Poslední termín zkoušky z předmětu 01MAB3 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
		10. září 2020, 11:30 – 13:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

1. Vyslovte podmínky pro záměnu

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x$$

   a své tvrzení dokažte.

2. Vyslovte a dokažte větu o řešení homogenní diferenciální rovnice. V rámci důkazu také vyslovte definici homogenní funkce, aby bylo jasné, o co svůj důkaz opíráte.

3. Vyslovte a dokažte Taylorovu větu (o koeficientech Taylorovy řady). Odkud máte oprávnění derivovat člen po členu, tj. zaměnit derivaci a sumu?

4. Nechť $q(\vec{x}) : \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Co představuje symbol $q(\vec{x}) \trianglelefteq 0$? Definujte. Který z indexů setrvačnosti je v daném případě jistě nulový? Může být některý z indexů setrvačnosti roven číslu m?

5. Pro rovnici $y''' + 6y'' + 9y' = 27$ určete, co je Ω_0, Ω_q, a co je fundamentální systém.

6. Rozhodněte, zda zobrazení $\|x\| := \lceil x \rceil$ splňuje axiomy normy na vektorovém prostoru $\langle 0, +\infty)$.

7. Vyslovte definici konvergence podle normy v Hilbertově prostoru a tuto definici přepište pomocí symboliky skalárního součinu.

8. Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a vysvětlete, zda lze pomocí něj rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad \text{na intervalu} \quad \langle 0, 1 \rangle.$$

9. Minimalistickým zápisem přepište následující výrok:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n > n_0 \ \wedge\ x \in \langle -2, 2 \rangle \Rightarrow \left| g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) - x^2 \right| < \varepsilon.$$

<table>
<tr><td colspan="3">Poslední termín zkoušky z předmětu 01MAB3
(akademický školní rok 2019/2020)</td></tr>
<tr><td>Jméno a příjmení studenta</td><td>Hodnocení</td><td>Datum a čas testu</td></tr>
<tr><td>✍</td><td></td><td>24. srpna 2020, 11:30 – 13:00</td></tr>
</table>

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

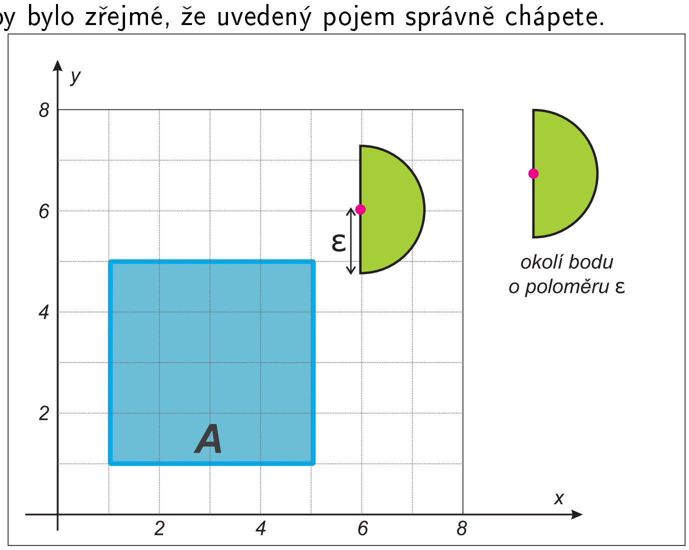
1. Vyslovte definici konvergence v metrickém prostoru a podle ní rozhodněte o konvergenci posloupnosti
$$(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{3+4n^2}{n^2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$
v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho(\vec{x}, \vec{y})\}$ se síťovou metrikou
$$\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$
2. Vyslovte a dokažte větu o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnici s nulovou pravou stranou. Proč je pro tento důkaz nezbytné, aby funkce ve fundamentálním systému byly lineárně nezávislé?
3. Vyslovte a dokažte Taylorovu větu (o koeficientech Taylorovy řady).
4. Jaká je hlavní signatura kvadratické funkce $Q(x, y, z) = x^2 - 4xz + z^2 - 5y^2 + 1$?
5. Pro rovnici $y'' + 6y' + 9y = 27$ určete, co je Ω_0, Ω_q, a co je fundamentální systém.
6. Jaký je integrační faktor rovnice
$$y' + \frac{y}{x^2} = x^4 \quad ?$$
7. Vysvětlete (pomocí přesné definice) význam symbolu $\mathcal{U}_\delta(\vec{z})$.
8. Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a vysvětlete, zda lze pomocí něj rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad \text{na intervalu} \quad \langle 0, 1\rangle.$$
9. Minimalistickým zápisem přepište následující výrok:
$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \langle -1, 1\rangle)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n > n_0 \Rightarrow \left| g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) - x^2 \right| < \varepsilon.$$

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
✍		**7. července 2020**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2. V záhlaví výrazně přeškrtněte políčka těch úloh, které nemají být opravovány.

