

Jméno a příjmení

1

2

3

4

5

6

**Zkoušková práce č. 1 z předmětu 01ANB3**

14. ledna 2026, 13:00 — 14:40

**1** (8 bodů)

Řešte Cauchyovu úlohu:

$$y'' - 5\frac{y'}{x} + 5\frac{y}{x^2} = \frac{16}{x}, \quad y(1) = 8, \quad y'(1) = -4.$$

**2** (4 body)Definujte vlastní metriku na  $\mathbf{R}^2$  tak, aby množina na zadní straně zadání byla okolím bodu  $(3, 0)$  o poloměru  $\varepsilon = 12$ . Pro tuto metriku dále rozhodněte, je-li posloupnost

$$\vec{x}_n = \left( \frac{1+n^4}{n^4}, \frac{6n^4+16}{3n^4} \right)$$

konvergentní.

**3** (8 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty x e^{-n^4 x^2} dx.$$

Užijte faktů, že  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ . Neopomeňte diskutovat oprávněnost všech operací.**4** (4 body)Určete obě signatury třídimenziální kvadriky  $Q(x, y, z) = 2x(y + z + 2) = 0$ .**5** (8 bodů)

Řešte rovnice

$$x^2 y'' + (2x^2 - 4x)y' + (6 - 4x)y = 6e^{-2x}x^4, \quad y''' = 0.$$

Užijte faktů, že operátory obou rovnic mají neprádný průnik svých jader.

**6** (8 bodů)

Rozhodněte, zda řada funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(3n)!!!}{(3n+1)!!!} \frac{x^2}{\sqrt{2x^6 + n^6}}$$

konverguje na  $\mathbf{R}$  stejnoměrně. Podrobně komentujte!

$$y'' - 5 \frac{y'}{x} + 5 \frac{y}{x^2} = \frac{16}{x} \quad y(1) = 8; \quad y'(1) = -4 \quad \text{8B}$$

$x_0 = 1 \Rightarrow$  řešíme pouze pro  $x > 0$ , tj.  $I = (0, +\infty)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^t \\ t = \ln x \end{array} \right\} \Rightarrow y' = \dot{y} \frac{1}{x} \quad \& \quad y'' = \dot{y} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \ddot{y} \frac{1}{x^2}$$

✓  
Eulerova  
jinta

$$\ddot{y} - \dot{y} - 5\dot{y} + 5y = 16e^{+t}$$

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 5y = 16e^{+t} \quad \checkmark$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

$$F_0 = \{e^{\lambda}; e^{5\lambda}\} \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} y_p(\lambda) = A\lambda e^{\lambda} \quad \checkmark \\ \dot{y}_p(\lambda) = A(1+\lambda)e^{\lambda} \\ \ddot{y}_p(\lambda) = A(1+1+\lambda)e^{\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A(2+\lambda-6-6\lambda+5\lambda) \stackrel{!}{=} 16 \\ -4A = 16 \\ A = -4 \end{array}$$

$$y(\lambda) = \alpha e^{\lambda} + \beta e^{5\lambda} - 4\lambda e^{\lambda} \quad \checkmark$$

$$\underline{y(x) = \alpha x + \beta x^5 - 4x \ln x} \quad \checkmark$$

$$y'(x) = \alpha + 5\beta x^4 - 4 \ln x - 4$$

$$y(1) = \alpha + \beta \stackrel{!}{=} 8$$

$$y'(1) = \alpha + 5\beta - 4 \stackrel{!}{=} -4$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) = (10; -2)$$

$$\underline{y(x) = 10x - 2x^5 - 4x \ln x; \quad I = (0, +\infty)} \quad \checkmark \checkmark$$

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \max \{ 4|x_1 - y_1|; 3|x_2 - y_2| \}$$

4b

$$\lim \vec{x}_n = (1, 2)$$

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}_n, \vec{a}) &= \max \left\{ 4 \left| \frac{1+n^4}{n^4} - 1 \right|; 3 \left| \frac{6n^4+16}{3n^4} - 2 \right| \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{4}{n^4}; \frac{16}{n^4} \right\} = \frac{16}{n^4} = \underbrace{\left( \frac{2}{n} \right)^4}_{\substack{\uparrow \\ \text{toto lze jistě stlačit pod} \\ \text{libovolně malé kladné } \varepsilon}} < \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$  je konvergentní

