Opravuji pan Kováč!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

3. května 2021, 9:20–11:20

1 (9 bodů)

Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x, y, z \geqslant 0\right\}.$$

2 (9 bodů)

Jakých extremálních hodnot nabývá funkce

$$g(x,y,z) = x^2 - 4xy + 6x + 5y^2 - 2yz - 10y + 2z^2 - 4z$$

v rovině $y - z + 1 = 0$? Úlohu řešte výhradně metodou Lagrangeových multiplikátorů.

3 (10 bodů)

Vyšetřete lokální extrémy funkce $z(x, y, u)$, jež je zadána rovnicí

$$z^3 + 3uz^2 + 4x^2 + 24xy - u^3 + 68y + 2y^2 = 37.$$

Omezte se na případ, kdy $z > 0$ a současně $u > 0$.

4 (4 body)

Vypočítejte moment setrvačnosti $J = \int_V (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}(x, y, z)$ pro polokulovou vrstvu

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \mathbf{r}^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \mathrm{R}^2 \wedge z \geqslant 0\right\}.$$

5 (9 bodů)

Určete souřadnice těžiště obrazce

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant 2\frac{y^3}{b^3}\right\}.$$

√ = bod

√X = půl bod

√! = bod se uznává pouze za zcela přesný číselný výsledek

√√! = jeden bod lze udělit i za nesprávný číselný výsledek (pokud k němu student došel korektními postupy a dopustil se pouze numerických chyb), zatímco druhý bod se uděluje za zcela správný číselný výsledek

9b

$$x = a\rho\cos\vartheta\cos^4\varphi$$
$$y = b\rho\cos\vartheta\sin^4\varphi$$
$$z = c\rho\sin\vartheta$$

$$\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta \leq \sqrt{\rho}\sqrt{\cos\vartheta}\cos(2\varphi)$$
$$\rho^{3/2} \leq \sqrt{\cos\vartheta}\cos 2\varphi$$
$$\rho^3 \leq \cos\vartheta\cdot\cos^2(2\varphi)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(2\varphi) \overset{!}{>} 0 \Rightarrow \varphi\in(0,\tfrac{\pi}{4})\\ x,y,z \overset{!}{>} 0 \Rightarrow \varphi\in(0;\tfrac{\pi}{2})\ \&\ \vartheta\in(0;\tfrac{\pi}{2})\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\varphi\in(0;\tfrac{\pi}{4})\\ \vartheta\in(0;\tfrac{\pi}{2})\end{array}$$

$$J = 4abc\rho^2\cos\vartheta\cos^3\varphi\sin^3\varphi$$

jsou-li zde chybné meze nebo chybí-li jakobián (či je špatně), DÁLE SE NEOPRAVUJE!

$$V(T) = \int_T 1\, d(x,y,z) = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt[3]{\cos\vartheta\cos^2(2\varphi)}} 4abc\rho^2\cos\vartheta\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} abc\cdot\cos^2\vartheta\cos^2(2\varphi)\sin^3(2\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi = \left|\begin{array}{c}\text{věta o}\\ \text{separabilitě}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}abc\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\, d\vartheta\cdot\int_0^{\pi/4}\cos^2(2\varphi)\cdot(1-\cos^2(2\varphi))\cdot\sin(2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{l}u = \cos(2\varphi)\\ du = -\sin(2\varphi)\cdot 2\cdot d\varphi\end{array}\right| = \frac{1}{12}abc\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\vartheta)\, d\vartheta\cdot\int_0^1 u^2(1-u^2)\cdot\frac{1}{2}\, du =$$

$$= \frac{1}{24}abc\left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]_0^{\pi/2}\cdot\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{48}abc\cdot\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{48}\cdot\frac{2}{15}\pi abc = \frac{1}{360}\pi abc$$

$$L(x,y,z) = x^2-4xy+6x+5y^2-2yz-10y+2z^2-4z+\lambda\underbrace{(y-z+1)}_{g(x,y,z)}$$ 9b

multiplikátor

$$\operatorname{grad}\vec{L} \overset{!}{=} \vec{0} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x-4y+6 \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -4x+10y-2z-10+\lambda \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -2y+4z-4-\lambda \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\}$$

řešení: $\vec{a} = (-3,0,1)$ & $\lambda = 0$!

