Rozstřel zkoušky z předmětu 01ANB3/01MAB3 (akademický školní rok 2021/2022)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		11. ledna 2022, 9:30 – 11:15

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol	10. úkol

Bodování: Každá úloha, je-li správně vyřešena, je hodnocena jedním bodem. Příklady se zcela nesprávným nebo chybějícím řešením jsou klasifikovány nulou. Ostatní příklady jsou hodnoceny zlomky tvaru 1/2, 3/4 apod.
Hodnocení: Mezi zcela správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy 1–3. Maximální počet přípustných nul je 2. Celkový bodový zisk za test nesmí poklesnout pod 7 bodů.

❶ Vyslovte a dokažte větu o limitě Lagrangeova zbytku, v níž se v předpokladech objevuje požadavek na omezenost derivací $f^{(n)}(x)$.

❷ Vyslovte a dokažte větu o snížení řádu diferenciální rovnice.

❸ Vyslovte podmínky pro záměnu

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x$$

a své tvrzení dokažte.

❹ Vyslovte definici pozitivní semidefinitnosti a pomocí ní ukažte, že čtyřdimenzionální q-forma

$$q(\vec{x}) = 4x_1^2 + x_3^2 + 9x_4^2$$

je pozitivně semidefinitní.

❺ Kdy řekneme, že je metrický prostor úplný? Pomocný pojem také definujte.

❻ Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a jeho aplikaci demonstrujte na řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n\sqrt{n}}$$

zadané na množině $A = \langle 0, +\infty)$.

❼ Nechť $\varepsilon = 1/5$. Leží funkce x v $\varepsilon-$okolí funkce x^2 ? Uvažujte Hilbertův prostor funkcí $\mathcal{H} = [1, x, x^2]_\lambda$ se skalárním součinem $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

❽ Nalezněte jádro operátoru $\hat{L} = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} - 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 1$.

❾ Zapište rovnici parabolického válce (jako kvadriky ve 3d) a stanovte obě jeho signatury.

❿ Kdy řekneme, že jsou množiny A a B oddělené?

Rozstřel zkoušky z předmětu 01ANB3/01MAB3 (akademický školní rok 2021/2022)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**18. ledna 2022, 9:30 – 11:15**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol	10. úkol

Bodování: Každá úloha, je-li správně vyřešena, je hodnocena jedním bodem. Příklady se zcela nesprávným nebo chybějícím řešením jsou klasifikovány nulou. Ostatní příklady jsou hodnoceny zlomky tvaru 1/2, 3/4 apod.
Hodnocení: Mezi zcela správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy 1–3. Maximální počet přípustných nul je 2. Celkový bodový zisk za test nesmí poklesnout pod 7 bodů.

❶ Vyslovte a dokažte základní větu o stejnoměrné konvergenci mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

❷ Vyslovte a dokažte větu o podprostoru $[\mathrm{e}^{\alpha x}, x\mathrm{e}^{\alpha x}, x^2\mathrm{e}^{\alpha x}, \ldots \quad ? \quad]_\lambda$.

❸ Vyslovte a dokažte větu o spojitosti skalárního součinu.

❹ Ve kterém bodě leží střed elipsy $x^2 + 6xy - 20x + 10y^2 - 64y + 4 = 0$?

❺ Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a jeho aplikaci demonstrujte na řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!!}$$

zadané na množině $A = \langle -2, 2 \rangle$.

❻ Kde se v důkaze věty o Taylorových koeficientech uplatní základní věta o stejnoměrné konvergenci mocninných řad?

❼ Nalezněte jádro operátoru

$$\hat{L} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} - 6\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 8.$$

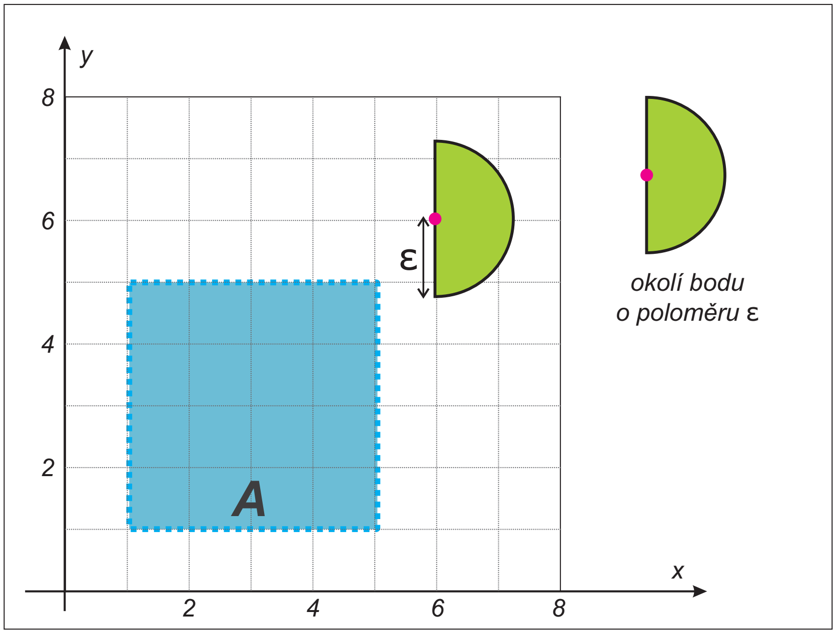
❽ Řešte rovnici $xy' + (2x^2 - 1)y = 0$ metodou integračního faktoru. Jaký tvar tento integrační faktor má?