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^4 x^2} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

9

- ✓ - snahou je zaměnit integraci a součet
- ✓ - proto je nutné prokázat stejnoměrnou konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^4 x^2}$  na  $(0, +\infty)$

$$(x e^{-n^4 x^2})' = e^{-n^4 x^2} - 2x^2 n^4 e^{-n^4 x^2} = 0$$

$$2x^2 n^4 = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^2}$$

$$f_n(0) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$f_n(x) \dots$  spojitá

$$G_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^2} e^{-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : |x e^{-n^4 x^2}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^2} e^{-1/2}$$

- číselná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^2} e^{-1/2}$  konverguje  $\Rightarrow$  podle Weierstrassova kritéria řada  $\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^4 x^2}$  konverguje stejnoměrně na  $(0, +\infty)$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^4 x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-n^4 x^2} dx = \left| \begin{array}{l} s = n^4 x^2 \\ ds = 2n^4 x dx \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2n^4} e^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^4} [-e^{-s}]_0^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^4} = \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{180}$$

$$Q(x, y, z) = 2x(y+z+2) = \left\| \begin{array}{l} x=a \\ y+z=b \\ z=c \end{array} \right\| = 2a(b+2) =$$

4b  
✓ ← za sensu składowej i prawej

$$= 2ab + 4a = \left\| \begin{array}{l} a = \mu + \lambda \\ b = \mu - \lambda \\ c = x \end{array} \right\| = 2\mu^2 - 2\lambda^2 + 4\mu + 4\lambda =$$

$$= 2(\mu+1)^2 - 2 - 2(\lambda-1)^2 + 2 = 2(\mu+1)^2 - 2(\lambda-1)^2 =$$

$$= A^2 - B^2$$

✓

$$sg(Q) = (1, 1, 1) \checkmark$$

$$SG(Q) = (1, 1, 2) \checkmark$$

Numerické chyby netolerujeme!

$$y''' = 0 \quad \text{ker}(L) = [1, x, x^2]_{\mathbb{R}} \checkmark \text{ (anebo posledni rovnice dole) } \quad 8b$$

$$x^2 \in \Omega_0 \text{ (první rovnice)} \cap \Omega_0 \text{ (druhá rovnice)}$$

$$\text{snížíme řád: } y(x) = x^2 \cdot r(x) \checkmark \quad \& \quad y' = 2xr + x^2 r' \quad \& \quad y'' = 2r + 4xr' + x^2 r'' \checkmark$$

dosažem:

$$2rx^2 + 4x^3 r' + x^4 r'' + (2x^2 - 4x)(2xr + x^2 r') + (6 - 4x)x^2 r = 6x^4 e^{-2x}$$

$$x^4 r'' + r'(4x^3 + 2x^4 - 4x^3) + r(2x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 6x^2 - 4x^3) = 6x^4 e^{-2x}$$

$$x^4 r'' + 2x^4 r' = 6x^4 e^{-2x} \checkmark$$

$$r'' + 2r' = 6e^{-2x} \quad | \cdot e^{2x} \equiv \text{I.F.}$$

$$(r' \cdot e^{2x})' = (6x + c)' \quad \rightarrow \text{existuje i elegantnější a kratší řešení!}$$

$$r' = c e^{-2x} + 6x e^{-2x} \checkmark$$

$$r(x) = -\frac{1}{2} c e^{-2x} + \beta + \int 6x e^{-2x} dx = \left\| \begin{array}{l} w = 6x \quad v' = e^{-2x} \\ w' = 6 \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2} c e^{-2x} + \beta - 3x e^{-2x} + 3 \int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} c e^{-2x} + \beta - 3x e^{-2x} - \frac{3}{2} e^{-2x} \checkmark$$

$$\text{Konzolidace výsledku: } y(x) = A x^2 e^{-2x} + B x^2 - 3x^3 e^{-2x}$$

$$\text{Dom}(y) = \mathbb{R} \checkmark$$

$$\text{Druhá rovnice: } y(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

$$\text{Dom}(y) = \mathbb{R} \checkmark$$

(anebo první rovnice nahore)

$$g_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^6 + n^6}} \quad g_n(0) = 0 \quad g_n(x) \in C(\mathbb{R}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$$