Postačující podmínka: Hessova matice: $L = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

ona je dokonce stejná $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow d^2L_{\vec{a}}(dx,dy,dz) = 2dx^2+10dy^2+4dz^2-8dx\,dy-4dy\,dz$$

Redukce užitím vazby:
$$dg(dx,dy,dz) = dy-dz = 0$$
$$dg_{\vec{a}}(dx,dy,dz) = dy-dz = 0$$
$$dz = dy$$

! není-li určen stac. bod správně, odtud dál se neopravuje !

$$\Rightarrow \frac{1}{2}d^2L^{(red)}_{\vec{a}}(dx,dy) = dx^2+5dy^2+2dy^2-4dx\,dy-2dy^2 =$$
$$= dx^2+5dy^2-4dx\,dy = (dx,dy)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \rhd 0 \Leftarrow \underbrace{1>0 \wedge \det(\mathbb{A}) = 5-4 = 1 > 0}_{\text{Sylvester}}$$

korektní (a explicitně zapsané rozhodnutí o typu definitnosti)

Závěr:

Bod $\vec{a} = (-3,0,1)$ je bodem ostrého lokálního vázaného minima

závěr

$z = z(x, y, u)$ 10b

Existenční podmínka: $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 6uz \neq 0$!

Nutná podmínka pro extrém:

$$\text{grad}\, z = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial u}\right) \overset{!}{=} \vec{0}$$

stačí, když je zřejmé, že student umí počítat derivace implicitní fce

$z, u > 0$

$$\left.\begin{aligned} 8x + 24y &= 0 \\ 24x + 4y + 68 &= 0 \\ 3z^2 &= 3u^2 \\ F(x, y, z, u) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = -3 \ \& \ y = +1 \ \& \ z = u$$

$$u^3 + 3u^3 - u^3 + 36 - 72 + 2 + 68 = 37$$

$$3u^3 = 3$$

$$u = 1$$

$\Rightarrow$ stacionární bod: $\vec{a} = (x_0, y_0, u_0) = (-3, 1, 1)$!

k němu příslušný generující bod: $\vec{\lambda} = (x_0, y_0, u_0, z_0) = (-3, 1, 1, 1)$!

Kontrola existenční podmínky:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\vec{\lambda}) = 3 + 6 = 9 \neq 0 \quad (\text{tedy OK})$$

Hessova matice generující funkce:

$$H_F = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 8 & 24 & 0 \\ 24 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6u \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 6z \end{matrix} & 3z^2 + 6uz \end{pmatrix}$$

řeťaz H matici implicitní fce

Hessova matice implicitní funkce ve stacionárním bodě:

$$H_z = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 24 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6u \end{pmatrix}_{\vec{a}} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 24 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Druhý totální diferenciál implicitní funkce $z = z(x, y, u)$ v bodě $\vec{a}$:

(upravený až na násobení ~~dvojkou~~ $2/9$)

$$\frac{2}{9} \cdot d^2 z_{\vec{a}}(dx, dy, du) = -4dx^2 - 2dy^2 - 24\,dx\,dy + 3\,du^2 =$$

$$= -2(dy + 6dx)^2 + 68dx^2 + 3u^2 \ \lessgtr 0$$

minus, plus, plus

(korektní rozhodnutí o typu definitnosti)

$\Rightarrow$ implicitní funkce $z = z(x, y, u)$ ve svém stacionárním bodě $\vec{a} = (-3, 1, 1)$ má sedlový bod, a tedy nemá extrém

závěr

$x = \rho \cos\vartheta \cos\varphi$
$y = \rho \cos\vartheta \sin\varphi$
$z = \rho \sin\vartheta$

