Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová práce č. 2 z předmětu 01ANB3 – verze A

25. listopadu 2024, 10:00 — 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (8 bodů)
Rozhodněte, zda funkční řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n \cdot n!}{(3n+1)!!!} \sqrt{\frac{x}{x^5 + 4n^5}}$$

na množině $G = (0, +\infty)$.

2 (6 bodů)
Nakreslete (co nejpřesněji) formální řešení rovnice

$$x + (y - 4)y' = 3$$

procházející bodem $(x_0, y_0) = (6, 8)$. O jaký útvar se jedná a jaké jsou jeho parametry?

3 (9 bodů)
Řešte rovnici

$$y''' + 6y'' + 9y' = 18x + 9e^{-3x}$$

4 (9 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{9y}{x^3} - \frac{9y'}{x^2} + y''' + \frac{2y''}{x} = 7x$$

5 (8 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2x(2y + x)y' = 2y^2 - x^2$$

vyhovující podmínce $y(2) = 0$.

Rozhodněte, zda funkční řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{3^n \cdot n \cdot n!}{(3n+1)!!!} \sqrt{\frac{x}{\underbrace{x^5 + 4n^5}_{g_n(x)}}}}^{h_n(x)}$$

na množině $G = (0, +\infty)$.

8b.

- hledejme extrémy $g_n(x)$ na G:

$$g_n'(x) = \frac{x^5 + 4n^5 - 5x^4 \cdot x}{(x^5+4n^5)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$x = n$$

$$g_n(x) \in C(G) \ \& \ g_n(0) = 0 \ \& \ \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$$

korektní rozhodnutí o typu extrému

$$\Rightarrow x = n \text{ je bod maxima} \Rightarrow |g_n(x)| \leq g_n(n)$$

$$\& \ g_n(n) = \frac{1}{5n^2}$$

$$\Rightarrow |h_n(x)| \leq \frac{3^n \cdot n \cdot n!}{(3n+1)!!!} \cdot \frac{1}{5n^2} = \frac{3}{5} \frac{3^{n-1} \cdot (n-1)!}{(3n+1)!!!} \leq \underbrace{\frac{(3n-3)!!!}{(3n+1)!!!}}_{a_n}$$

- pro aplikaci Weierstrassova kritéria bychom chtěli, aby $\sum a_n$ konvergovala
- Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(3n)!!!}{(3n+4)!!!} \cdot \frac{(3n+1)!!!}{(3n-3)!!!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{3n}{3n+4}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n+4-3n}{3n+4}\right) = \frac{4}{3} > 1$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum h_n(x) \text{ konverguje na } G \text{ stejnoměrně}$$

mohlo být řečeno, z jakého kritéria to plyne

$$x + (y-4)y' = 3$$

6b

$$(y-4)y' = 3-x$$

$$\int (y-4)\,dy = \int (3-x)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} - 4y = 3x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = D$$ Formální řešení (obecné)

Hledáme formální řešení procházející bodem $(x_0, y_0) = (6, 8)$:

$$36 + 64 - 36 - 64 = D$$

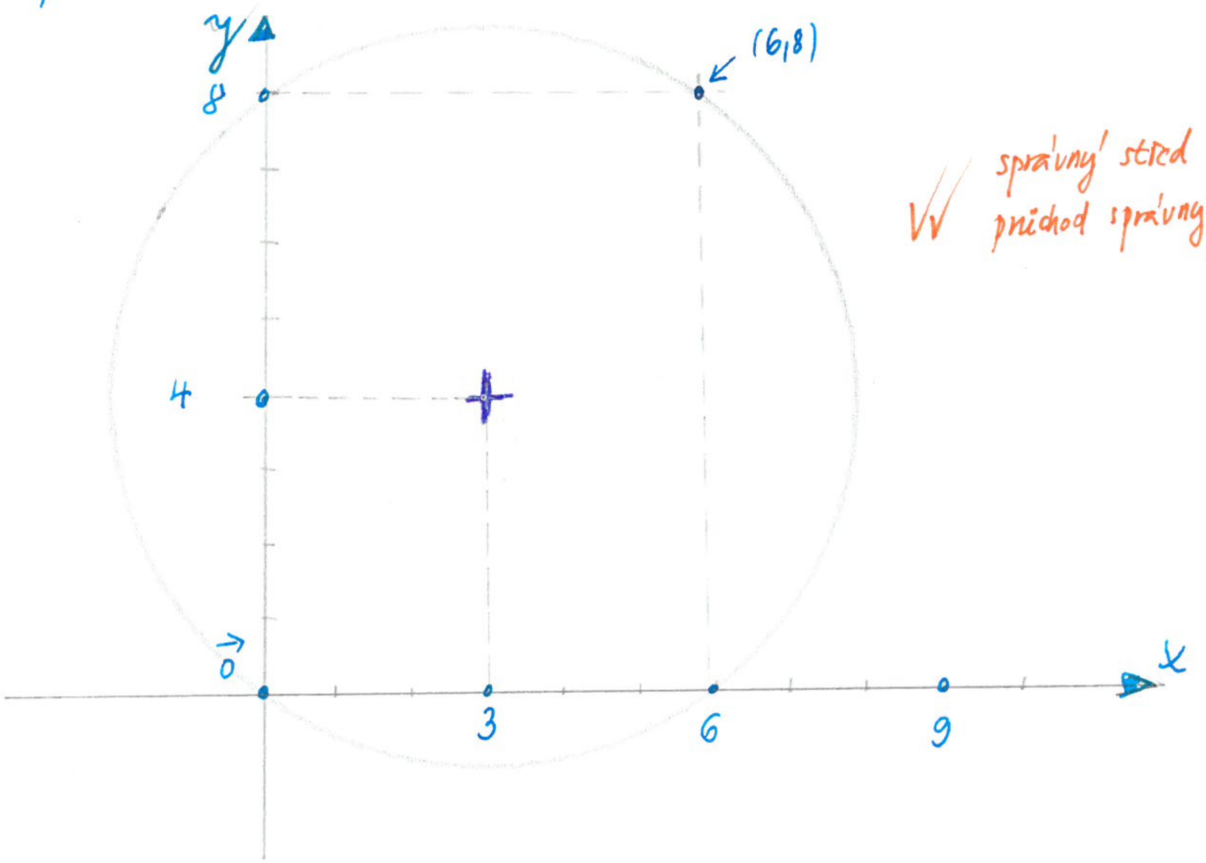
$$D = 0$$

Závěr: $$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

↳ úprava: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9 + 16 = 25$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

Jde tedy o kružnici o poloměru $R = 5$ se středem v bodě $(3,4)$. Navíc prochází bodem $(0,0)$.



správný střed
průchod správnými body

$$y''' + 6y'' + 9y' = \underbrace{18x}_{q_1} + \underbrace{9e^{-3x}}_{q_2}$$

9b

•) $FS = ?$ $\qquad \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2$

$$FS = \{1, e^{-3x}, xe^{-3x}\}$$

•) $\hat{L}(y(x)) = q_1$ $\qquad y_p(x) = (ax+b)\cdot x = ax^2 + bx \qquad (a,b) = ?$

$$y_p'(x) = 2ax + b$$

$$y_p''(x) = 2a \quad \& \quad y_p'''(x) = 0$$

$$\underbrace{6(2a) + 9(2ax+b) = 18x}$$

$$\left.\begin{aligned} 18a &= 18 \\ 12a + 9b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (a,b) = \left(1, -\tfrac{12}{9}\right) = \left(1, -\tfrac{4}{3}\right)$$

$$y_p(x) = x^2 - \tfrac{4}{3}x$$

•) $\hat{L}(y(x)) = q_2$ $\qquad y_p(x) = ae^{-3x}\cdot x^2$

$$y_p'(x) = a(2x - 3x^2)e^{-3x}$$

$$y_p''(x) = a(2 - 6x - 6x + 9x^2)e^{-3x} =$$

$$= a(2 - 12x + 9x^2)e^{-3x}$$

$$y_p'''(x) = a(-12 + 18x - 6 + 36x - 27x^2)e^{-3x} =$$

$$= a(-18 + 54x - 27x^2)e^{-3x}$$

$$a[-18 + 54x - 27x^2] + 6a[2 - 12x + 9x^2] + 9a[2x - 3x^2] = 9$$

$$a(-18 + \cancel{54x} - \cancel{27x^2} + 12 - \cancel{72x} + \cancel{54x^2} + \cancel{18x} - \cancel{27x^2}) = 9$$

