

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3 – verze A

31. října 2023 10:00 — 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (8 bodů)

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx \operatorname{arctg}(n)}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}$$

konverguje na množině všech reálných čísel stejnoměrně.

2 (6 bodů)

Cauchyova úloha k diferenciální rovnici $\hat{L}(y(x)) = q(x)$ je zadána podmínkami $y(1) = 1$ a $y'(1) = 3$. Nalezněte její řešení, víte-li, že tuto rovnici řeší tři funkce

$$u(x) = 1 + x + x^2 + x^4, \quad w(x) = 1 + x + 2x^2 + x^4, \quad z(x) = 1 + x + x^2 + 2x^4.$$

Dále určete wronskián fundamentálního systému zadané rovnice.

3 (6 bodů)

Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(3n+1)!!!} (x-2)^n.$$

4 (9 bodů)

Rozhodněte, zda je Weierstrassovo kritérium účinným nástrojem při zkoumání stejnoměrné konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{x^2}{\sqrt{2x^6 + n^6}}$$

na množině $\mathbf{R}$.

5 (5 bodů)

Pro jaké $x \in \mathbf{R}$ nabývá součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(3n)!!!} x^{2n+3}$$

nejnižší hodnoty?

6 (6 bodů)

Řešte rovnici

$$-3x^3 y + xy' + 2y = x e^{x^3 - x}.$$

Poznámky ke značením:

✓

1 bod

✗

půl bodu

✓*

přiblíženo k poznámce pod řešením

✓!

bod se uděluje pouze za správný/
úselný výsledek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \arctan(n)}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2} \cdot x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} = 0 \quad \checkmark$$

86

$$g_n(x) = \frac{x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$g_n'(x) = \frac{(8n^2 + x^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2} (8n^2 + x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(8n^2 + x^2)^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$8n^2 + x^2 - x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x = 0$$

$$2x^2 = 8n^2$$

$$x = \pm 2n \quad \checkmark$$

ovšem nemí jasně, zda je to extrém

$\checkmark \left\{ \begin{array}{l} g_n(x) \in C(\mathbb{R}) \quad g_n(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = 0 \quad \& \quad 2 \text{ stacionární body} \\ \& \quad g_n(x) \text{ liché} \end{array} \right. \quad \underbrace{g_n(x) \text{ má v bodě } x_0 = 2n \text{ glob. maximum}}_{\checkmark}$

$$\Rightarrow |g_n(x)| \leq g_n(2n) = \frac{2n}{(8n^2 + 4n^2)^{3/2}} = \frac{2n}{(12n^2)^{3/2}} = \frac{2}{8 \cdot \sqrt{27}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{1}{n^2}$$

$$\sigma_n = f_n(2n) = \frac{\pi}{2} \cdot n \cdot g_n(2n) \arctan(n) = \frac{\pi}{2} \frac{\arctan(n)}{12\sqrt{3} \cdot n}$$

$$\sigma_n = \frac{\pi}{24\sqrt{3}} \frac{\arctan(n)}{n} \quad \checkmark \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{\pi}{24\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0}} \quad \checkmark$$

$y(1) = 1$ & $y'(1) = 3 \dots$ 2 podmínky $\Rightarrow$ jde o rovnici 2. řádu

obecně:

$$\underline{y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)}$$

6b

$$\Rightarrow \dim(\Omega_0) = 2$$

$$\hat{L}(u) = q(x) \quad \& \quad \hat{L}(w) = q(x) \quad \& \quad \hat{L}(z) = q(x)$$

$$\Rightarrow \hat{L}(w-u) = \hat{L}(w) - \hat{L}(u) = 0 \Rightarrow x^2 \in \Omega_0$$

$$\hat{L}(z-u) = \hat{L}(z) - \hat{L}(u) = 0 \Rightarrow x^4 \in \Omega_0$$

$$W_{x^2, x^4} = \begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2x & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^5 - 2x^5 = 2x^5 \neq 0 \Rightarrow \underline{I = (0; +\infty)}$$

