Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**25. května 2021, 9:30 – 11:00**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3. Řešení úloh 1–3 budete odevzdávat s předstihem v 10:15. Řešte je proto na samostatném papíře.

❶ Dokažte: Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ derivaci, která je na tomto okolí spojitá. Pak má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.

❷ Vyslovte definici regularity zobrazení $\vec{g}(x, y, z)$. Použité symboly a pojmy explicitně rozepište.

❸ Vyslovte (bez důkazu) větu o substituci pro Lebesgueův integrál.

❹ Prověřte předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem pro případ integrálu

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^3} \sin^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

❺ Čemu se rovná

$$\int_{\mathbf{R}} \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$$

při klasické Lebesgueově míře? A existuje vůbec? Podle kterého konstrukčního kroku tento integrál vyčíslujete?

❻ Následující výrok přepište do jednoduchého (a minimalistického) tvaru.

$$\lim_{c\to 0} \frac{g(1+3c, 2-c, 1) - g(1, 2, 1)}{c} = \sqrt{5}.$$

❼ Rozhodněte, zda je množinová soustava

$$\mathscr{A} = \Big\{\emptyset; \{\square\}; \{\ominus\}; \{\heartsuit, \triangle\}; \{\square, \heartsuit, \triangle\}; \{\ominus, \square, \heartsuit, \triangle)\Big\}$$

okruhem, resp. polookruhem.

❽ Pro funkci $z = z(x, y)$ zadanou na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ vypočítejte druhou smíšenou parciální derivaci. V jakém bodě ji budete vyčíslovat?

❾ O posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ vektorů z $\mathbf{R}^2$ je známo, že:

$$(\forall\delta > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \|\vec{x}_n - (3, 5)\| < \delta.$$

O funkci $g(\vec{x}) : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je známo, že:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) : \quad \|\vec{x} - (3, 5)\| < \delta \Rightarrow |g(\vec{x}) - 4| < \varepsilon.$$

Co lze z těchto indicií vyvodit pro posloupnost $(g(\vec{x}_n))_{n=1}^\infty$? Odpověď zformulujte do matematické formule.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**1. června 2021, 9:30 – 11:00**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3. Řešení úloh 1–3 budete odevzdávat s předstihem v 10:15. Řešte je proto na samostatném papíře.

❶ Vyslovte a dokažte větu o Hessově matici implicitní funkce ve stacionárním bodě.

❷ Vyslovte definici křivkové parametrizace a poté vysvětlete, kdy řekneme, že je křivka jednoduchá. Je elipsa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

jednoduchou křivkou? Svou odpověď potvrďte aplikací vaší definice.

❸ Dokažte, že je-li funkce $h(\vec{x}) \in \mathscr{Z}_\mu$ skoro všude nulová, pak integrál $(\mathscr{L}) \int_{\mathbf{E}^r} h(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ vždy existuje a je nulový. Proč je k důkazu nutno užít předpoklad o úplnosti míry?

❹ Zapište obecný (definiční) tvar Taylorovy řady funkce $g(\vec{x})$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$.

❺ Vyslovte definici pojmu $\mu-$skoro všude.

❻ Následující výraz přepište do nejjednoduššího a nejkratšího možného tvaru.

$$\lim_{c\to 0} \frac{g_1(3+c,2,1) + g_2(3,2+c,1) + g_3(3,2,1+c) - g_1(3,2,1) - g_2(3,2,1) - g_3(3,2,1)}{c},$$

kde $g_1(x,y,z)$, $g_2(x,y,z)$ a $g_3(x,y,z)$ jsou tři hladké funkce.

❼ Zapište tvar totálního diferenciálu funkce $g(x,y,z) = x^2 + 7yz^2$ v bodě $\vec{a} = (2,2,2)$.

❽ Vyslovte definici ostrého globálního minima.