8b

$$g_n(x) \geq 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

$$g_n'(x) = \frac{1}{2x^6 + n^6} \left( 2x \sqrt{2x^6 + n^6} - x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12x^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^6 + n^6}} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{2x(2x^6 + n^6) - 6x^7}{(2x^6 + n^6)^{3/2}} = 0$$

$$2x(2x^6 + n^6 - 3x^6) = 0$$

$$x(n^6 - x^6) = 0$$

3 stacionárny body:  $x=0$  &  $x=n$  &  $x=-n$

ľahko: maximum nastáva v bodoch  $x = \pm n$

$$\text{hodnota maxima: } g_n(n) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n}$$

korektné stanovenie  
extremu  
(viď ♥)



Weierstrass:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \left| \frac{(3n)!!!}{(3n+1)!!!} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{2x^6 + n^6}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3} \cdot n} \cdot \frac{(3n)!!!}{(3n+1)!!!}$$

korektný zápis  
bez sum

Majoorantní číselná rada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}(n+1)} \cdot \frac{(3n+3)!!!}{(3n+4)!!!} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot n}{1} \cdot \frac{(3n+1)!!!}{(3n)!!!} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3n+3}{3n+4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{3n^2 + 7n + 4 - 3n^2 - 3n}{3n^2 + 7n + 4} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{4n + 4}{3n^2 + 7n + 4} = \frac{4}{3} > 1$$

o) tato rada tedy konverguje podle Raabeho

Záver:

kychozi funkční rada konverguje na  $\mathbb{R}$  stejnoměrně.

musí být řečeno, z jakého  
kritéria ten výsledek  
vyplyvá (Δ)

| Jméno a příjmení | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|
|                  |   |   |   |   |   |   |

**Zkoušková práce č. 2 z předmětu 01ANB3**

14. ledna 2026, 13:00 — 14:40

**1** (8 bodů)

V Hilbertově prostoru jistých funkcí definovaných na  $(0, +\infty)$  je zadán skalární součin prostřednictvím vztahu

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

Rozhodněte, zda posloupnost  $(\frac{1}{n!}x^n e^{-x})_{n=1}^{\infty}$  je v tomto prostoru konvergentní.

**2** (9 bodů)

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{x^2}{\sqrt{2x^6 + n^6}}$$

na množině  $\mathbf{R}$ .

**3** (4 body)

Nechť je v Hilbertově prostoru  $\mathbf{R}^2$  zadán skalární součin předpisem

$$\vec{x}^T \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Jaký úhel (ve stupních) svírají vektory  $\vec{u} = (3, 4)$  a  $\vec{v} = (0, -1)$ ?

**4** (5 bodů)

Řešte diferenciální rovnici

$$y''' + 8y = 8.$$

**5** (7 bodů)

Rozhodněte, zda řada v níže uvedeném vztahu konverguje na  $(0, +\infty)$  stejnoměrně a poté vypočítejte

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!} dx.$$

**6** (7 bodů)

Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 x^2}{(y^2 + x^2)^{3/2}} + 2x + 3y + 1 & \dots (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \dots (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

vypočítejte směrovou derivaci ve směru  $\vec{s} = (1, 1)$  v bodě  $(0, 0)$  a hodnotu

$$\frac{\langle \vec{s} | \text{grad } g(0, 0) \rangle}{\|\vec{s}\|}$$

a diskutujte vztah mezi oběma výsledky. Jaký fakt z něho vyplývá?

Víme, že  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \stackrel{R}{=} e^x$ . Z nutné podmínky tudíž nutně plyne, že  $\frac{x^n}{n!} \stackrel{R}{\rightarrow} 0$ .  
 To je ovšem bodová konvergence. My máme vyšetřovat konvergenci podle normy.  
 Tedy pouze pojímáme podezření, že

$$\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$$

a odtud také, že  $\frac{x^n}{n!} e^{-x} \rightarrow 0$

Nyní je to třeba dokázat!