$\downarrow$
zde je $W_{x^2, x^4} \neq 0$

$\Rightarrow$ Všechna řešení rovnice $\hat{L}(y) = q(x)$ jsou tvaru

$$\underline{y(x) = \alpha x^2 + \beta x^4 + x + 1; \quad \text{Dom}(y) = I = (0; +\infty)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(1) \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \alpha + \beta + 2 \stackrel{!}{=} 1 \\ y'(1) \stackrel{!}{=} 3 \Rightarrow 2\alpha + 4\beta + 1 \stackrel{!}{=} 3 \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha, \beta) = (-3, 2)$$

$$\underline{y(x) = -3x^2 + 2x^4 + x + 1}$$

$$\underline{FS = \{x^2, x^4\} \quad \& \quad W_{x^2, x^4} = 2x^5}$$

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(3n+4)!!!} \cdot \frac{(3n+1)!!!}{5^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{3n+4} = \frac{5}{3} \checkmark$$

6b

$$R = \frac{3}{5}$$

pravý kraj oboru konvergence: $2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ } ✓

levý kraj oboru konvergence: $2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ }

řada v pravém krajním bodě: $\sum_n \frac{5^n \cdot n!}{(3n+1)!!!} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_n \frac{3^n \cdot n!}{(3n+1)!!!}$ } ✓*

řada v levém krajním bodě: $\sum_n (-1)^n \frac{3^n \cdot n!}{(3n+1)!!!}$

Raabe v krajích:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(3n+4)!!!} \cdot \frac{(3n+1)!!!}{3^n \cdot n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{3(n+1)}{3n+4} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{3n+4-3n-3}{3n+4} = \frac{1}{2} \in (0,1) \checkmark!$$

řada s plusem nekonverguje
řada s $(-1)^n$ ano

$$\underline{0 = \left(\frac{7}{5}; \frac{13}{5} \right)} \checkmark!$$

* jsou-li krajní řady určeny chybně, dále se neopravuje!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{2x^6+n^6}}$$

Hledáme extrém $g_n(x)$:

$$g_n(x) \triangleq \frac{x^2}{\sqrt{2x^6+n^6}}$$

98

$$g'_n(x) = \frac{2x\sqrt{2x^6+n^6} - x^2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 6x^5}{\sqrt{2x^6+n^6}}}{2x^6+n^6} \stackrel{!}{=} 0$$

$$2x(2x^6+n^6) - 6x^7 = 0$$

$$2x(2x^6+n^6-3x^6) = 0$$

$$2x(n^6-x^6) = 0$$

$$x = 0 \text{ \& \> } x = \pm n$$

3 podezřelých body

✓ za detekci TRJ stacion. bodů

$$g_n(x) \in C(\mathbb{R}) \text{ \& } g_n(0) = 0 \text{ \& } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = 0$$

$\Rightarrow x = \pm n$ jsou body globálních maxim

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: |g_n(x)| \leq g_n(n) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{n}$$

Weierstrassovo kritérium:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \left| \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{2x^6+n^6}} \right| \leq \underbrace{\frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}n}}_{\triangleq \alpha_n}$$

✓ V tomto zápise ale NESMÍ být sumy!

1) abývá rozhodnout, zda číselná řada $\sum_n \alpha_n$ konverguje

Raabe:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{(3n+3)!!!}{(3n+5)!!!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(3n+2)!!!}{(3n)!!!} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{3n+3}{3n+5} \cdot \frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3n^2+8n+5-3n^2-3n}{3n^2+8n+5} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+5n}{3n^2+8n+5} = \frac{5}{3} > 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_n \alpha_n$ konverguje

$\Rightarrow$ W-kritérium rozhodne

$$\sum_n f_n(x) \stackrel{R}{=} \checkmark$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(3n)!!!} x^{2n+3} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x^2)^n}{3^n \cdot n!} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{2x^2}{3}\right)^n =$$

$$= x^3 e^{-2x^2/3} \stackrel{!}{=} \rho(x) \quad \checkmark!$$

56

- hledáme maximum funkce $\rho(x)$ na $\mathbb{R}$

$$\rho'(x) = 3x^2 e^{-2x^2/3} - x^3 \cdot \frac{4x}{3} e^{-2x^2/3} \stackrel{!}{=} 0$$

