Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Zápočtová práce č. 3 z předmětu 01ANB3 – verze A

19/12/2022, 12:00 - 13:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

DE **1** (6 bodů)

Jaký úhel svírají funkce x^2 a x v Hilbertově prostoru, v němž je skalární součin zadán vztahem

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\,?$$

A jakou mají tyto funkce vzdálenost? Btw, může se hodit: $\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$

2 (9 bodů)

Prověřte, zda má funkce

MJ

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{5x+2y}{x+y} & \dots \quad x \neq -y, \\ xy & \dots \quad x = -y, \end{cases}$$

v bodě $(0,0)$ *a)* gradient, *b)* totální diferenciál, *c)* směrovou derivaci ve směru $\vec{s} = (1,1)$.

3 (5 bodů)

VK Pro jaké $\alpha \in \mathbf{R}$ je bod $(11,3)$ hraničním bodem okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 5$ v Hilbertově prostoru $\mathbf{R}^2$ se skalárním součinem

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}?$$

Neopomeňte prověřit, zda uvedený předpis pro zjištěné α skutečně skalární součin zadává!

KS **4** (8 bodů)

Pro kvadratickou plochu

$$x^2 + 4xy - 10xz + 2x + 3y^2 - 26yz - 2y - 28z - 9 = 0$$

nalezněte obě signatury a střed. O jakou kvadriku se jedná (určete název)?

5 (5 bodů)

VK Jaký úhel svírají gradienty funkcí

$$f(x,y,z) = xy^2 + 4zx^2 - 15x, \qquad g(x,y,z) = -y + z + (-x + y + z)^3$$

v bodě $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -2)$?

6 (7 bodů)

Vykreslete okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 12$ v prostoru s metrikou $\varrho(\vec{x},\vec{y}) = 2|x_1 - y_1| + 4\lceil|x_2 - y_2|\rceil$ a poté rozhodněte, která z posloupností

MK

$$(\vec{a}_n)_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty \quad \& \quad (\vec{b}_n)_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{n}, 0\right)_{n=1}^\infty \quad \& \quad (\vec{c}_n)_{n=1}^\infty = \left(0, \frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$$

je v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ konvergentní a která naopak ne.

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-2x}\,dx$$

$$\measuredangle(f,g) := \mathrm{AC}\,\frac{|\langle f|g\rangle|}{\|f\|\cdot\|g\|}$$

$$\langle x^2, x\rangle = \int_0^{\infty} x^3 e^{-2x}\,dx = \frac{3!}{2^4} = \frac{3}{8}$$

$$\langle x^2|x^2\rangle = \int_0^{\infty} x^4 e^{-2x}\,dx = \frac{4!}{2^5} = \frac{3\cdot 2^3}{2^5} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \|x^2\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\langle x|x\rangle = \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x}\,dx = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \frac{1}{2}$$

$$\measuredangle(x^2, x) = \arccos\frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\rho^2(x^2, x) = \|x^2 - x\|^2 = \int_0^{\infty} (x^2 - x)^2 e^{-2x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x^4 e^{-2x}\,dx - 2\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x}\,dx + \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4} - 2\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{6}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\rho(x^2, x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\tau\to 0} \frac{f(\tau,0)-f(0,0)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \frac{0}{\tau} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\tau\to 0} \frac{f(0,\tau)-f(0,0)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \frac{2\tau}{\tau} = 2$$

$$\text{c)}\ \underline{\operatorname{grad} f(\vec{0}) = (0;2)}$$

TD:
$$\eta(\vec{h}) = f(\vec{h}) - f(\vec{0}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0})\cdot h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0})\cdot h_2 =$$

$$= h_2\,\frac{5h_1+2h_2}{h_1+h_2} - 2h_2 = \frac{5h_1h_2+2h_2^2-2h_1h_2-2h_2^2}{h_1+h_2} =$$