❾ Ukažte, že ze zbylých čtyř axiomů míry lze odvodit axiom nezápornosti.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		10. června 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

❶ Vyslovte větu o substituci a všechny v ní vystupující pojmy řádně definujte.

❷ Vyslovte a dokažte nutnou podmínku pro lokální extrém.

❸ Kdy řekneme, že plocha S je hladká regulární? Precizně definujte i pomocné pojmy, zejména pojem plošné parametrizace.

❹ Předpokládejte, že je již definován Riemannův integrál přes interval. Jakým způsobem se definuje Riemannův integrál přes obecnou množinu? Neopomeňte na předpoklady.

❺ Co říká výrok

$$\exists \varkappa > 0 : \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varkappa \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{a}) > 0?$$

Očekává se jednoduchá slovní interpretace.

❻ Následující výrok pro funkci $g(\vec{x}) \in C(\mathbf{R}^3)$ přepište do jednoduchého a minimalistického tvaru.

$$\lim_{c \to 0} \left(\frac{s_1}{c}\big(g(3+c,4,1) - g(3,4,1)\big) + \frac{s_2}{c}\big(g(3,4+c,1) - g(3,4,1)\big) + \frac{s_3}{c}\big(g(3,4,1+c) - g(3,4,1)\big) \right) = 0.$$

❼ Na množinové soustavě $\mathscr{A} = \Big\{ \emptyset; \{\square\}; \{\ominus\}; \{\heartsuit, \triangle\}; \{\square, \heartsuit, \triangle\}; \{\ominus, \square, \heartsuit, \triangle\} \Big\}$ je dána míra

$$\mu(X) = \begin{cases} X = \emptyset & \dots\ \mu(X) = 0 \\ X = \{\square\} & \dots\ \mu(X) = 5 \\ X = \{\ominus\} & \dots\ \mu(X) = 2 \\ X = \{\heartsuit, \triangle\} & \dots\ \mu(X) = \,? \\ X = \{\square, \heartsuit, \triangle\} & \dots\ \mu(X) = 9 \\ X = \{\ominus, \square, \heartsuit, \triangle\} & \dots\ \mu(X) = \,? \end{cases}$$

Vyčíslete hodnotu **vnější** míry pro množiny $B = \{\ominus, \triangle\}$ a $C = \{\heartsuit\}$. Definici vnější míry nejprve vyslovte, aby bylo zřejmé, že jste výsledky získali na základě správných úvah.

❽ Co lze říci o spektru Hessovy matice funkce $g(\vec{x}) \in C^2(\mathbf{R}^r)$ vyčíslené v sedlovém bodě?

❾ Definujte pojem limita vzhledem k množině.

<table>
<tr><td colspan="3">**Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4**
(akademický školní rok 2020/2021)</td></tr>
<tr><td>Jméno a příjmení studenta</td><td>Hodnocení rozstřelu</td><td>Datum a čas testu</td></tr>
<tr><td>✍</td><td></td><td>**15. června 2021, 9:30 – 11:00**</td></tr>
</table>

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

❶ Vyslovte a dokažte větu o tvaru koeficientů Taylorovy řady. Zaměňujete v důkazu pořadí některých matematických operací? Jakých? A proč to lze?

❷ Vyslovte korektní znění Lebesgueovy věty a ukažte, jak ji lze aplikovat při vyčíslení limity

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \operatorname{arctg}(nx)\cdot\frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Výraz vypočítejte!

❸ Dokažte: Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na jistém okolí bodu $\vec{a}\in\mathbf{E}^r$ derivaci, která je na tomto okolí spojitá. Pak má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.

❹ Splňuje množinová funkce

$$m(X) := \begin{cases} 0 & X = \emptyset \\ 1 & X \subset \mathbf{R} \wedge X \neq \emptyset \end{cases}$$

axiomy míry na potenci $2^{\mathbf{R}}$?