1. Vyslovte definici konvergence v metrickém prostoru a podle ní rozhodněte o konvergenci posloupnosti
$$(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{3+4n^2}{n^2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$
v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \sigma(\vec{x},\vec{y})\}$ se $\sigma-$metrikou.
2. Vyslovte a dokažte větu o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnici s nulovou pravou stranou. Proč je pro tento důkaz nezbytné, aby funkce ve fundamentálním systému byly lineárně nezávislé?
3. Co je vektorové spektrum kvadratické formy? A jak vypadá pro $q(x,y,z) = x^2 - 4xz + z^2 - 5y^2$?
4. Pro rovnici $y'' + 6y' + 9y = 27$ určete, co je Ω_0, Ω_q, a co je fundamentální systém.
5. Definujte pojmy homogenní diferenciální rovnice a exaktní diferenciální rovnice. Splňuje rovnice
$$3x^2y + (x^3 + y^3)y' = 0$$
některou z těchto definic?
6. Vysvětlete (pomocí přesné definice) význam symbolu $\mathcal{U}_\delta(\vec{z})$.
7. Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a vysvětlete, zda lze pomocí něj rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad \text{na intervalu} \quad \langle 0, 1\rangle.$$
8. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x-3| \leqslant 2 \ \wedge \ |y-3| \leqslant 2\}$$
(viz obrázek). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar polokruhu z obrázku o polomětu ε. Určete (a do obrázku vyznačte), zda má množina A nějaké hraniční body. Vyslovte také definici pojmu hraniční bod, aby bylo zřejmé, že uvedený pojem správně chápete.

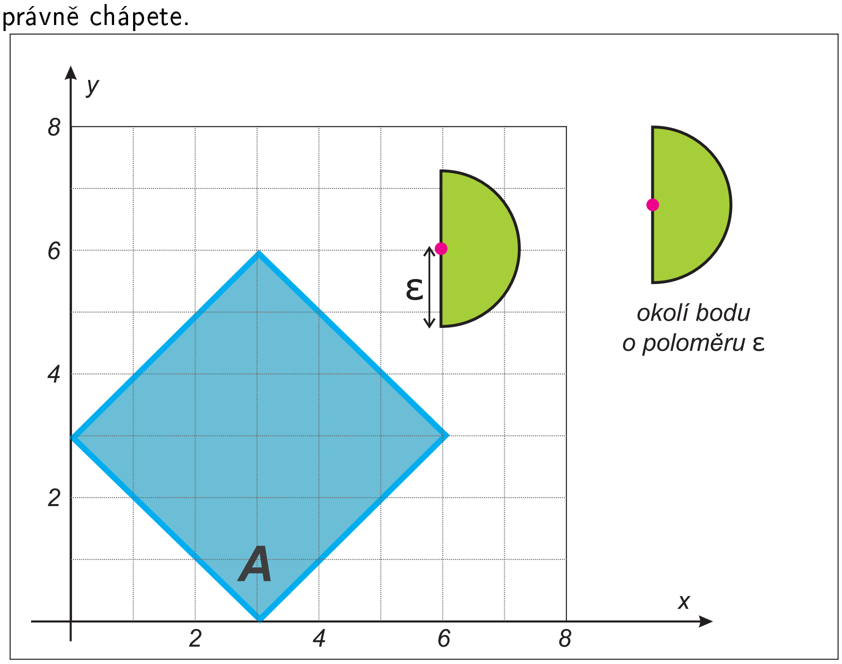


Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
		29. června 2020

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2. V záhlaví výrazně přeškrtněte políčka těch úloh, které nemají být opravovány.