$$= \frac{3h_1h_2}{h_1+h_2}$$

$$\lim_{(x,y)\to\vec{0}} \frac{\eta(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to\vec{0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{3xy}{x+y} \ \ldots\ \text{neexistuje (viz níže)}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\vec{0}\\ y=kx}} \frac{\eta(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{3kx^2}{x+kx}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+k^2x^2}} = \underbrace{\frac{3k}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{1}{1+k}\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)}_{\text{neexistuje}}$$

$$\text{c)} \Rightarrow \underline{\text{TD neexistuje}}$$

Směrová derivace: (nelze užít vzorce!)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{\tau\to 0}\frac{f(\vec{0}+\tau\cdot\vec{s})-f(\vec{0})}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\cdot\tau\,\frac{5\tau+2\tau}{\tau+\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{\tau\to 0}\frac{5\tau+2\tau}{\tau+\tau} = \frac{7}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{7\sqrt{2}}{4}}$$

(3) 5 bodů

$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ & $\|\vec{z}\| = \sqrt{\langle \vec{z} | \vec{z} \rangle_A}$

$\vec{a} = (11, 3)$ ... hraničný bod okolí $U_5(\vec{o})$

$$\Rightarrow \rho^2(\vec{a}, \vec{o}) \overset{!}{=} 25$$

$$\Rightarrow \rho^2(\vec{a}, \vec{o}) = \|\vec{a} - \vec{o}\|^2 = \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle_A = (11, 3) \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (8; 3\alpha - 132) \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} = 88 + 9\alpha - 396 \overset{!}{=} 25$$

$$9\alpha = 308 + 25$$

$$9\alpha = 333$$

$$\alpha = 37$$

Kontrola pozitivní definitnosti matice A:

$$\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 37 \end{pmatrix} = A \qquad \underbrace{\Delta_1 = 4 > 0 \quad \& \quad \Delta_2 = \det(A) = 148 - 144 = 4 > 0}_{\text{Sylvesterovo kritérium}}$$

$\Rightarrow A \triangleright 0 \Rightarrow \vec{x}^T A \vec{y}$ splňuje axiomy skal. součinu

$$Q(x,y,z) = \underbrace{x^2+4xy-10xz+3y^2-26yz}_{q(x,y,z)} + 2x-2y-28z-9 = 0$$

$$q(x,y,z) = (x+2y-5z)^2 - 4y^2 - 25z^2 + 20yz + 3y^2 - 26yz =$$
$$= (x+2y-5z)^2 - y^2 - 6yz - 25z^2 =$$
$$= (x+2y-5z)^2 - (y+3z)^2 - 16z^2 =$$
$$= r^2 - s^2 - t^2$$

$$\left.\begin{aligned} r &= x+2y-5z \\ s &= y+3z \\ t &= 4z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= r-2s+\overbrace{\tfrac{3}{2}t+\tfrac{5}{4}t}^{11/4\,t} \\ y &= s-\tfrac{3}{4}t \\ z &= \tfrac{1}{4}t \end{aligned}$$

$$Q(r,s,t) = r^2-s^2-t^2+2r-4s+\tfrac{11}{2}t-2s+\tfrac{3}{2}t-7t-9 =$$
$$= r^2-s^2-t^2+2r-6s-9 =$$
$$= (r+1)^2-(s+3)^2-t^2-9-1+9 = 0$$

$$(r+1)^2-(s+3)^2-t^2 = 1$$

$$a^2-b^2-c^2 = 1$$
$$b^2+c^2-a^2 = -1$$

Rotační eliptický hyperboloid

$$sg(Q) = (2,1,0)$$
$$SG(Q) = (3,1,0) \rightarrow \text{regulární}$$

Střed:

$$(a,b,c) = 0 \Rightarrow (r,s,t) = (-1,-3,0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,y,z) = (5,-3,0)$$

Anebo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -13 \\ -5 & -13 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5) 5 bodů

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 8xz - 15 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,-2) = 1 + 16 - 15 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,-2) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(-1,1,-2) = 4$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3(-x+y+z)^2 \cdot (-1) \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,-2) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3(-x+y+z)^2 - 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,-2) = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3(-x+y+z)^2 + 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,-2) = 1$$

$$\langle (2,-2,4) \mid (0,-1,1) \rangle = 6 \quad \Rightarrow \langle \vec{s} \mid \vec{r} \rangle = 6$$

