

Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Teoretický test č. 1 z předmětu 01ANB3

14/1/2026, 9:00 — 10:20

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

- 1 Jaké signatury a jaký normální tvar má hyperbolický paraboloid?
- 2 Z čeho je odvozeno tvrzení, že gradient míří ve směru největšího růstu funkce? A proč je k tomuto zdůvodnění nutné, aby funkce měla totální diferenciál?
- 3 Najděte všechny izolované body množiny

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + 4|y| \leq 12\}.$$

Uvažujte metriku $\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = 3|a_1 - b_1| + \lceil |a_2 - b_2| \rceil$, kde $\lceil z \rceil$ je horní celá část čísla z .

- 4 Vyslovte a dokažte větu o řešení exaktní diferenciální rovnice. Neopomeňte napsat, co je exaktní diferenciální rovnice.
- 5 Vyslovte a dokažte větu o záměně sumy a integrálu pro řady funkcí. Pomocnou větu nedokazujte. Pouze ji užitě.
- 6 Dokažte, že má-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ na nějakém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ gradient, který je na tomto okolí spojitý, pak má jistě v bodě \vec{a} totální diferenciál.
- 7 Jaká vlastnost je popsána v následující definici

$$(\exists \varepsilon > 0) : \varrho(\vec{x}, \vec{a}) < \varepsilon \implies \vec{x} \in B?$$

- 8 Jakým způsobem lze na množině $C(\langle a, b \rangle)$ definovat normu? Diskutujte dále, zda vaše zobrazení splňuje axiomy normy také na prostoru všech funkcí definovaných na $\langle a, b \rangle$.
- 9 Napište vzorec pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory v libovolném prehilbertovském prostoru a rozeberte, zda je dobře definován. To jest: zamyslete se nad tím, že argument inverzní goniometrické funkce nemůže být libovolný.

Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Teoretický test č. 2 z předmětu 01ANB3

19/1/2026, 9:00 — 10:20

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

- 1 Jakou vlastnost vyjadřuje následující výrok?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0, x \in \langle 2, 5 \rangle \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m g_k(x) - x^3 e^{-5x^2} \right| < \frac{\varepsilon}{49}.$$

- 2 Vyslovte definici kvadratické funkce a ukažte, že její součástí je vždy kvadratická forma.
- 3 Nechť $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ je fundamentální systém rovnice $\hat{L}(y(x)) = 0$. Dokažte, že každá Cauchyova úloha má řešení. V důkazu vyznačte místo, kde by přestal platit, kdyby $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ byla libovolná sada n nenulových řešení rovnice $\hat{L}(y(x)) = 0$.
- 4 Dokažte, že existuje-li v bodě \vec{a} totální diferenciál funkce $f(\vec{x})$, pak je funkce v tomto bodě spojitá. Vyslovte také obě potřebné definice.
- 5 Vyslovte definici kompaktní množiny a poté **podle ní** rozhodněte, je-li množina $A = \langle -1, 3 \rangle \times \langle 1, 7 \rangle$ kompaktní v metrickém prostoru \mathbf{R}^2 s euklidovskou metrikou. Velice pečlivě odůvodněte.
- 6 Vyslovte a dokažte větu o superpozici.
- 7 Kde se v důkaze věty o tvaru Taylorových koeficientů (pro funkci jedné proměnné) uplatní základní věta o stejnoměrné konvergenci mocninných řad? Pečlivě vysvětlete.
- 8 Následující výrok přepište do jednoduchého (a minimalistického) tvaru.

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{g(1 + 4c, 3 - 4c, 2c) - g(1, 3, 0)}{c} = -3.$$

- 9 Co je součtovou funkcí funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$? A co je jejím definičním oborem?

Jméno a příjmení studenta

1

2

3

4

5

6

7

8

9

Teoretický test č. 3 z předmětu 01ANB3

27/1/2026, 9:00 — 10:20

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

- 1 Jaká vlastnost je popsána v následující definici

$$(\exists \varepsilon > 0) : \varrho(\vec{x}, \vec{a}) < \varepsilon \implies (\vec{x} = \vec{a} \in B \vee \vec{x} \notin B) ?$$

- 2 Co se rozumí pod pojmem fundamentální systém lineární diferenciální rovnice?

- 3 Pro funkce $f(x)$, $g(x)$ z Hilbertova prostoru platí vztahy:

$$\langle f|g \rangle = 3 - 3i, \quad \|f\| = 2\sqrt{2}, \quad \langle g|g \rangle = 3.$$

Jaký svírají úhel?

- 4 Rozhodněte, která z implikací je pravdivá

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \stackrel{A}{\equiv} g(x) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| = 0$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \stackrel{A}{\equiv} g(x) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |g_n(x)| = 0$$

a poté podrobně zdůvodněte, z čeho její platnost vyplývá.

- 5 Vyslovte a dokažte základní větu teorie mocninných řad (o stejnoměrné konvergenci).

- 6 V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ s metrikou

$$\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = |a_2 - b_2| + \lceil |a_1 - b_1| \rceil$$

vykreslete tvar okolí libovolného bodu o poloměru $\varepsilon < 1$. A poté rozhodněte, který z bodů množiny

$$B = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \frac{(x_1 - 4)^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} \leq 1 \right\}$$

je bodem izolovaným. Vyslovte definici izolovaného bodu!

