + 6\beta x^{-4} + 20\mu x^3$$

$$y(1) \stackrel{!}{=} 2$$

$$y'(1) \stackrel{!}{=} 9$$

$$y''(1) \stackrel{!}{=} 62$$

$$\alpha + \beta + \mu = 2$$

$$2\alpha - 2\beta + 5\mu = 9$$

$$2\alpha + 6\beta + 20\mu = 62$$

$$\alpha = -2; \beta = 1; \mu = 3$$

$$y(x) = -2x^2 + \frac{1}{x^2} + 3x^5$$

$$\text{Dom}(y) = I = (0; +\infty)$$