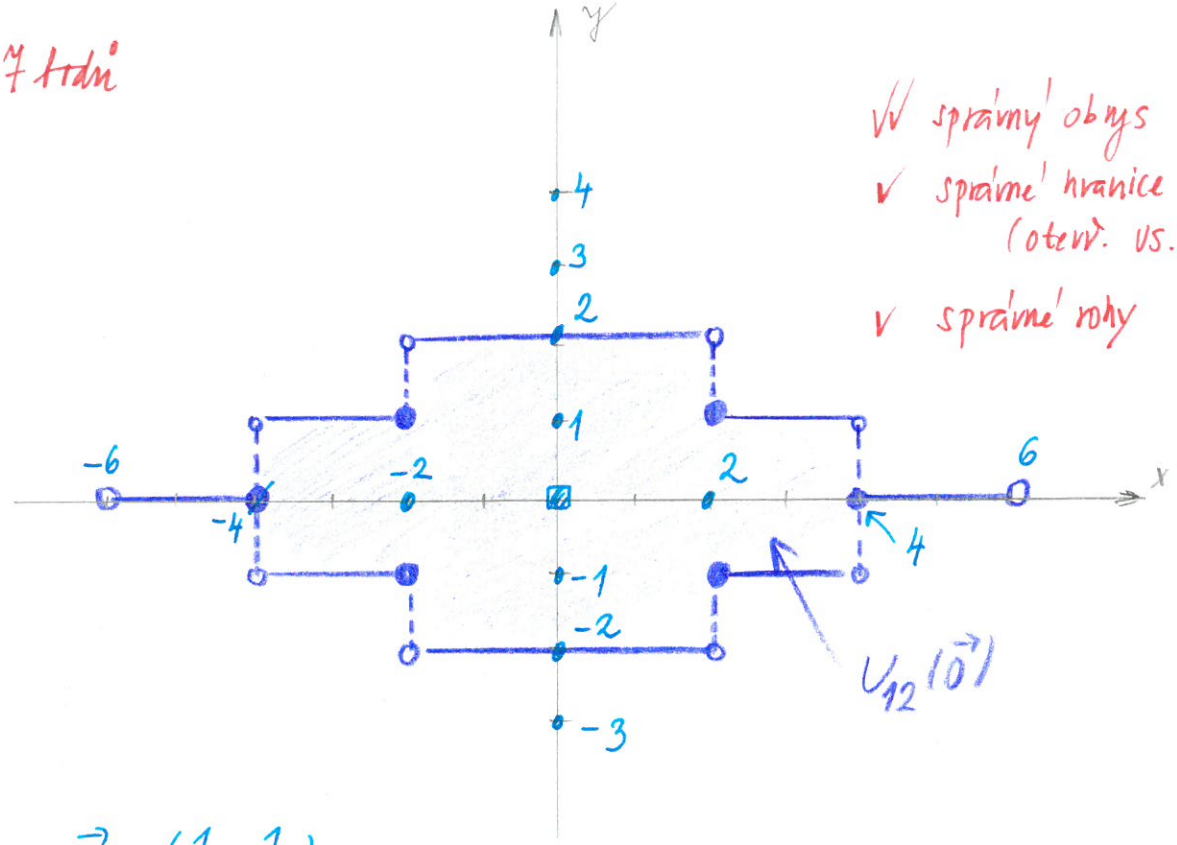
$$\langle (2,-2,4) \mid (2,-2,4) \rangle = 4 + 4 + 16 = 24 \quad \Rightarrow \|\vec{s}\| = 2\sqrt{6}$$

$$\langle (0,-1,1) \mid (0,-1,1) \rangle = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \|\vec{r}\| = \sqrt{2}$$

$$\measuredangle(\vec{s},\vec{r}) = \arccos \frac{|\langle \vec{s} \mid \vec{r} \rangle|}{\|\vec{s}\| \cdot \|\vec{r}\|} = \arccos \frac{6}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} =$$

$$= \arccos \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

7 bodů



✓✓ správný obrys

✓ správné hranice (otevř. vs. uzavř.)