❺ Definujte množinovou soustavu $\mathscr{H}_r$ a ukažte, že vytvořující funkce míry nemůže být (kvůli definici míry) klesající. Argumentaci demonstrujte na soustavě $\mathscr{H}_1$.

❻ Co lze říci o funkci $g(\vec{x})$, jejíž Hessova matice existuje, ale není symetrická?

❼ Vyslovte definici směrové parciální derivace.

❽ Pro funkci $z = z(x,y)$ zadanou na okolí bodu (x_0,y_0,z_0) implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$ vypočítejte druhou parciální derivaci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

ve vhodném bodě. Který bod je touto vhodnou variantou?

❾ Vyčíslete integrál $\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$ z funkce

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2} & x\in\mathbf{Q}, \\ \mathrm{e}^{-|x|} & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}, \end{cases}$$

kde $\mathbf{Q}$ je množina racionálních čísel. Která věta vám výpočet nejvíce usnadní?

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		21. června 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

❶ Vyslovte a dokažte větu o derivaci integrálu s parametrem.

❷ Vyslovte definici plošné parametrizace a poté vysvětlete, kdy řekneme, že je plocha jednoduchá. Je elipsoid

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$$

jednoduchou plochou? Svou odpověď potvrďte aplikací vaší definice.

❸ Vyslovte integrální formuli pro Lebesgueovu míru a dokažte alespoň první dvě části tvrzení (pro množinové soustavy $\mathscr{H}_r$ a $\mathscr{S}_r$).

❹ Vyslovte korektní znění Lebesgueovy věty a ukažte, jak ji lze aplikovat při vyčíslení limity

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n^2x^3}{(8+n^2x^2)(1+x^4)}\,\mathrm{d}x.$$

Výraz vypočítejte!

❺ Prověřte detailně všechny předpoklady věty z úlohy č. 1 na integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\frac{\cos(ax)-1}{x}\mathrm{d}x.$$

❻ Nechť je zadána abstraktní Lebesgueova míra prostřednictvím vytvořující funkce

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{4+3x^2}\operatorname{sgn}(x).$$

Je funkce $f(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ finitní nebo ne? Podrobně zdůvodněte!

❼ Ukažte, že ze zbylých čtyř axiomů míry lze odvodit axiom nezápornosti.

❽ Vyslovte definici pojmů generující funkce a generující bod. Kdy je generující bod kritický? V čem spočívá jeho kritičnost/problematičnost?

❾ Vyslovte definici pojmů obraz, resp. vzor množiny při zobrazení $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Jaká množina je vzorem množiny $\langle -1, 1\rangle$ při zobrazení $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$? Očekává se také diskuse geometrického tvaru této množiny.

<table>
<tr><th colspan="3">Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4
(akademický školní rok 2020/2021)</th></tr>
<tr><th>Jméno a příjmení studenta</th><th>Hodnocení rozstřelu</th><th>Datum a čas testu</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>29. června 2021, 9:30 – 11:00</td></tr>
</table>

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

❶ Vyslovte postačující podmínku pro lokální extrém funkce více proměnných. Dbejte na přesnou logickou formulaci.

❷ Zapište Fubiniovu větu pro Lebesgueův integrál a pro funkci $f(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{E}^{r+s} \mapsto \mathbf{R}$.

❸ Vyslovte a dokažte větu o derivaci integrálu s parametrem.

❹ Vyslovte definici pojmu totální diferenciál funkce více proměnných.

❺ Definujte plošný integrál prvního druhu.

❻ Ukažte, že zobrazení $(r,s) = (x^2 - y^2; xy)$ je regulární na $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0]\}$, ale není prosté.

❼ Kdy řekneme, že je funkce $g(\vec{x})$ $\mu-$měřitelná?

❽ Vyslovte větu s vztahu spojitosti a spojitosti vzhledem k množině a na příkladě funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

ukažte, jak ji lze použít v praktických příkladech.