$r^2 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \quad \& \quad z>0$

$r \leqq \rho \leqq R \quad \& \quad \vartheta > 0$

4b

$$J_V = \int_V (x^2+y^2)\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_r^R \rho^2\cos^2\vartheta \cdot \overbrace{\rho^2\cos\vartheta}^{\text{jacobián}}\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{věta o}\\ \text{separabilitě}\end{array}\right| = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta \cdot \int_r^R \rho^4\, d\rho =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = \sin\vartheta \\ du = \cos\vartheta\, d\vartheta\end{array}\right| = 2\pi \cdot \int_0^1 (1-u^2)\, du \cdot \frac{1}{5}(R^5-r^5) =$$

za nějaký smysluplný krok výpočtu

$$= \frac{2}{5}\pi(R^5-r^5)\cdot\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)\pi(R^5-r^5) =$$

$$= \frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$$

9b

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqq 2\frac{y^3}{b^3} \Rightarrow y \overset{!}{>} 0 \Rightarrow \varphi \in (0;\pi)$$

$$\rho^4 \leqq 2\rho^3 \sin^3\varphi$$

$$\rho \leqq 2\sin^3\varphi$$

$$x = a\rho\cos\varphi$$
$$y = b\rho\sin\varphi$$
$$J = ab\rho$$

(volba souřadnic)

$$S = \mu_2(A) = \int_A 1 \, d(x,y) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin^3\varphi} ab\rho \, d\rho \, d\varphi = \frac{1}{2}ab\int_0^{\pi} 4\sin^6(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^6(\varphi)\, d\varphi = \left| \begin{array}{ll} m=0 \quad n=6 & \Gamma(7/2) = \sqrt{\pi}\,\frac{5!!}{2^3} \\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi} & \Gamma(4) = 3! = 6 \end{array} \right\}$$

viz nápověda u tabulky jacobiánů

$$\frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(7/2)}{2\Gamma(4)} = \pi\,\frac{5\cdot 3}{2\cdot 6\cdot 8} = \frac{5\pi}{32} \,\Bigg\| = 4ab\cdot\frac{5\pi}{32} = \frac{5}{8}\pi ab$$

$$x_T = \frac{8}{5\pi ab}\int_A x\, d(x,y) = \frac{8}{5\pi \cancel{ab}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin^3\varphi} \cancel{ab}\rho\cdot a\rho\cdot\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{15\pi}a\int_0^{\pi}\cos\varphi\cdot 8\cdot\sin^9\varphi\, d\varphi = 0$$

$$y_T = \frac{8}{5\pi ab}\int_A y\, d(x,y) = \frac{8}{5\pi \cancel{ab}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin^3\varphi} \cancel{ab}\rho\, b\rho\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \frac{8b}{5\pi}\cdot\frac{1}{3}2^3\int_0^{\pi}\sin^{10}(\varphi)\, d\varphi = \frac{128b}{15\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{10}(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} m=0 \quad n=10 \\ \dfrac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(11/2)}{2\Gamma(6)} = \dfrac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{2\cdot 5!}\cdot\dfrac{9!!}{2^5} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{\cancel{128}b}{\cancel{15\pi}}\cancel{\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{2^6}}\,\frac{9\cdot\cancel{7\cdot 5\cdot 3}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot\cancel{2}} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot 7\, b}{5\cdot 4\cdot\cancel{3}} = \frac{21}{20}b$$

Pokud někdo došel až k tomuto přesnému číselnému výsledku, odměnou mu jsou 2 bonusové body (nad rámec hodnocení)

$$\left[\left(\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}\right]^2 \leq \frac{|x|}{a}-\frac{|y|}{b}$$

8b

$x = a\rho\cos\vartheta\cos^2\varphi$ → nelze užít pro úhly φ mimo interval $(0;\frac{\pi}{2})$ ⇒ nutno užít symetrii (viz ✱)