✓ správné rohy

$\vec{a_n} = \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$

$\vec{b_n} = \left(\frac{1}{n}; 0\right)$

$\vec{c_n} = \left(0; \frac{1}{n}\right)$

$\rho(\vec{a_n}, \vec{0}) = \frac{2}{n} + 4$ ... nelze stlačit pod libovolně malé $\varepsilon > 0$ ✓

$\rho(\vec{b_n}, \vec{0}) = \frac{2}{n} < \varepsilon$ ... tady to projde, tj: $n > \frac{2}{\varepsilon}$ ✓

$\rho(\vec{c_n}, \vec{0}) = 4$ ... zase nejde stlačit pod $\varepsilon > 0$ ✓

Jedinou konvergentní posloupností je tedy $(\vec{b_n})_{n=1}^{\infty}$ a platí:

•) $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{b_n} \overset{\{\mathbb{R}^2;\rho\}}{=} \vec{0}$

Zápočtová práce č. 3 z předmětu 01ANB3 – verze B

5/1/2023, 9:30 - 11:10

1 (8 bodů)

V metrickém prostoru $(\mathbf{R}^2, \varrho)$ s metrikou

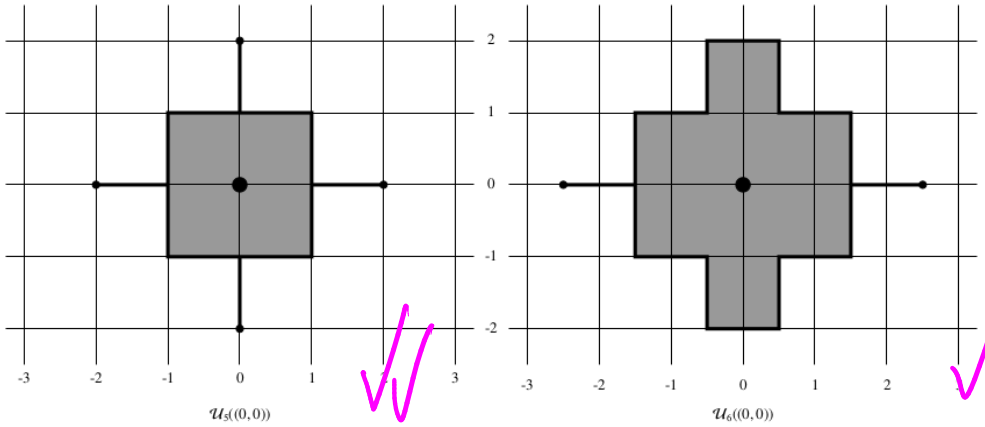
$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \lceil 2\,|x_1 - y_1| \rceil + 2\,\lceil |x_2 - y_2| \rceil$$

vykreslete tvary okolí $\mathcal{U}_5(0,0)$ a $\mathcal{U}_6(0,0)$ a rozhodněte, zda je množina $G = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ otevřená nebo uzavřená.

Řešení 1:

- Hodnoty metriky ρ_J se mění při překročení celočíselných hodnot na ose x_2 a při překročení násobků $\frac{1}{2}$ na ose x_1(pozor na to!). Při hledání bodů, které patří do daných okolí, lze postupovat např. takto:
  - Hledáme body $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pro které
  $$\rho_J(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = \lceil 2\,|x_1| \rceil + 2\,\lceil |x_2| \rceil < 5, \text{ resp. } 6.$$
  - Okolí je symetrické vzhledem k zrcadlení podél osy x_1 i x_2, můžeme se tedy omezit jen na kladný kvadrant.
  - Pro $x_2 = 0$ je hodnota druhého sčítance nejmenší, a to 0. Řešíme tedy nerovnost
  $$\begin{aligned} \lceil 2x_1 \rceil &< 5, \\ 2x_1 &\le 4, \\ x_1 &\le 2, \end{aligned}$$
  respektive
  $$\begin{aligned} \lceil 2x_1 \rceil &< 6, \\ 2x_1 &\le 5, \\ x_1 &\le \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
  .. za postup
  - Pro $x_2 \in (0, 1\rangle$ je hodnota druhého sčítance rovna 2. Řešíme tedy nerovnost
  $$\lceil 2x_1 \rceil + 2 < 5, \text{ atd.}$$

- Výsledný tvar okolí je vidět na obrázku.