1. Vyslovte a dokažte větu o integračním faktoru.
2. Vyslovte a dokažte Taylorovu větu (o tvaru Taylorových koeficientů). Ukažte, že bez záměny pořadí dvou matematických operací nelze důkaz provést a diskutujte, proč lze tuto záměnu provést.
3. Jakou vlastnost představuje tzv. cauchyovskost posloupnosti $((1/n, 1/n^2))_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \sigma(\vec{x}, \vec{y})\}$ se σ–metrikou? Definiční vztah přepište s využitím zadaných konkrétních údajů.
4. Rozhodněte o konvergenci posloupnosti $((1/n, 1/n^2))_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \sigma(\vec{x}, \vec{y})\}$ se σ–metrikou.
5. Co je fundamentální systém? A kolik prvků má pro diferenciální rovnici $y^{(5)} - x^7 y''' + xy'' = 0$?
6. Kdy řekneme, že kvadrika $Q(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ je regulární?
7. Vyslovte srovnávací kritérium pro funkční řady a vysvětlete, zda lze pomocí něj rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$
na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
8. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina (viz také obrázek)
$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x-3| + |y-3| \leqslant 3\}.$$
Okolí vybraného bodu má tvar zeleného polokruhu. Určete (a do obrázku vyznačte), zda má množina A nějaké izolované body. Vyslovte také definici pojmu izolovaný bod, aby bylo zřejmé, že uvedený pojem správně chápete.



Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3
(akademický školní rok 2019/2020)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
✍		**27. února 2020**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2.

1. Dokažte:
$$g_n(x) \rightrightarrows g(x) \quad \Rightarrow \quad g_n(x) \rightarrow g(x)$$
Zadání také vhodně upřesněte.

2. Vyslovte a dokažte větu o limitě Lagrangeova zbytku v Taylorově vzorci (tzv. kritérium analytičnosti).

3. Definujte pojem oblast a oba pomocné pojmy vysvětlete.

4. Vysvětlete význam symbolu $\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\vec{x} \trianglelefteq 0$. Co z tohoto zápisu vyplývá pro vektorové spektrum matice $\mathbb{A}$?

5. Na střední škole se běžně pracuje s faktem, že velikost skalárního součinu lze vypočítat jako součin velikostí obou vektorů a cosinu úhlu, který svírají. Je toto tvrzení platné také v obecném Hilbertově prostoru? Své tvrzení řádně zdůvodněte.

6. Jednoduše vysvětlete, jaké vlastnosti jsou skryty ve formálních zápisech:
$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall c \in \mathbf{R}^+)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in \mathcal{U}_\delta(c) \Rightarrow |g_n(x) - g_n(c)| < \varepsilon,$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in \mathbf{R}^+)(\forall n \in \mathbf{N} \setminus \hat{m}) : \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x) - x^2\right| < \varepsilon.$$
Lze s těmito indiciemi vyčíslit výraz
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^3 g_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

7. Vykrestele okolí bodu $(0,0)$ při metrice $\varrho(\vec{x},\vec{y}) = 4(x_1 - y_1)^2 + |x_2 - y_2|$.

8. Co je fundamentální systém? A kolik má prvků?

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
		12. února 2020

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2.

1. Vyslovte definici Cauchyovy úlohy a předveďte důkaz existence jejího řešení.
2. Vyslovte podmínky pro záměnu

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x$$

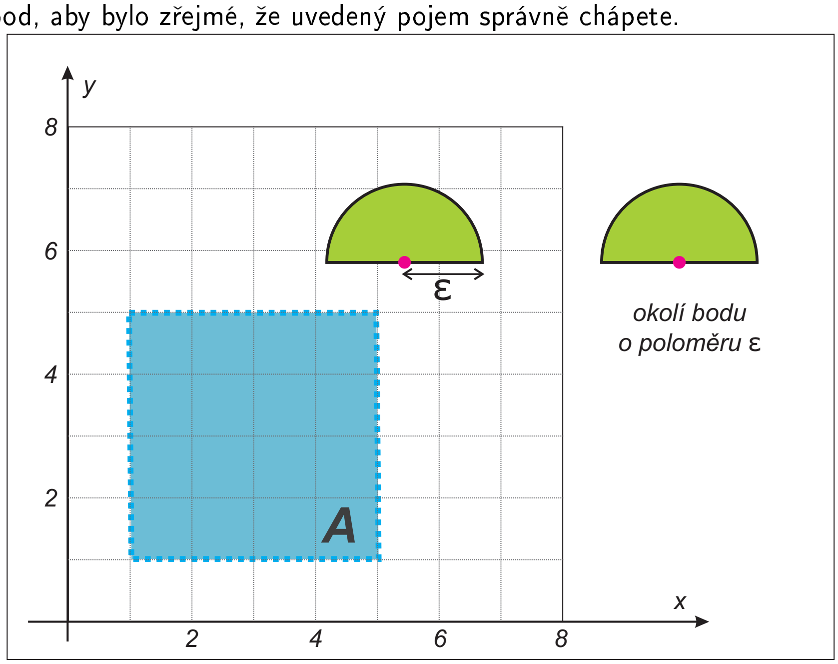
   a své tvrzení dokažte.
3. Vyslovte definici ekvivalentních norem.
4. Opravte tvrzení:

$$I = (a,b) \wedge g_k(x) \in C^1(I) \wedge g_k'(x) \overset{I}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Rightarrow \quad g_k(x) \overset{I}{\rightrightarrows} g(x) \wedge f(x) = g(x).$$

5. Jak se definuje úhel mezi funkcemi $f(x)$ a $g(x)$ v Hilbertově prostoru $C(\langle a,b\rangle)$? Všechny použité symboly vysvětlete (definujte).
6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence R_a. Jaký poloměr konvergence má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^3 x^n$?
7. Zapište tvar formálního řešení exaktní diferenciální rovnice a dokažte, že se o hledané řešení skutečně jedná.
8. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x-3| < 2 \wedge |y-3| < 2\}$$

   (viz obrázek). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar polokruhu z obrázku o polomětu ε. Určete (a do obrázku vyznačte), zda má množina A nějaké hraniční body. Vyslovte také definici pojmu hraniční bod, aby bylo zřejmé, že uvedený pojem správně chápete.



Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
✍		6. února 2020

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2.

1. Dokažte, že je-li $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n+1}(x)$ $n+1$ řešení rovnice $\hat{L}(y) = 0$, pak jsou nutně lineárně závislá. Operátor $\hat{L}$ považujte za operátor řádu n.
2. Vyslovte a dokažte základní větu teorie mocninných řad (o stejnoměrné konvergenci).
3. Rozhodněte, zda předpis
$$\|\vec{x}\| := \lceil |x_1| \rceil + \lceil |x_2| \rceil$$
zadává normu na $\mathbf{R}^2$.
4. Zapište tvar Lagrangeova zbytku v Taylorově vzorci a vysvětlete význam všech použitých symbolů. Specifikujte tvar zbytku ve vzorci pro maclaurinovský rozvoj funkce $g(x) = \mathrm{e}^{ax}$.
5. Určete obě signatury třídimenzionální kvadriky $xy + yz = 1$.
6. Co se rozumí pojmem úplnost metrického prostoru $\{E, \varrho\}$? Použité pojmy také definujte.
7. Zapište, jaká vlastnost se rozumí pod *spojitostí skalárního součinu.*
8. Vyslovte srovnávací a Weierstrassovo kritérium pro řady funkcí.

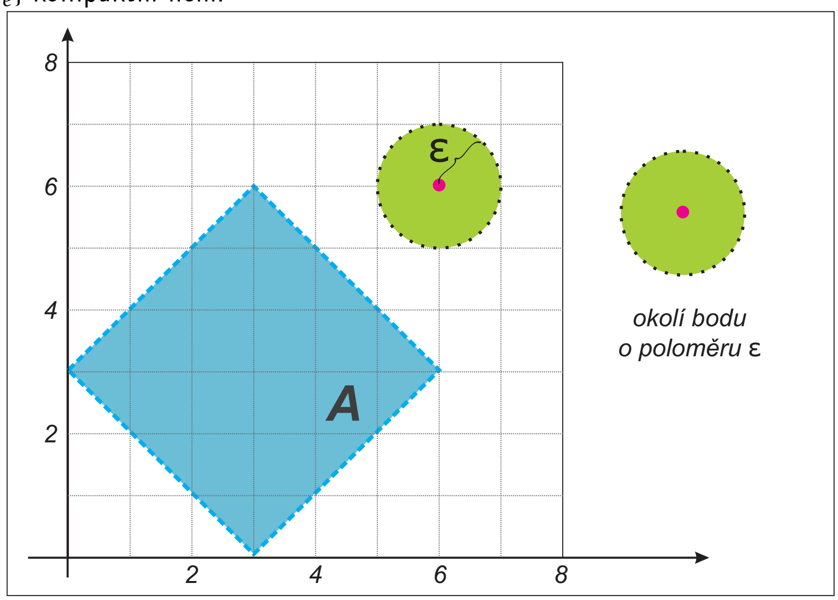
Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
		28. ledna 2020