$$-6a = 9$$

$$a = -3/2$$

$$y_p(x) = -\tfrac{3}{2}x^2e^{-3x}$$

Celkem: $\left.\begin{aligned} &y(x) = \alpha + \beta e^{-3x} + \gamma xe^{-3x} + x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{3}{2}x^2e^{-3x} \\ &\mathrm{Dom}(y) = \mathbb{R}\end{aligned}\right\}$

$$\frac{9y}{x^3} - \frac{9y'}{x^2} + y''' + \frac{2y''}{x} = 7x \quad / \, x^3$$ 9b

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - 9xy' + 9y = 7x^4 \quad / \text{ Eulerova ODE}$$

Pro $I = (0; +\infty)$ klademe: $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$

$$y' = \dot{y}\frac{1}{x} \qquad y'' = \ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\frac{1}{x^2} \qquad y''' = \dddot{y}\frac{1}{x^3} - 3\ddot{y}\frac{1}{x^3} + 2\dot{y}\frac{1}{x^3}$$

Dosazení:

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} + 2\ddot{y} - 2\dot{y} - 9\dot{y} + 9y = 7e^{4t}$$

$$\dddot{y} - \ddot{y} - 9\dot{y} + 9y = 7e^{4t}$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 9 = \lambda^2(\lambda - 1) - 9(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda^2 - 9)(\lambda - 1) = (\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda - 1)$$

$$y(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-3t} + \mu e^{t} + y_p(t)$$

$y_p(t) = ?$ $\qquad y_p(t) = a e^{4t} \qquad \dot{y}_p(t) = 4ae^{4t} \qquad \ddot{y}_p(t) = 16ae^{4t}$

$$\dddot{y}_p(t) = 64ae^{4t}$$

$$(64 - 16 - 36 + 9)\, a e^{4t} = 7e^{4t}$$

$$21\, a e^{4t} = 7e^{4t}$$

$$a = 1/3$$

$$y_p(t) = \frac{1}{3}e^{4t}$$

Závěr:

$$y(x) = \alpha x^3 + \frac{\beta}{x^3} + \mu x + \frac{1}{3}x^4 \;; \quad I = (0; +\infty)$$

Pro $I = (-\infty, 0)$ se pouze změní pravá strana: $q(t) = -7e^{4t}$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{3}e^{4t} \quad \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{3}x^4$$

$\Rightarrow$ Na $(-\infty, 0)$ je řešení stejné jako řešení na $(0; +\infty)$

8b

$$\underbrace{(x^2-2y^2)}_{f(x,y)} + \underbrace{2x(2y+x)}_{g(x,y)}\,y' = 0$$

f a g jsou homogenní stupně 2

$\Rightarrow$ jedná se o homogenní rovnici

•) Pokus o lineární řešení $y = \alpha x$

$$\left\{\begin{aligned} x^2 - 2\alpha^2 x^2 + 2x(2\alpha x + x)\cdot\alpha &= 0 \\ 1 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2 + 2\alpha &= 0 \\ 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad D = 4\alpha^2 - 8\alpha^2 < 0 \Rightarrow$$ řešení neexistuje

•) Obecné řešení: $y(x) = x\cdot u(x) \Rightarrow y' = u + xu'$

$$2x(2x\cdot u + x)\cdot(u + xu') = 2x^2u^2 - x^2$$

$$(4u+2)(u+xu') = 2u^2 - 1$$

$$4u^2 + 4xu\cdot u' + 2u + 2xu' = 2u^2 - 1$$

$$u'(4xu + 2x) = -2u^2 - 2u - 1$$

$$-x\cdot u' = \frac{2u^2+2u+1}{4u+2}$$

$$\int \frac{4u+2}{2u^2+2u+1}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|2u^2+2u+1| = -\ln|x| + C$$

$$2u^2 + 2u + 1 = \frac{C}{x}$$ .... zde už $\underbrace{\text{uvažujeme jen } x>0}_{\text{je to tak v počáteční podmínce}}$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = \frac{C}{x} \quad / \; x^2$$

$$2y^2 + 2xy + x^2 = Cx$$

$$y(2) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2\cdot C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x = 0$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová práce č. 2 z předmětu 01ANB3 – verze B

25. listopadu 2024, 10:00 — 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (8 bodů)
Rozhodněte, zda funkční řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{\sqrt{n}\cdot(2n+1)!!}\left(\frac{x}{16n^3+x^3}\right)^{1/4}$$

na množině $G = (0, +\infty)$.