- Pro každý bod $\boldsymbol{x}$ existuje okolí, např $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})$, v němž leží jen on sám.
  - Z toho plyne, že všechny body libovolné množiny se do ní vejdou i se svým okolím, tj. leží také v jejím vnitřku. Libovolná množina v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_J)$ je tedy otevřená.
  - Ze stejného důvodu je hranice libovolné množiny prázdná (z definice hraničního bodu M, kde v každém jeho okolí leží nějaký bod z M a nějaký mimo M). Z definice $\bar{M} = M \cup \mathrm{bd}(M)$ je tedy každá množina zároveň i uzavřená.

2 (6 bodů)
V Hilbertově prostoru $H = [x, x^2, x^3]_\lambda$ je skalární součin zaveden předpisem

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,?$$

Nalezněte všechny funkce z prostoru H, které jsou současně kolmé k funkcím $f(x) = x + x^3$ a $g(x) = x - x^3$ a jejich norma je rovna $\sqrt{10}$.

Řešení: $h \in H \iff h(x) = ax + bx^2 + cx^3$

Podmínky: $h \perp f \iff \langle h|f\rangle \overset{!}{=} 0$

dosazení do integrálu

$$\iff 0 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} h(x)f(x)\,dx = \underline{\int_{-1}^{1} (ax+bx^2+cx^3)(x+x^3)\,dx} =$$

$$= \int_{-1}^{1} a(x^2+x^4) + b(x^3+x^5) + c(x^4+x^6)\,dx$$

$$= \underline{2a\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right) + 2c\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}\right)} \overset{!}{=} 0$$

(liché mocniny mají $\int \dots = 0$)

Analogicky $h \perp g \iff \langle h|g\rangle \overset{!}{=} 0$

$$\iff 0 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} h(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (ax+bx^2+cx^3)(x-x^3)\,dx$$

$$= \dots = \underline{2a\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right) + 2c\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}\right)} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3}+\frac{1}{5} & \frac{1}{5}+\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}-\frac{1}{7} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow a = c = 0$$

$\Rightarrow h(x) = bx^2$ a navíc musí $\|h\|^2 \overset{!}{=} 10$, tj.

$$10 \overset{!}{=} \langle h|h\rangle = \int_{-1}^{1} (bx^2)^2 = b^2 \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2b^2}{5}$$

$$\iff 25 = b^2 \iff \underline{\underline{b = \pm 5}}.$$

Jediné funkce splňující podmínky jsou $h(x) = \pm 5x^2$.

3 (6 bodů)
Pro funkci

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+9y^4} & \dashrightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0, \\ 0 & \dashrightarrow x = 0 \wedge y = 0, \end{cases}$$

nalezněte posloupnost $(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k nule, a pro níž je limitou funkčních hodnot $g(\vec{a}_n)$ číslo $-1/6$.

Řešení:

Všimneme si, že $g(x,y)$ se zjednoduší pro $x = ky^2$

na $g(ky^2, y) = \frac{ky^4}{(k^2+9)y^4} = \frac{k}{k^2+9}$ pro každé $y \neq 0$.

a tedy, volíme-li $\vec{a}_n = \begin{pmatrix} \frac{k}{n^2} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ ✓✓, pak $\vec{a}_n \to \vec{0}$

a $\lim\limits_{n \to +\infty} g(\vec{a}_n) = \frac{k}{k^2+9}$ ✓

My chceme, aby $\frac{k}{k^2+9} \overset{!}{=} -\frac{1}{6} \iff -6k = k^2+9$

$0 = k^2+6k+9$

$\underline{\underline{0 = (k+3)^2}}$ ✓✓

Z toho $k = -3$ a podmínky splňuje např.