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

1. Ukažte, že homogenní diferenciální rovnici lze jistou substitucí vždy převést na rovnici se separovanými proměnnými. V důkaze zvýrazněte tu část, která by přestala platit, kdyby funkce byly sice homogenní, ale ne stejného stupně.
2. Co je jádrem operátoru $\hat{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 4$?
3. Jak je v prehilbertovském prostoru definován úhel mezi vektory? Vyslovte přesnou definici a vysvětlete, proč zlomek vystupující v definici nabývá pouze "správných"hodnot. Proč je potřeba se zamýšlet nad tím, jakých hodnot tento zlomek nabývá?
4. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou je dána množina

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 3| + |y - 3| < 3\}$$

(viz obrázek), která není kompaktní. Vyslovte definici kompaktní množiny a podle ní ukažte, že A skutečně v $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ kompaktní není.



5. Definujte pojem *majorantní řada* k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$.
6. Za jakých minimálních předpokladů lze v zápise $\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ zaměnit pořadí operací?
7. Který bod je středem čtyřdimenzionální kvadriky $x^2 - y^2 + z^2 - u^2 - 2x - 4y - 6z - 8u = 0$? Nebo je tato kvadrika necentrální?
8. Která z níže uvedených variant nemůže nikdy nastat?
   (a) $f_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} g(x) \wedge g(x) \notin C(I)$
   (b) $f_n(x) \in C(I) \wedge \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \wedge g(x) \notin C(I)$
   (c) $f_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} g(x) \wedge f_n'(x) \overset{I}{\not\rightrightarrows} g'(x)$
   (d) $f_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} g(x) \wedge f_n(x) \in C(I) \wedge g(x) \notin C(I)$

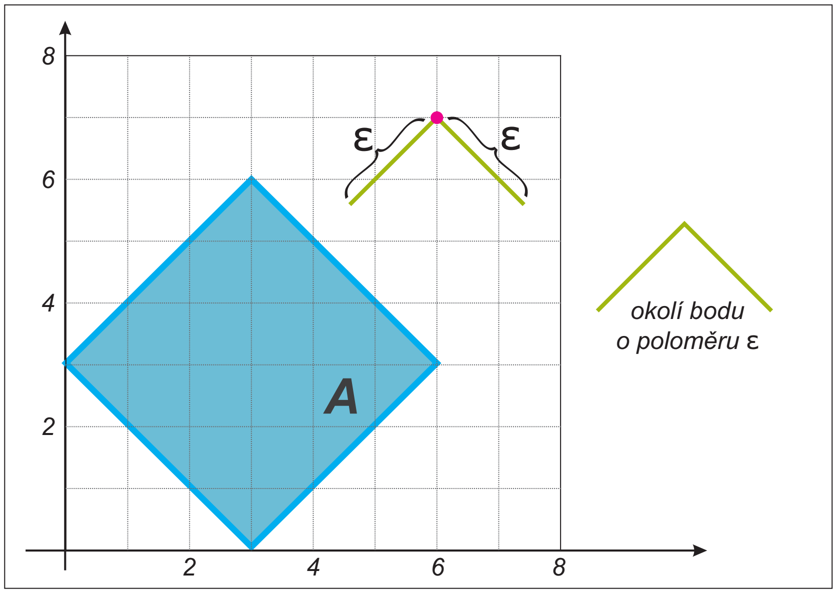
Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2019/2020)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
✍		20. ledna 2020