❾ Zapište definici křivkové parametrizace a sestavte ji pro křivku:

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \wedge z = 7c\right\}.$$

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**12. července 2021, 9:30 – 11:00**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3. Řešení úloh 1–3 budete odevzdávat s předstihem v 10:15. Řešte je proto na samostatném papíře.

❶ Vyslovte a dokažte větu o konečné aditivitě v mezích pro Lebesgueův integrál.

❷ Vyslovte a dokažte větu o vzorci pro výpočet směrové parciální derivace.

❸ Vyslovte postačující podmínku pro lokální extrém funkce více proměnných. Dbejte na přesnou logickou formulaci.

❹ Patří funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & x \in \langle 0, 4 \rangle, \\ 0 & x > 4, \end{cases}$$

do základního systému funkcí $\mathcal{Z}_\mu$ nebo ne? Zdůvodněte!

❺ Nechť má generující funkce $W(x, y, z, u)$ v bodě (x_0, y_0, z_0, u_0) následující gradient:

$$\mathrm{grad} W(x_0, y_0, z_0, u_0) = (-8, 2, 4, -2).$$

Jaký gradient má implicitní funkce u generovaná rovnicí $W(x, y, z, u) = 0$? A v jakém bodě tento gradient určujete? Co musí bod (x_0, y_0, z_0, u_0) splňovat, aby úloha byla řešitelná?

❻ Vyslovte precizně větu o přírůstku.

❼ Vyslovte definici regulárního zobrazení a ukažte, na jaké množině je regulární zobrazení zadané vztahy

$$H_1(x, y, z) = z\cos^2(y), \quad H_2(x, y, z) = z\sin^2(y), \quad H_3(x, y, z) = x^2.$$

❽ Co nejčistším matematickým zápisem (v symbolech, tj. beze slov) zapište, co znamená, řekneme-li, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ jsou μ−ekvivalentní.

❾ Zapište definici plošné parametrizace a poté ji použijte na sestavení parametrizace elipsoidu

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 9 \right\}.$$

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**3. srpna 2021, 9:30 – 11:00**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3. Řešení úloh 1–3 budete odevzdávat s předstihem v 10:15. Řešte je proto na samostatném papíře.

❶ Vyslovte definici křivkové parametrizace a poté vysvětlete, kdy řekneme, že je křivka hladká regulární. Je elipsa $x^2 + 9y^2 = 9$ hladkou regulární křivkou? Svou odpověď potvrďte aplikací vaší definice.

❷ Vyslovte a dokažte větu o převodu abstraktního Lebesgueova integrálu na klasický.

❸ Vyslovte a dokažte postačující podmínku pro lokální extrém funkce více proměnných.

❹ Nechť je dána funkce $g(\vec{x}) : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ tří proměnných. Co je třeba doplnit na čtyři prázdná místa ve výraze

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial \square}(\vec{a} + \tau \square) - \frac{\partial g}{\partial \square}(\square)}{\tau},$$

aby tento výraz reprezentoval prostřední prvek Hessovy matice funkce $g(\vec{x})$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$.

❺ Vysvětlete, co znamená, že je funkce $y = g(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ generována implicitně. Jakou generující rovnicí lze takovou funkci $y = g(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ zadat? Všechny užité symboly/písmena vysvětlete. Za jaké podmínky máme jistotu, že generující rovnice implicitní funkci zadává jednoznačně?

❻ Definujte pojmy množinového okruhu a množinové algebry. Dále rozhodněte, zda je soustava

$$\mathscr{A} = \{A \subset \mathbf{N} : \operatorname{card}(A) \in \mathbf{N}_0\}$$

všech konečněprvkových podmnožin množiny $\mathbf{N}$ okruhem, resp. algebrou či není. [card označuje počet prvků]

❼ Co je vytvořující funkce míry? A jakou musí mít nutně vlastnost? A proč?