$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} -\frac{3}{n^2} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ ✓ ... finální odpověď

4 (8 bodů)
Kvadratickou funkci $x^2 - 12xy + 6xz + 32y^2 - 28yz + 5z^2$ lze regulární transformací převézt pouze na jedinou z funkcí

$$f(a,b,c) = a^2+4b^2-c^2, \qquad g(a,b,c) = -a^2-2ab-2ac+4bc+8c^2, \qquad h(a,b,c) = a^2-b^2-c^2.$$

Na kterou? Vysvětlete proč a zmíněnou regulární transformaci najděte.

Řešení:

Jde o kvadratickou formu. Převodem na čtverec dostáváme

$$Q(x,y,z) = (x-6y+3z)^2 - 4y^2 - 4z^2 + 8yz =$$

$$= (\underbrace{x-6y+3z}_{s})^2 - 4(\underbrace{y-z}_{t})^2 \Rightarrow sg(Q) = (1,1,1)$$

Z toho je zřejmé, že $f(a,b,c)$ ani $g(a,b,c)$ nevyhovují, neboť nemají stejnou signatura

Zbývá ověřit $g(a,b,c) = -(a+b+c)^2 + b^2 + 9c^2 + 6bc =$

$$= -(\underbrace{a+b+c}_{s})^2 + (\underbrace{b+3c}_{t})^2 \qquad sg(g) = (1,1,1)$$

$\Rightarrow$ Q lze převést pouze na g: ... odpověď na otázku

Reg. transformace mezi (x,y,z) a (a,b,c) lze volit např. jako

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Pak $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Řekl jsem jim, že není nutné invertovat

5 (5 bodů) Pro která $\mu \in \mathbf{R}$ zadává forma

$$\vec{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

skalární součin na $\mathbf{R}^5$?

Řešení:

forma je ve tvaru $qq(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y}$,

kde $A = A^T$, a splňuje proto axiomy skalárního součinu $\Leftrightarrow A \triangleright 0$ ✓

Dle Sylvestrova kritéria $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 4$ ... > 0 ✓

a dále

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 4 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(1-\mu^2) \overset{!}{>} 0 \Leftrightarrow |\mu| < 1$$ ✓

$$\Delta_5 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_4 + \mu \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ 1 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_4 - \mu^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 4 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=\Delta_4} = \underbrace{\Delta_4}_{>0}(1-\mu^2) \overset{!}{>} 0$$ ✓

stejná podmínka

$\Rightarrow$ qq zadává skalární součin $\Leftrightarrow |\mu| < 1$. ✓

finální odpověď

6 (7 bodů)
Jaký geometrický útvar je grafem funkce

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 8x + 5y^2 + 18y + 17\,?$$

Ve kterém bodě má tato funkce nejnižší funkční hodnotu a jaká je v něm hodnota gradientu? Řádně vysvětlete.

Řešení: jde o kvadriku $Q(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$

kde $f(x,y) = (x+2y)^2 + y^2 + 8x + 18y + 17$

$\Rightarrow$ kvadratická část má 2 kvadráty

$\Rightarrow$ normální tvar Q bude obsahovat lineární člen v (posunuté) proměnné z

$Q(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 2\tilde{z} = 0$ $\Rightarrow$ jde o <u>paraboloid</u>

Minimum f lze získat dokončením úpravy na čtverec (je to bod, kde $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$, protože oba kvadráty jsou s kladným znaménkem). $\leftarrow$ nějaké zdůvodnění, že to musí být minimum

Jde zároveň o bod, kde musí platit $\nabla f(x_0,y_0) = 0$. tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 + 4y_0 + 8 \overset{!}{=} 0 \iff x_0 + 2y_0 = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 4x_0 + 10y_0 + 18 \overset{!}{=} 0 \iff 2x_0 + 5y_0 = -9$$

<u>Z toho $(x_0,y_0) = (-2,-1)$.</u>