2 (7 bodů)
Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0,$$

kde $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$ a $y'''(0) = 6$.

3 (9 bodů)
Řešte rovnici

$$y'' + 8y' + 16y = \frac{x+1}{x}\mathrm{e}^{-4x}$$

4 (9 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{4y}{x^3} - \frac{4y'}{x^2} + y''' + \frac{2y''}{x} = 21x^2$$

5 (7 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$3y + y'(3x + 10y + 1) = -x - 1$$

vyhovující podmínce $y(-12) = 5$.

1 (bodů)

Rozhodněte, zda funkční řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{(2n)!!}{\sqrt{n}\cdot(2n+1)!!}\left(\frac{x}{\underbrace{16n^3+x^3}_{g_n(x)}}\right)^{1/4}}^{h_n(x)}$$

na množině $G = (0, +\infty)$.

8b

$g_n(0) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0 \qquad g_n(x) = C(G)$

korektní rozhodnutí o extrému

$$g_n'(x) = \frac{16n^3 + x^3 - 3x^3}{(16n^3+x^3)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x = 2n \text{ (stacionární bod)}}_{\text{jde zjevně o globální maximum}}$$

$$\forall x \in G: \quad |g_n(x)| \leq g_n(2n) = \frac{2n}{16n^3 + 8n^3} = \frac{1}{12n^2}$$

Pro řadu tedy:

$$\forall x \in G: \quad |h_n(x)| \leq \frac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n+1)!!}\left(\frac{1}{12n^2}\right)^{1/4} \leq \underbrace{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,\frac{1}{n}}_{a_n}$$

Snaha užít Weierstrassovo kritérium:

$\sum a_n$ konverguje z Raabeova kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{n}{1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n^2+2n}{2n^2+5n+3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{2n^2+5n+3-2n^2-2n}{2n^2+5n+3} = \frac{3}{2} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum a_n \text{ konverguje}$$

$\Rightarrow$ Funkční řada $\sum_n h_n(x)$ konverguje na G stejnoměrně

(musí být uvedeno z jakého kritéria to plyne)

7ℓ

$$y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) + (\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda+1)^2 \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+i)(\lambda-i) = 0$$

$$FS = \{e^{-x};\ xe^{-x};\ \cos x;\ \sin x\}$$

$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta \cdot x \cdot e^{-x} + \gamma \cdot \cos(x) + \delta \sin(x)$$

jedno nebo druhé

$$y(0) \overset{!}{=} -2 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma = -2$$

$$y'(x) = -\alpha e^{-x} + \beta(1-x)e^{-x} - \gamma \sin(x) + \delta \cos(x)$$

$$y'(0) \overset{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad -\alpha + \beta + \delta = 2$$

$$y''(x) = \alpha e^{-x} + \beta(-1-1+x)e^{-x} - \gamma \cos(x) - \delta \sin(x)$$

$$y''(0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha - 2\beta - \gamma = 0$$

$$y'''(x) = -\alpha e^{-x} + \beta\big(\overset{1+2-x}{\cancel{-1+2x+x+x^2+x^3}}\big)e^{-x} + \gamma \sin(x) - \delta \cos(x)$$

$$y'''(0) \overset{!}{=} 6 \quad \Rightarrow \quad -\alpha + 3\beta - \delta = 6$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \gamma = -2 \\ -\alpha + \beta + \delta = 2 \\ \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta - \delta = 6 \end{array}\right\} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 3, -4, 1)$$

$$y(x) = 2e^{-x} + 3xe^{-x} - 4\cos(x) + \sin(x);\ I = \mathbb{R}$$

$$y'' + 8y' + 16y = \frac{x+1}{x} e^{-4x} = \underbrace{e^{-4x}}_{g_1} + \underbrace{\frac{1}{x} e^{-4x}}_{g_2}$$