$y = b\rho\cos\vartheta\sin^2\varphi$ $\qquad J = 2abc\rho^2\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi$

$z = c\rho\sin\vartheta$ ✓

$$B = \{(\rho,\vartheta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{\rho^4 \leq \rho\cos\vartheta(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}_{\rho^3 \leq \cos\vartheta\cos(2\varphi)}\}$$ ✓

$\cos\vartheta\cdot\cos(2\varphi) \overset{!}{\geq} 0 \Rightarrow \cos\vartheta > 0$ (to je ale vždy) $\Rightarrow \cos(2\varphi) \overset{!}{\geq} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\varphi \in (-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi;\frac{5\pi}{4})}$ ✓

jsou-li některé meze chybně, dále je NEOPRAVUJI!

$$\lambda_3(B) = 4\int_{0 ✱}^{\pi/4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt[3]{\cos\vartheta\cdot\cos(2\varphi)}} 2abc\rho^2\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$ ✓✓

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\vartheta\cdot\sin(2\varphi)\cdot\cos\vartheta\cdot\cos(2\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi \cdot abc =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/4}\sin(2\varphi)\cos(2\varphi)\, d\varphi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(\vartheta)\, d\vartheta \cdot abc =$$

✓ za nějaký smysluplný krok ve výpočtu

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\right]_0^{\pi/4}\cdot abc\cdot 2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}\, d\vartheta = \frac{1}{3}\left[\vartheta+\frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]_0^{\pi/2} abc =$$

$$= \frac{\pi}{6}abc$$ ✓✓

$f(x,y,z) = x^2y^3z^4 \qquad M = \{(x,y,z) \in E^3 \quad 2x+3y+4z = 9 \wedge \quad x,y,z>0\}$

$L = x^2y^3z^4 + \lambda(2x+3y+4z)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xy^3z^4 + 2\lambda = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 3x^2y^2z^4 + 3\lambda = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 + 4\lambda = 0$

$\lambda = -xy^3z^4 \qquad \lambda = -x^2y^2z^4 \qquad \lambda = -x^2y^3z^3$

$x = y = z$

$\vec{a} = (1,1,1) \qquad \lambda = -1$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2y^3z^4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 6x^2yz^4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 12x^2y^3z^2$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 6xy^2z^4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 12x^2y^2z^3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 8xy^3z^3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 6 & 6 & 12 \\ 8 & 12 & 12 \end{pmatrix} =$$

$d^2L_{\vec{a}}(dx,dy,dz) = 2dx^2 + 6dy^2 + 12dz^2 + 12dxdy + 24dydz + 16dxdz$

$g(x,y,z) = 2x+3y+4z-9 = 0$

$dg(dx,dy,dz) = 2dx + 3dy + 4dz = 0$

$\Rightarrow \quad dx = -2dz - \frac{3}{2}dy$

$d^2L^{(red)}_{\vec{a}}(dy,dz) = 2\left(4dz^2 + 6dzdy + \frac{9}{4}dy^2\right) + 6dy^2 + 12dz^2 +$

$+ 12\left(-2dz - \frac{3}{2}dy\right)dy + 24dydz - 16\left(2dz + \frac{3}{2}dy\right)dz =$

$= 8dz^2 + 12dydz + \frac{9}{2}dy^2 + 6dy^2 + 12dz^2 - 24dydz - 18dy^2 +$
$+ 24dydz - 32dz^2 - 24dydz = -12dz^2 - \frac{15}{2}dy^2 - 12dydz =$
$= -12\left[dz + dzdy\right] - \frac{15}{2}dy^2 = -12\left[\left(dz + \frac{dy}{2}\right)^2 - \frac{dy^2}{4}\right] - \frac{15}{2}dy^2 =$
$= -12\left(dz + \frac{dy}{2}\right)^2 + 3dy^2 - \frac{15}{2}dy^2 = -12\left(dz + \frac{dy}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}dy^2 < 0$