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

1. Nechť $y(x)$, $z(x)$ a $v(x)$ jsou tři řešení téže rovnice $\hat{L}(y(x)) = 0$. Nechť $\hat{L}$ je diferenciální operátor druhého řádu. Jaká vlastnost pak jistě platí mezi funkcemi $y(x)$, $z(x)$, $v(x)$?
2. Kvantifikátorovým zápisem (pouze pomocí symbolů bez jediného slova) zapište tvrzení označované jako *nutná podmínka stejnoměrné konvergence* pro řady funkcí.
3. Jaké signatury má kvadratická funkce
$$x^2 - y^2 + z^2 - u^2 - 2x + 2y - 2z + 2u - 2w = 0\,?$$
Nepřehlédněte, že uvedená funkce zobrazuje z $\mathbf{R}^5$.
4. Za jakých předpokladů lze v zápise $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x$ zaměnit pořadí operací?
5. Ukažte, že v Hilbertově prostoru funkcí lze na základě známých hodnot $\langle f|f\rangle$, $\langle g|g\rangle$, a $\langle f|g\rangle$ jednoznačně určit vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Tuto vzdálenost vypočítejte pro hodnoty
$$\langle f|f\rangle = 1, \quad \langle g|g\rangle = 3, \quad \langle f|g\rangle = -1 + 2\mathtt{i}.$$
6. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Vyberte platnou odpověď.
   (a) Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na A i na B, pak konverguje stejnoměrně i na $A \cup B$. [Platí/Neplatí]
   (b) Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na A i na B, pak konverguje stejnoměrně i na $A \cap B$. [Platí/Neplatí]
   (c) Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na A a pro množinu B platí, že $B \supset A$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně i na B. [Platí/Neplatí]
   (d) Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na A a pro množinu B platí, že $B \subset A$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně i na B. [Platí/Neplatí]
7. Definujte lineární závislost funkcí $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ na intervalu $I = (2, 8)$. Plyne z této vaší definice lineární závislost stejných funkcí na intervalu $I = (1, 9)$ nebo na $I = (3, 7)$? Vaši volbu vysvětlete!
8. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 3| + |y - 3| \leqslant 3\}$ (viz obrázek). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar šipky z obrázku o délce 2ε. Určete, zda má množina A nějaké hraniční body. Vyslovte také definici pojmu hraniční bod, aby bylo zřejmé, že uvedený pojem správně chápete.



8
6
4
2
2
4
6
8
ε
ε
A
okolí bodu
o poloměru ε

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum
✍		13. ledna 2020

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

1. Jaké signatury má kvadrika

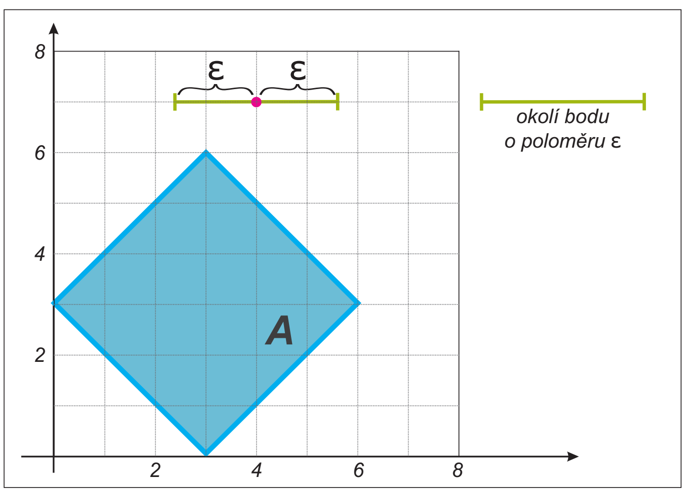
$$(x, y, z)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\,?$$

2. Nechť $q(\vec{x}) : \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Co představuje symbol $q(\vec{x}) \trianglelefteq 0$? Definujte. Čemu se v daném případě rovná záporný index setrvačnosti?

3. Vyslovte definici pojmu fundamentální systém a určete, jak vypadá fundamentální systém rovnice $y'' + 8y' + 16y = 0$.

4. Jaký tvar má operátor rovnice $y'' + 8y' + 16y = 0$?

5. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 3| + |y - 3| \leqslant 3\}$ (viz obrázek). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar úsečky z obrázku o délce 2ε. Určete, zda má množina A nějaké izolované body. Vyslovte také definici pojmu izolovaný bod, aby bylo zřejmé, že uvedený pojem správně chápete.



6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ má obor konvergence $O = \langle -1, 1\rangle$. Které z následujících tvrzení je správné?
   (a) Řada stejnoměrně konverguje na $\langle -1, 1\rangle$ i na každém $\langle -a, a\rangle$, kde $0 < a < 1$.
   (b) Řada na $\langle -1, 1\rangle$ stejnoměrně nekonverguje, ale na každém $\langle -a, a\rangle$, ano.
   (c) Řada stejnoměrně konverguje na $\langle -1, 1\rangle$, ale na $\langle -a, a\rangle$ stejnoměrně nekonverguje,
   (d) Řada nekonverguje stejnoměrně ani na $\langle -1, 1\rangle$ ani na $\langle -a, a\rangle$.

7. Proč výraz $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ nesplňuje axiomy skalárního součinu na prostoru všech funkcí definovaných na intervalu $\langle -1, 1\rangle$?

8. Za jakých předpokladů jistě platí rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)\,?$$