$$\frac{x^n}{n!} e^{-x} \rightarrow 0 \stackrel{\text{DEF.}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0) (\exists m_0 \in \mathbb{N}) : n > m_0 \Rightarrow \rho\left(\frac{x^n}{n!} e^{-x}, 0\right) < \varepsilon$$

$$\| \frac{x^n}{n!} e^{-x} - 0 \| < \varepsilon$$

$$\| \frac{x^n}{n!} e^{-x} - 0 \|^2 = \int_0^{+\infty} \left( \frac{x^n}{n!} e^{-x} \right)^2 \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} e^{-3x} dx =$$

$$= \left\| \int_0^{\infty} x^m e^{-ax} dx = \frac{m!}{a^{m+1}} \right\| = \frac{1}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{3^{2n+1}}$$

otázkou je, zda toto lze stlačit pod libovolně malé  $\varepsilon > 0$

Stačilo by prokázat, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{3^{2n+1}} = 0$  tyto dvě věci jsou totéž

Užijeme nutnou podmínku konvergence řady  $\sum_n \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{3^{2n+1}}$

Podílové kritérium:

$$\frac{1}{(n+1)!^2} \cdot \frac{(2n+2)!}{3^{2n+3}} \cdot \frac{n!^2}{1} \cdot \frac{3^{2n+1}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{(2n+1)}{9} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{9} < 1$$

Řada konverguje

... a je to !\*

9f

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{x^2}{\sqrt{n^6+2x^6}}$$

$f_n(x)$

$$h_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{n^6+2x^6}}$$

... hledáme extrém funkce  $f_n(x)$  tedy vlastně extrém funkce  $h_n(x)$

$$h_n'(x) = \frac{2x\sqrt{n^6+2x^6} - x^2 \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 6x^5}{\sqrt{n^6+2x^6}}}{n^6+2x^6} = 0$$

$$2x(n^6+2x^6) - \frac{1}{2} 12x^7 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0)$$

$$n^6+2x^6 - 3x^6 = 0$$

$$x = \pm n$$

zde má funkce  $h_n(x)$  minimum

Oba body  $x = \pm n$  jsou body lokálního (globálního) maxima, neboť  $h_n(x)$  je spojitá na  $\mathbb{R}$  a navíc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{n^6+2x^6}} = 0$

$$h_n(n) = \frac{n^2}{\sqrt{n^6+2n^6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{n}$$

zderivování (či graf)

Weierstrassovo kritérium:

rozumná slovní formulace

$$\left| \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{x^2}{\sqrt{n^6+2x^6}} \right| \leq \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{1}{\sqrt{3}n} \leq \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{1}{n}$$

zbylá rozhodnout, zda číselná řada  $\sum_n \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{1}{n}$  konverguje. Vezijeme Raabovu kritériu.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{(3n+3)!!!}{(3n+5)!!!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(3n+2)!!!}{(3n)!!!} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{n(3n+3)}{(3n+5)(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{3n^2+8n+5 - 3n^2-3n}{3n^2+8n+5} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+5n}{3n^2+8n+5} = \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow \text{konverguje}$$

$\Rightarrow$  řada  $\sum_n f_n(x)$  konverguje na  $\mathbb{R}$  stejnoměrně

zdrěr (byl-li řádne odvozen)

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = (3, 4) \text{ \& } \vec{v} = (0, -1)$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 4u_1^2 + 3u_2^2 - 6u_1u_2 = 36 + 48 - 72 = 12 \quad \checkmark$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{12}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 4v_1^2 + 3v_2^2 - 6v_1v_2 = 3$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$$

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = (3, 4) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (3, 4) \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = +9 - 12 = -3 \quad \checkmark$$

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ (ke delurvat i upplödd - 60^\circ)}$$

$\checkmark!$

$$y''' + 8y = 8$$

$$\lambda^3 + 8 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda = -2 \text{ null}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 16}) =$$

$$= 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$y(x) = \alpha e^{-2x} + \beta e^x \cos(\sqrt{3}x) + \gamma e^x \sin(\sqrt{3}x) + 1$$

$$\text{Dom}(y) = \mathbb{R}$$

2 (bodů)  
Vypočítejte

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!} dx.$$

78

Řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!}$  na  $\langle 0; +\infty \rangle$  nekoneguje, neboť není splněna nutná podmínka. Platí totiž  $\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_0^+} |(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!}| = +\infty$ , a dle toho  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \neq 0$ .  
Proto  $f_n(x) \not\rightarrow 0$ . Proto má úloha pouze následující možný způsob řešení:

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^n \cdot n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} = x e^{-x^2/4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!} dx &= \int_0^{\infty} \rho(x) dx = \int_0^{\infty} x e^{-x^2/4} dx = \left| u = x^2/4 \right. \\ &= \int_0^{\infty} 2 e^{-u} du = 2 [-e^{-u}]_0^{\infty} = 2 \end{aligned}$$

7 bodů

6 ( bodů) Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + 2x + 3y + 1 & \dots (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \dots (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

vypočítejte směrovou derivaci ve směru  $\vec{s} = (1, 1)$  v bodě  $(0, 0)$  a hodnotu

$$\frac{\langle \vec{s} | \text{grad } g(0, 0) \rangle}{\|\vec{s}\|}$$

a diskutujte vztah mezi oběma výsledky. Jaký fakt z něho vyplývá?

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} + \tau \cdot \vec{s} = \vec{0} + \tau(1, 1) = (\tau, \tau)$$

$$g(\tau, \tau) = \frac{\tau^4}{2\sqrt{2}\tau^3} + 2\tau + 3\tau + 1 = 5\tau + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\tau$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(\tau, \tau) - g(0, 0)}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{5\tau + 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\tau}{\tau} = \frac{5 + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}} \checkmark \checkmark$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(\tau, 0) - g(0, 0)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2\tau + 1 - 1}{\tau} = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(0, \tau) - g(0, 0)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{3\tau + 1 - 1}{\tau} = 3$$

$$\text{grad } g(0, 0) = (2, 3)$$

$$\frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle \vec{s} | \text{grad } g(0, 0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (1, 1) | (2, 3) \rangle = \frac{5}{\sqrt{2}} \checkmark$$

$\frac{5}{\sqrt{2}} \neq \frac{5 + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$  v bodě  $(0, 0)$  nemůže mít zadaná funkce zcela jistě totální diferenciál!  
(podle zste'vety)  $\checkmark \checkmark$

Jméno a příjmení

1

2

3

4

5

6

**Zkoušková práce č. 3 z předmětu 01ANB3**

27. ledna 2026, 13:00 — 14:40

**1** (8 bodů)

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{(2n)!!} x^n (1-2x)^n$$

na množině  $M = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ . Důkladně vysvětlete.**2** (7 bodů)

Pro trojrozměrnou kvadratickou plochu

$$-3 + x^2 + 2y - 4xy + 5y^2 + 4z + 2xz + 2yz + 10z^2 = 0$$

určete název, hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a střed.

**3** (8 bodů)

Nechť je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2(x-3)^2}{\sqrt{y^2+(x-3)^2}} - x + 3y + 7 & \dots (x, y) \neq (3, 0), \\ 4 & \dots (x, y) = (3, 0). \end{cases}$$

Nalezněte všechny přímky, vzhledem k nimž je tato funkce spojitá v bodě  $(3, 0)$ . Dále vypočítejte  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3, 0)$  pro  $\vec{s} = (2, 1)$ .**4** (8 bodů)

Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 6x^2 e^{2x}.$$

Užijte fakt, že vektorový prostor

$$V = \{y(x) \in C^3(\mathbf{R}) : xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 0 \wedge y''' - 4y'' + 4y' = 0\}$$

má dimenzi jedna.

**5** (4 body)Pro funkce  $f(x)$ ,  $g(x)$  z Hilbertova prostoru platí vztahy:

$$\langle f|g \rangle = 3 - 3i, \quad \|f\| = 2\sqrt{2}, \quad \langle g|g \rangle = 3.$$

Leží funkce  $g(x)$  v okolí funkce  $f(x)$  o poloměru  $\varepsilon = \sqrt{5}$ ? A jaký svírají úhel?**6** (5 bodů)Najděte partikulární řešení rovnice  $y''' - 4y'' + 4y' = 48e^{2x}$ .