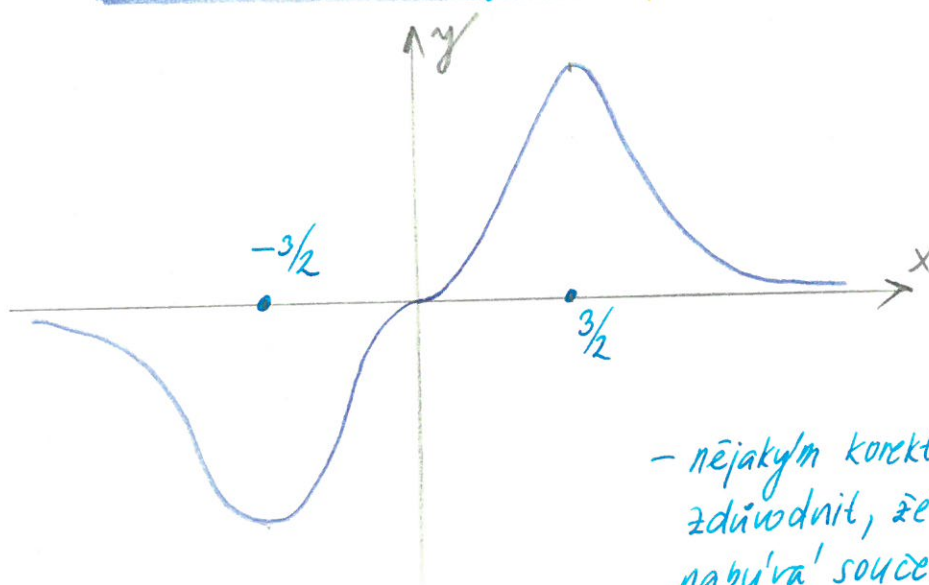
$$3x^2 - \frac{4}{3}x^4 = 0$$

$$x^2(9 - 4x^2) = 0$$

$$x^2(3 - 2x)(3 + 2x) = 0$$

Tři stacionární body: $x=0$ & $x=\frac{3}{2}$ & $x=-\frac{3}{2}$

$\checkmark!$



- nějakým korektním postupem je třeba zdůvodnit, že nejmenší hodnoty nabývá součet, pokud je

$$x = -\frac{3}{2}$$

$\checkmark!$

$$-3x^3y + xy' + 2y = xe^{x^3-x}$$

6b

$$y' + \frac{2}{x}y - 3x^2y = e^{x^3-x}$$

$$y' + \left(\frac{2}{x} - 3x^2\right)y = e^{x^3-x} \quad \text{I.F. } x^2e^{-x^3} \quad \checkmark \text{!}^*$$

Pomočné výpočty:

✓ úprava do
standardného tvaru

$$\int \left(\frac{2}{x} - 3x^2\right) dx = 2 \ln x - x^3 + C$$

C volíme rovnou nule

$$e^{2 \ln x - x^3} = x^2 e^{-x^3}$$

$$y' \cdot x^2 \cdot e^{-x^3} + (2x - 6x^4) e^{-x^3} y = x^2 e^{-x^3}$$

$$(y \cdot x^2 \cdot e^{-x^3})' = x^2 e^{-x^3} \quad \checkmark$$

Pomočné výpočty:

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = e^{-x^3} \\ u' = 2x \quad v = -e^{-x^3} \end{array} \right| = -x^2 e^{-x^3} + 2 \int x e^{-x^3} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 2x \quad v' = e^{-x^3} \\ u' = 2 \quad v = -e^{-x^3} \end{array} \right| = -x^2 e^{-x^3} - 2x e^{-x^3} + 2 \int e^{-x^3} dx =$$

$$= -x^2 e^{-x^3} - 2x e^{-x^3} - 2 e^{-x^3} + C = -e^{-x^3} (x^2 + 2x + 2) + C$$

$$y \cdot x^2 \cdot e^{-x^3} = C - e^{-x^3} (x^2 + 2x + 2)$$

$$y(x) = C \frac{e^{x^3}}{x^2} - \frac{e^{x^3-x}}{x^2} (x^2 + 2x + 2)$$

$$\text{Dom}(y) = I = (0; +\infty)$$

* není-li I.F. správně, dále se neopravuje!