❽ Jak je definováno těžiště křivky $C \subset \mathbf{R}^r$. Užitou symboliku také definujte tak, aby bylo jasné, co znamenají použitá písmena.

❾ Definujte rozšířený systém základních funkcí $\mathcal{Z}_\mu^+$. Vyskytuje-li se v definici nějaký málo obvyklý symbol, vysvětlete jeho význam.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		3. září 2021, 9:30 – 11:15

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

❶ Dokažte: Nechť má funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ na $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ spojitou derivaci. Pak má v bodě $\vec{a}$ také totální diferenciál.

❷ Vyslovte větu o substituci a základní předpoklad (o vlastnosti použitého zobrazení) řádně definujte.

❸ Vyslovte a dokažte větu o limitě integrálu s parametrem. Důkaz využívá platnost jiné věty. Její znění vyslovte také.

❹ Vyslovte definici pojmu *ekvivalentní funkce* a poté zformulujte větu o Lebesgueově integrálu z ekvivalentních funkcí.

❺ Zapište definici křivkové parametrizace a sestavte ji pro křivku

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \wedge z = \frac{c}{2}\right\}.$$

❻ Je známo, že za vhodných předpokladů platí rovnost $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{G}(\vec{x}) = 0$. Která další kombinace dvou operací dává (za stejných předpokladů) vždy nulu? Dokažte!

❼ Platí nebo neplatí následující tvrzení? *Obraz $f(A)$ otevřené množiny $A \subset \mathbf{E}^r$ je pro spojitou funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ vždy otevřenou množinou.*

❽ Co říká výrok

$$\exists \varkappa > 0 : \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varkappa \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{a}) < 0?$$

Očekává se jednoduchá slovní interpretace.

❾ Nalezněte alespoň jeden kritický generující bod pro implicitní funkci $z = z(x,y)$, která je zadána prostřednictvím rovnice

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2020/2021)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
✍		**10. září 2021, 9:30 – 11:15**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

❶ Vyslovte a dokažte větu o derivaci integrálu s parametrem.

❷ Dokažte, že je-li funkce $h(\vec{x}) \in \mathscr{Z}_\mu$ skoro všude nulová, pak integrál $(\mathscr{L}) \int_{\mathbf{E}^r} h(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ vždy existuje a je nulový. Proč je k důkazu nutno užít předpoklad o úplnosti míry? Kdy řekneme, že míra $\mu(X) : \mathscr{A} \mapsto \mathbf{R}^{\circledast}$ je úplná? Vyslovte příslušnou definici, aby bylo zřejmé, že jste důkaz vedli na základě správných úvah.

❸ Vyslovte postačující podmínku pro lokální extrém funkce více proměnných. Dbejte na přesnou logickou formulaci.

❹ Platí nebo neplatí následující tvrzení? *Obraz $f(A)$ otevřené množiny $A \subset \mathbf{E}^r$ je pro spojitou funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ vždy otevřenou množinou.*

❺ Nalezněte alespoň jeden kritický generující bod pro implicitní funkci $z = z(x, y)$, která je zadána prostřednictvím rovnice

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Pozn. Je třeba nalézt konkrétní bod, tedy nikoli nějaký bod s obecnými souřadnicemi.

❻ Nechť je dána funkce $g(\vec{x}) : \mathbf{R}^4 \mapsto \mathbf{R}$ čtyř proměnných. Co je třeba doplnit na čtyři prázdná místa ve výraze

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial \square}(\vec{a} + \tau \square) - \frac{\partial g}{\partial \square}(\square)}{\tau},$$

aby tento výraz reprezentoval poslední prvek Hessovy matice funkce $g(\vec{x})$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$.

❼ Kdy řekneme, že křivka $C \subset \mathbf{E}^r$ je hladká regulární?

❽ Kdy řekneme, že funkce $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je analytická v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$?

❾ Definujte pojem vnější míra vytvořená mírou $\mu_\sigma(X)$.