$\Downarrow$

$\vec{a} = (1,1,1) \ldots$ vázané lokální maximum

$$\underbrace{4 + 2x + x^2 + 2y + 4xy + 5y^2 - 3z - 2xz - 6yz + 3z^2}_{H(x,y,z)} = 0$$

9+1

Existenční podmínka:

$$\Delta(x,y,z) \equiv \frac{\partial H}{\partial z} = -3 - 2x - 6y + 6z \overset{!}{\neq} 0$$

Hledání stacionárních bodů

$$\frac{\partial z}{\partial x} \overset{!}{=} 0 \wedge \frac{\partial z}{\partial y} \overset{!}{=} 0 \wedge \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\Delta} \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}}{\Delta} \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial x}; \frac{\partial H}{\partial y}\right) \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \underline{2 + 2x + 4y - 2z} \overset{!}{=} 0 \wedge \frac{\partial H}{\partial y} = \underline{2 + 4x + 10y - 6z} \overset{!}{=} 0$$

$$x = z - 2y - 1 \longrightarrow 1 + 2z - 4y - 2 + 5y - 3z = 0$$

$$x = -z - 3 \longleftarrow y = 1 + z$$

$$4 - 2z - 6 + z^2 + 6z + 9 + 2 + 2z - 16z - 12 - 4z^2 + 5 + 10z + 5z^2 - 3z$$
$$+ 2z^2 + 6z - 6z - 6z^2 + 3z^2 = 0$$

$$2 - 3z + z^2 = 0$$

$z = 2$ nebo $z = 1$ $\Rightarrow$ máme dva stacionární body:

$$\vec{a} = (-4, 2) \;\&\; z(\vec{a}) = 1 \quad \& \quad \vec{b} = (-5, 3) \;\&\; z(\vec{b}) = 2$$

Ověření existenční podmínky:
$$\left.\begin{aligned} \Delta(-4,2,1) &= -3 + 8 - 12 + 6 = -1 \neq 0 \\ \Delta(-5,3,2) &= -3 + 10 - 18 + 12 = 1 \neq 0 \end{aligned}\right\}$$

Postačující podmínka:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{a,b} = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}}{\Delta} = -\frac{2}{\Delta} \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{a,b} = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}}{\Delta} = -\frac{10}{\Delta} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}}{\Delta} = -\frac{4}{\Delta}$$

$$d^2 z_{\vec{a}}(dx, dy) = 2dx^2 + 10dy^2 + 8\,dx\,dy = 2\left[(dx + 2dy)^2 + dy^2\right] > 0$$

$$d^2 z_{\vec{b}}(dx, dy) = -2dx^2 - 10dy^2 - 8\,dx\,dy = -d^2 z_{\vec{a}}(dx, dy) < 0$$

Závěr:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= (-4, 2) \text{ je OLMin} \\ \vec{b} &= (-5, 3) \text{ je OLMax} \end{aligned}\right\}$$ zde ale musí být typ definitnosti ověřen korektně

$x = \rho \cos\vartheta \cos\varphi$
$y = \rho \cos\vartheta \sin\varphi$
$z = \rho \sin\vartheta$