❾ V Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = [1, x^2]_\lambda$ se skalárním součinem $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ nalezněte alespoň jednu nenulovou funkci kolmou k funkci $y(x) = x^2$.

❿ V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 3| < 2 \wedge |y - 3| < 2\}$$

(viz obrázek na zadní straně). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar polokruhu z obrázku. Určete (a do obrázku vyznačte), zda má množina A nějaké hraniční body. Vyslovte také definici pojmu hraniční bod, aby bylo zřejmé, že uvedený pojem správně chápete.


y
8
6
4
2
A
ε
x
2
4
6
8
okolí bodu
o poloměru ε

Rozstřel zkoušky z předmětu 01ANB3/01MAB3 (akademický školní rok 2021/2022)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**26. ledna 2022, 9:30 – 11:15**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol	10. úkol

Bodování: Každá úloha, je-li správně vyřešena, je hodnocena jedním bodem. Příklady se zcela nesprávným nebo chybějícím řešením jsou klasifikovány nulou. Ostatní příklady jsou hodnoceny zlomky tvaru 1/2, 3/4 apod.
Hodnocení: Mezi zcela správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy 1–3. Maximální počet přípustných nul je 2. Celkový bodový zisk za test nesmí poklesnout pod 7 bodů.

❶ Vyslovte a dokažte větu o řešení exaktní diferenciální rovnice.

❷ Vyslovte a dokažte větu o záměně sumy a integrálu pro řady funkcí.

❸ Vyslovte a dokažte větu o středu kvadriky.

❹ Jak je definována regularita kvadriky $\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\vec{x} - 2\vec{b}^{\mathsf{T}}\vec{x} + c = 0$?

❺ O čem pojednává věta o variaci konstant? Odpovězte jednou větou bez vzorců. Jde pouze o vystižení hlavního smyslu věty, tj. o populární popis toho, k čemu vlastně věta slouží.

❻ Jaký tvar má epsilonové okolí bodu $\vec{a} = (0,0)$ v Hilbertově prostoru se skalárním součinem

$$(x,y)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}?$$

Okolí vykreslete, a to včetně naznačení rozměrů objektu.

❼ Vysvětlete, proč nemůže platit výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(\forall m > n > n_0) : \left| \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} \right| < \varepsilon.$$

❽ Která z množin

- $\Omega_A = [1, x, \mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_B = [1, x^2, \mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_C = [1, x^2\mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_D = [1, x\mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_E = [1, \mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x]_\lambda$

může být jádrem operátoru s konstantními koeficienty? Úloha může mít i více řešení.

❾ Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence rovný třem. Jaký poloměr konvergence má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_{n+1})^4} x^n \,?$$

❿ Vyslovte definici Taylorovy řady. Dbejte na preciznost formulací.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01ANB3/01MAB3 (akademický školní rok 2021/2022)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**3. února 2022, 9:30 – 11:15**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol	10. úkol

Bodování: Každá úloha, je-li správně vyřešena, je hodnocena jedním bodem. Příklady se zcela nesprávným nebo chybějícím řešením jsou klasifikovány nulou. Ostatní příklady jsou hodnoceny zlomky tvaru 1/2, 3/4 apod.
Hodnocení: Mezi zcela správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy 1–3. Maximální počet přípustných nul je 2. Celkový bodový zisk za test nesmí poklesnout pod 7 bodů.

❶ Vyslovte a dokažte větu o normě generované skalárním součinem.

❷ Vyslovte a dokažte Taylorovu větu (o koeficientech Taylorovy řady). A pozor na řádné zdůvodnění záměny pořadí příslušných operací!

❸ Dokažte, že každá Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici má řešení. Pro důkaz již předpokládejte, že máte k dispozici fundamentální systém dané rovnice. V rámci důkazu vyslovte definici Cauchyovy úlohy.

❹ Kdy řekneme, že je množina A kompaktní v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$?

❺ Jaká je signatura kvadratické formy $q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 2xz + 2y^2 - 8yz$?

❻ Ukažte, že v Hilbertově prostoru funkcí lze na základě známých hodnot $\langle f|f\rangle$, $\langle g|g\rangle$, a $\langle g|f\rangle$ jednoznačně určit vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a také úhel, který tyto funkce svírají. Oba údaje vypočítejte pro hodnoty

$$\langle f|f\rangle = 25, \quad \langle g|g\rangle = 4, \quad \langle g|f\rangle = 4 - 3\mathtt{i}.$$

❼ Jaký je faktický důvod pro to, že výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(\forall m > n > n_0) : \left| \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} \right| < \varepsilon.$$

neplatí a výrok

$$(\forall K > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall x \in \langle -K, K\rangle)(\forall m > n > n_0) : \left| \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} \right| < \varepsilon.$$

platí?

Otoč! ⟶

❽ Která z množin

- $\Omega_A = [1, x, \mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_B = [1, x^2, \mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_C = [1, x^2\mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_D = [1, x\mathrm{e}^x]_\lambda$
- $\Omega_E = [1, \mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x]_\lambda$

může být jádrem operátoru s konstantními koeficienty? Úloha může mít i více řešení.

❾ Ve kterém bodě leží střed elipsy $(x + 3y - 10)^2 + (y - 2)^2 = 1$?

❿ Předveďte aplikaci metody variace konstant na řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$