9b

•) $FS = ?$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda+4)^2$$

$$FS = \{ e^{-4x} ; x e^{-4x} \}$$

•) $\hat{L}(y(x)) = g_1$

$$y_p(x) = a e^{-4x} x^2$$

$$y_p'(x) = a(2x - 4x^2) e^{-4x}$$

$$y_p''(x) = a(2 - 8x - 8x + 16x^2) e^{-4x}$$

$$a(2 - \cancel{16x} + \cancel{16x^2} + \cancel{16x} - \cancel{32}x^2 + \cancel{16x^2}) \stackrel{!}{=} 1$$

$$a = 1/2$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-4x}$$

•) $\hat{L}(y(x)) = g_2$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-4x} & x e^{-4x} \\ -4e^{-4x} & (1-4x) e^{-4x} \end{vmatrix} = e^{-8x}(1 - 4x + 4x) = e^{-8x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-4x} \\ \frac{1}{x} e^{-4x} & (1-4x) e^{-4x} \end{vmatrix} = -1 \cdot e^{-8x} \Rightarrow f_1(x) = -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-4x} & 0 \\ -4e^{-4x} & \frac{1}{x} e^{-4x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} e^{-8x} \Rightarrow f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$F_1(x) = -x + \alpha \quad \& \quad F_2(x) = \ln|x| + \beta$$

$$y_p(x) = \alpha e^{-4x} + \beta x e^{-4x} - x e^{-4x} + x e^{-4x} \ln|x|$$

Celkem:

$$y(x) = A e^{-4x} + B x e^{-4x} + x e^{-4x} \ln|x| + \frac{1}{2} x^2 e^{-4x}$$

$\mathrm{Dom}(y) = (0; +\infty)$ nebo $\mathrm{Dom}(y) = (-\infty; 0)$

$$x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 21x^5 \quad / \text{ Eulerova ODE}$$ 9b

Pro $I=(0;+\infty)$ klademe: $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$

$$y' = \dot{y}\frac{1}{x} \qquad y'' = \ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\frac{1}{x} \qquad y''' = \dddot{y}\frac{1}{x^3} - 3\ddot{y}\frac{1}{x^3} + 2\dot{y}\frac{1}{x^3}$$

Dosazení:

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} + 2\ddot{y} - 2\dot{y} - 4\dot{y} + 4y = 21e^{5t}$$

$$\dddot{y} - \ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 21e^{5t}$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2(\lambda-1) - 4(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-4) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

$$y(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{-2t} + y_p(t)$$

$y_p(t) = ?$ $\qquad y_p(t) = Ae^{5t} \qquad 5, 25, 125$

$$(125 - 25 - 20 + 4)Ae^{5t} \stackrel{!}{=} 21e^{5t}$$

$$84Ae^{5t} = 21e^{5t}$$

$$A = 1/4$$

$$y_p(t) = \frac{1}{4}e^{5t}$$

Závěr:

$$y(x) = \alpha x + \beta x^2 + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{1}{4}x^5; \quad I = (0;+\infty) \quad (*)$$

Pro $I=(-\infty;0)$ se pouze změní pravá strana

$q(x) = -21e^{5t} \Rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{4}e^{5t} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{4}x^5$

$\Rightarrow$ Na $(-\infty;0)$ je řešení stejné jako $(*)$

$$\underbrace{x+3y+1}_{f} + y'\underbrace{(3x+10y+1)}_{g} = 0$$

7b

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{rovnice je exaktní}$$

$$H(x,y) = \int_0^x f(s,y)\,ds + \int_0^y g(0,t)\,dt =$$

$$= \int_0^x (s+3y+1)\,ds + \int_0^y (10t+1)\,dt =$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} + 3ys + s\right]_0^x + \left[5t^2 + t\right]_0^y =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3xy + x + 5y^2 + y$$

Formální řešení (obecné):

$$x^2 + 6xy + 10y^2 + 2x + 2y = C$$

Hledání formálního řešení procházejícího bodem $(x_0, y_0) = (-12, 5)$:

$$144 - 360 + 250 - 24 + 10 = C$$

$$C = 20$$

Závěr:

$$x^2 + 6xy + 10y^2 + 2x + 2y = 20$$

$$\Downarrow$$

$$(x+3y-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

... elipsa