- 7 Vyslovte a dokažte větu o záměně limity a určitého integrálu pro posloupnosti funkcí.

- 8 Zapište normální tvary alespoň čtyř singulárních kvadrik ve 3D. A pojmenujte je.

- 9 Vyslovte a dokažte větu o koeficientech Taylorovy řady funkce více proměnných. Důkaz prezentujte na funkci dvou proměnných.

Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Teoretický test č. 4 z předmětu 01ANB3

5/2/2026, 9:00 — 10:20

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

1 Vyslovte a dokažte větu o vzorci pro výpočet směrové derivace.

2 Zapište tvar diferenciálního operátoru, jehož jádrem je množina

$$[1, x, x^2, x^2 e^{-x}]_{\lambda}$$

3 Za jakých podmínek lze ve výrazu

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)'$$

zaměnit pořadí operací? A na jaké množině se tak může stát?

4 Pro která $a, b \in \mathbf{R}$ zadává vztah

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b & -2 & -2 \\ a & b & -2 \\ -2 & -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

skalární součin v \mathbf{R}^3 ?

5 Vyslovte definici regulárního zobrazení.

6 Vyslovte a dokažte větu o vztahu cauchyovské a konvergentní posloupnosti.

7 Vysvětlete, proč nemůže platit výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(\forall m, n \in \mathbf{N} | m > n > n_0) : \left| \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{x^m}{m!} \right| < \varepsilon.$$

8 Zapište rovnici eliptického paraboloidu (jako kvadriky ve 3d) a stanovte obě jeho signatury.

9 Vyslovte a dokažte větu o podprostoru $[e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots]_{\lambda}$.

Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Teoretický test č. 5 z předmětu 01ANB3

9/2/2026, 9:00 — 10:20

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

1 Vyslovte a dokažte větu o spojitosti skalárního součinu.

2 Nechť jsou dány vektorové prostory

$$A = C(\langle a, b \rangle), \quad B = \{g(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} : (\exists K > 0)(\forall x \in \langle a, b \rangle : |g(x)| < K)\}.$$

Vysvětlete, proč předpis $\int_a^b f(x)g(x) dx$ zadává skalární součin na prostoru A , ale na prostoru B ne.

3 Proveďte klasifikaci nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. U každého typu rovnice uveďte alespoň jeden příklad takové rovnice.

4 Vyslovte a dokažte větu o vzorci pro výpočet směrové derivace. V důkaze zvýrazněte místo, kde se zužitkuje hlavní předpoklad věty.

5 Konverguje Maclaurinova řada funkce $h(x) = e^x$ na \mathbf{R} stejnoměrně nebo ne? Své tvrzení prokažte výpočtem.

6 Vyslovte a dokažte srovnávací kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řad.

7 Nechť je dán dvoudimenzionální metrický prostor \mathbf{R}^2 s metrikou $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Najděte vnitřek, hranici a uzávěr množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1 \wedge 8x + y = 8\}.$$

8 Zapište rovnice jednodílného a dvojdílného hyperboloidu a stanovte obě jejich signatury.

9 Nalezněte jádro operátoru

$$\hat{L} = \frac{1}{4} \frac{d^4}{dx^4} - 4.$$

Jméno a příjmení studenta

1

2

3

4

5

6

7

8

9

Teoretický test č. 6 z předmětu 01ANB3

6/3/2026, 14:00 — 15:20

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

1 Množina

$$Q = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{|x-2|}{4} + \frac{|y+3|}{5} \leq 1 \right\}$$

má v metrickém prostoru \mathbf{R}^2 s metrikou $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + \lceil |x_2 - y_2| \rceil$ body, které jsou zároveň hraniční i izolované. Které to jsou?

2 Vyslovte matematicky korektní znění supremálního kritéria.

3 Zapište alespoň dvě kvadriky (jednu singulární a jednu regulární), jejichž vedlejší signatura je $(2, 0, 1)$. Zapište jejich normální tvar a název.

4 Podrobně zdůvodněte, proč se říká, že druhý totální diferenciál je kvadratickou formou. A vysvětlete, že i když existuje kompletní Hessova matice, tak zmíněné tvrzení nemusí nutně platit.

5 Vyslovte a dokažte větu o superpozici.

6 Vysvětlete (na vlastním příkladě), jak lze definovat skalární součin v případě, že pracujeme na vektorovém prostoru, jehož prvky jsou funkce. Neopomeňte specifikovat, jaké funkce v onom prostoru uvažujete a proč se omezujete jen na tyto.

7 Sestavte diferenciální rovnici, pro kterou

$$\Omega_q = \left[e^{3x} \sin(2x), e^{-2x}, e^{3x} \cos(2x) \right]_{\lambda} - 7x.$$

8 Dokažte, že má-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ na nějakém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ gradient, který je na tomto okolí spojitý, pak má jistě v bodě \vec{a} totální diferenciál. Ukažte, kde by důkaz přestal fungovat, kdyby předpoklady požadovaly existenci a spojitost gradientu pouze v bodě \vec{a} .

9 Dokažte, že v Hilbertově prostoru \mathcal{H} platí implikace

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n = \vec{b} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n + \vec{y}_n) = \vec{a} + \vec{b}.$$

Ukažte místo v důkazu, kde je zřejmé, že tvrzení neplatí v obecném metrickém prostoru.