$x^2+y^2+z^2 \leqq R^2$ & $x^2+y^2 \leqq z^2$ & $z \geqq 0$

$\rho \leqq R$

$\rho^2\cos^2\vartheta \leqq \rho^2\sin^2\vartheta$ $\quad \vartheta \geqq 0$

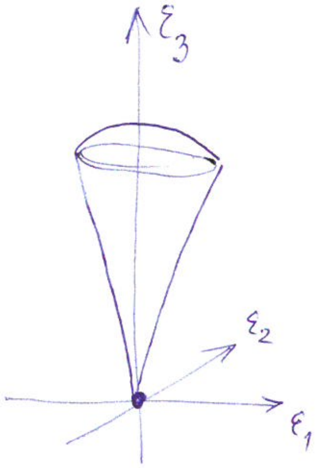
$\mathrm{tg}^2\vartheta \geqq 1$

$\mathrm{tg}\,\vartheta \geqq 1$

$\vartheta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$V_{SF} = \Big\{ (\rho,\varphi,\vartheta) \in \mathbb{R}^3 :\ \underbrace{0<\rho<R \ \wedge\ \varphi \in (0;2\pi) \ \wedge\ \vartheta \in \left(\tfrac{\pi}{4}; \tfrac{\pi}{2}\right)}_{\text{tohle musí být otevřená množina}} \Big\}$$

(to plyne z definice regularity zobrazení)



$$J = \int_V (x^2+y^2)\, d(x,y,z) = \left| \begin{matrix}\text{sférické} \\ \text{souřadnice}\end{matrix} \right| =$$

Jacobián

$$= \int_0^R \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(\rho^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi\right)\cdot \rho^2\cos\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho =$$

$$= \int_0^R \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho^4\cos^3\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho = \left| \begin{matrix}\text{věta o} \\ \text{separabilitě}\end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^R \rho^4\, d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\vartheta\cdot(1-\sin^2\vartheta)\, d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \left| \begin{matrix} u = \sin\vartheta \\ du = \cos\vartheta\, d\vartheta \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \int_{\sqrt{2}/2}^{1} (1-u^2)\, du = \frac{2}{5}\pi R^5 \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}\pi R^5 \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{1}{4}\right] = \frac{2}{5}\pi R^5 \frac{1}{12}(8-5\sqrt{2}) = \frac{1}{30}\pi R^5 (8-5\sqrt{2})$$

$+ \frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 8}$

$$(x^4+y^4)^{4/3} \le 2x^2y^2 \;\wedge\; x\ge 0 \;\wedge\; y \ge 0$$

$$x = \rho\sqrt{\cos\varphi} \qquad \rho^{16/3} \le 2\rho^4 \cos\varphi\sin\varphi$$
$$y = \rho\sqrt{\sin\varphi} \qquad \rho^{4/3} \le \sin 2\varphi$$

$$\sin 2\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in (0; \pi/2)$$

y!

$$\Delta_J = \frac{1}{2}\rho\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}$$

może

$$\mu_2(S) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{(\sin 2\varphi)^{3/4}} \frac{1}{2}\rho\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin 2\varphi)^{3/2}}{(\frac{1}{2}\sin 2\varphi)^{1/2}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$!!

$$A = \{(x,y,z)\in E^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4} \le 1\} \qquad \int_A |z|\,dx\,dy\,dz = ?$$

I.

$$\int_A |z|\,dx\,dy\,dz = \left| \begin{array}{l} u = \frac{x}{a} \\ v = \frac{y}{b} \\ w = \frac{z^2}{c^2} \end{array}\right. \qquad \det\left(\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2z}{c^2}\end{vmatrix} = \frac{2}{abc}\frac{z}{c}$$

$$dx\,dy\,dz = \frac{abc^2}{2|z|}\,du\,dv\,dw = \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}\frac{abc^2}{2}\,du\,dv\,dw =$$

za absolutne wartości!

$$= \frac{1}{2}abc^2\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{6}\pi abc^2 = \frac{2}{3}\pi abc^2$$

II.

$$x = a\rho\cos\vartheta\cos\varphi$$
$$y = b\rho\cos\vartheta\sin\varphi \qquad \Delta_J = \frac{1}{2}abc\,\rho^{3/2}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}$$
$$z = c\sqrt{\rho\sin\vartheta}$$

$$I = \int_A |z|\,dx\,dy\,dz = 2\iiint_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1 \\ z>0}} z\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 c\sqrt{\rho\sin\vartheta}\,\frac{1}{2}abc\rho^{3/2}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi$$

$$= abc^2\cdot 2\pi\,\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{2}{3}\pi abc^2$$