$$\sum_n \frac{(3n)^n}{(2n)!!} x^n (1-2x)^n$$

$$M = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$$

8

$$g_n(x) = x^n (1-2x)^n$$

$$g_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=\frac{1}{2})$$

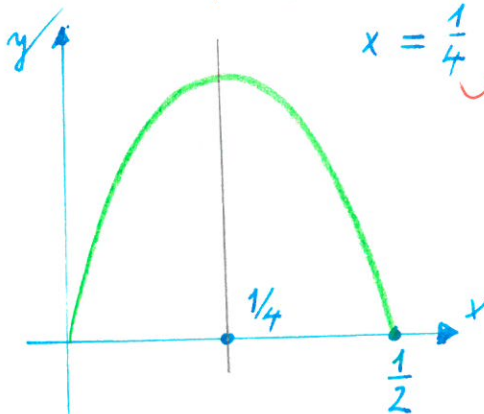
$$g_n(x) \in C(M)$$

$$g_n'(x) = nx^{n-1}(1-2x)^n - x \cdot n \cdot (1-2x)^{n-1} \cdot 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$1-2x-2x=0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \max_{x \in M} |g_n(x)| &= g_n\left(\frac{1}{4}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{8}\right)^n \end{aligned}$$



$$\left| \frac{(3n)^n}{(2n)!!} x^n (1-2x)^n \right| \leq \frac{(3n)^n}{(2n)!!} \left(\frac{1}{8}\right)^n \quad \checkmark \text{ korektný zápis! (bez sum)} \quad \checkmark$$

Rozhodneme, konverguje-li řada  $\sum_n \frac{(3n)^n}{(2n)!!} \left(\frac{1}{8}\right)^n$

Stačí podílové kriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!!} \cdot \frac{8^n}{8^{n+1}} \cdot \frac{(2n)!!}{3^n \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{8} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2) \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{16} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{3}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{3 \cdot e}{16} < \frac{3 \cdot 4}{16} < 1 \quad \checkmark$$

Podle Weierstrassova kriteria zadaná řada SK na M

$\checkmark$  musí být uveden druh kriteria

In[5]:= Expand[(x-2y+z)^2 + (y+3z+1)^2 - 2(z+2)]

Out[5]= -3 + x^2 + 2y - 4xy + 5y^2 + 4z + 2xz + 2yz + 10z^2

In[4]:= Solve[{a = x-2y+z, b = y+3z+1, c = z+2}, {x, y, z}]

Out[4]= {{x -> 12 + a + 2b - 7c, y -> 5 + b - 3c, z -> -2 + c}}

$$q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xz + 2yz + 10z^2 = (x-2y+z)^2 + 6yz + y^2 + 9z^2 =$$

$$= (x-2y+z)^2 + (y+3z)^2 = \underline{\underline{f^2 + y^2 + 0z^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} f = x-2y+z \\ y = y+3z \\ \lambda = z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = f + 2y - 6\lambda - \lambda = f + 2y - 7\lambda \\ y = y - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}$$

$$Q(x, y, z) = f^2 + y^2 - 3 + 2(y-3\lambda) + 4\lambda = f^2 + y^2 + 2y - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\underline{\underline{f^2 + (y+1)^2 - 2(\lambda+2) = 0}}$$

$$\underline{\underline{a^2 + b^2 - 2c = 0}}$$

ellipticly' paraboloid

$$SG(Q) = (3, 1, 0)$$

$$sg(Q) = (2, 0, 1)$$

nama' stored

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \quad \text{nama' desani'}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = f \\ b = y+1 \\ c = \lambda+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f = a \\ y = b-1 \\ \lambda = c-2 \end{array}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

+ define negative' semidefinite

$$P_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \alpha(x-3)\} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

86

$$(3, 0) \in P_\alpha$$

Hledáme taková  $\alpha \in \mathbb{R}$ , aby  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,0) \\ (x,y) \in P_\alpha}} f(x,y) \stackrel{!}{=} 4$

symbole ✓

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,0) \\ (x,y) \in P_\alpha}} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\alpha^2(x-3)^4}{\sqrt{2^2(x-3)^2 + (x-3)^2}} - x + 3\alpha(x-3) + 7 = \\ &= 4 + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\alpha^2|x-3|^4}{|x-3| \cdot |\alpha|} = 4 + 0 = 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  funkce je spojita' vzhledem ke všem přímkám  $P_\alpha$ ,

dokonce i k přímce  $x=3$

BOD  
NAVÍC

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{d}}(3,0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + \tau \vec{d}) - f(\vec{a})}{\tau} = \left| \begin{array}{l} \vec{a} = (3,0) \quad \vec{d} = (2,1) \\ \vec{a} + \tau \vec{d} = (3+2\tau, \tau) \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{2\tau^2 \cdot 4\tau^2}{\sqrt{\tau^2 + 4\tau^2}} - 3 - 2\tau + 3\tau + 7 - 4}{\tau} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{8\tau^3}{\sqrt{5}\tau^2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Vzoreček  $\frac{\partial f}{\partial \vec{d}}(3,0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle \text{grad } f(\vec{a}) | \vec{d} \rangle$  užít  
nelze, neboť není vůbec jasné, zda má  $f(x,y)$   
v bodě  $\vec{a}$  totální diferenciál!

(ledaže by někdo existenci TD potvrdil)

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda-2)^2$$

8

$$F_S = \{1, e^{2x}, x e^{2x}\}$$

$\Omega_0 \dots$  jadro prvej rovnice

- zjavné  $1 \notin \Omega_0$

- ale  $e^{2x} \in \Omega_0$

Proto volíme substitúciu:  $y(x) = e^{2x} w(x)$  ✓

$$y' = 2e^{2x}w + e^{2x}w'$$

$$y'' = 4e^{2x}w + 4e^{2x}w' + e^{2x}w''$$
 ✓

Posažem:

$$4xw + 4xw' + xw'' - (4x+1)(2w+w') + (4x+2)w = 6x^2$$

$$xw'' + w'(4x - 4x - 1) + w(4x - 8x - 2 + 4x + 2) = 6x^2$$

$$xw'' - w' = 6x^2$$
 ✓

$$w'' - \frac{1}{x}w' = 6x \quad \Bigg| \quad \frac{1}{x} \equiv \text{I.F.} \quad \left( \begin{array}{l} \text{je-li toto špatné,} \\ \text{ďal se neopravuje} \end{array} \right)$$
 ✓

$$(w' \cdot \frac{1}{x})' = (6x + C)'$$

$$w' = 6x^2 + Cx$$

$$w = 2x^3 + Dx^2 + E$$

•)  $y(x) = e^{2x} \cdot w(x) = Ee^{2x} + Dx^2e^{2x} + 2x^3e^{2x}$ ;  $x \in \mathbb{R}$  ✓✓

$$g \in U_5(f) \Leftrightarrow \rho(f, g) < \sqrt{5} \Leftrightarrow \rho^2(f, g) < 5$$

4

$$\begin{aligned} \rho^2(f, g) &= \|f - g\|^2 = \langle f - g | f - g \rangle \checkmark = \\ &= \langle f | f \rangle - \langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle + \langle g | g \rangle = \\ &= \|f\|^2 - \langle f | g \rangle - \langle f | g \rangle^* + \|g\|^2 = \\ &= 8 - 3 + 3i - 3 - 3i + 3 = 5 \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  těsně neleží

$\checkmark$

úhel:

$$\cos \alpha = \frac{|\langle f | g \rangle|}{\|f\| \cdot \|g\|} = \frac{\sqrt{9 + 9}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 30^\circ}} \checkmark$$

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda-2)^2$$

5 bodů

$$y''' - 4y'' + 4y' = 48e^{2x}$$

$\lambda = 2$  je dvojnásobný kořen

$$\Rightarrow y_p(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{2x}$$

a hledáme  $a \in \mathbb{R}$

$$4 \cdot / \quad y' = a(2x + 2x^2)e^{2x}$$

$$-4 \cdot / \quad y'' = a(2 + 4x + 4x + 4x^2)e^{2x} = a(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}$$

$$1 \cdot / \quad y''' = a(8 + 8x + 4 + 16x + 8x^2)e^{2x}$$

$$x^0: (12 - 8) \cdot a = 48 \quad \Rightarrow \quad a = 12$$

$$x^1: (24 - 32 + 8)a = 0 \quad \checkmark$$

$$x^2: (8 - 16 + 8)a = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow y_p(x) = 12x^2e^{2x}$$

✓✓✓ protože  
správný výsledek