4.4.18 Poznámka

Všimněme si, že funkce $y_1(x) = x$ a $y_2(x) = \ln(x)$ jsou zcela zjevně lineárně nezávislé, přesto ale existuje bod $x_0 = \mathsf{e}$, v němž je příslušný wronskián nulový, tj.

$$W_{y_1,y_2}(\mathsf{e}) = \begin{vmatrix} x & \ln(x) \\ 1 & x^{-1} \end{vmatrix}(\mathsf{e}) = 1 - \ln(x)\big|_{x=\mathsf{e}} = 0.$$

Z předchozí věty tedy plyne, že obě funkce nemohou být na intervalu $\mathbf{R}^+$ řešením žádné lineární diferenciální rovnice druhého řádu $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$.

4.4.19 Komentář

Jednou z nejzásadnějších otázek celé teorie diferenciálních rovnic je otázka existence řešení každé lineární diferenciální rovnice tvaru $\widehat{L}(y(x)) = 0$.. Pro rozřešení této otázky je účelné reformulovat příslušnou úlohu do tvaru soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu.

4.4.20 Definice

Sadu n diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned}
y_1' &= \wp_{11}(x)\, y_1 + \wp_{12}(x)\, y_2 + \ldots + \wp_{1n}(x)\, y_n \\
y_2' &= \wp_{21}(x)\, y_1 + \wp_{22}(x)\, y_2 + \ldots + \wp_{2n}(x)\, y_n \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= \wp_{(n-1),1}(x)\, y_1 + \wp_{(n-1),2}(x)\, y_2 + \ldots + \wp_{(n-1),n}(x)\, y_n. \\
y_n' &= \wp_{n1}(x)\, y_1 + \wp_{n2}(x)\, y_2 + \ldots + \wp_{nn}(x)\, y_n,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

kde $\wp_{ij}(x)$ jsou spojitými funkcemi na otevřeném intervalu I, nazýváme *soustavou n diferenciálních rovnic prvního řádu*. Řešením soustavy (4.44) rozumíme $n$tici spojitě diferencovatelných funkcí $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \in C^1(I)$, které řeší soustavu (4.44). Cauchyovou úlohou pro soustavu diferenciálních rovnic pak rozumíme soustavu (4.44) zadanou společně s počátečními podmínkami

$$y_k(x_0) = \sigma_k \in \mathbf{R}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

4.4.21 Poznámka

Nejprve si uvědomme, že lineární diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ splyne po substituci

$$y_1(x) = y(x),\ y_2(x) = y'(x),\ y_3(x) = y''(x), \ldots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x),\ y_n'(x) = y^{(n)}(x)$$

se soustavou (4.44), pokud $\wp_{12}(x) = \wp_{23}(x) = \wp_{34}(x) = \ldots = \wp_{(n-1),n}(x) = 1$ a $\wp_{ij}(x) = 0$ pro $i \neq j-1$. Souběžně s tím se Cauchyovy podmínky $y^{(k)}(x_0) = d_k$ rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ transformují na Cauchyovy podmínky $y_k(x_0) = \sigma_k = d_{k-1}$ soustavy (4.44). Potvrdit existenci řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ tedy de facto znamená garantovat řešení každé soustavy tvaru (4.44). Na této úvaze je také založena základní věta teorie diferenciálních rovnic 4.4.24.

4.4.22 Věta – *existenční věta pro soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu*

Nechť pro všechny indexy $i, j \in \widehat{n}$ jsou funkce $\wp_{ij}(x)$ spojitými funkcemi na otevřeném intervalu I. Nechť $x_0 \in I$ a $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \mathbf{R}^n$. Pak soustava (4.44) má na I řešení $\vec{y}(x)$ vyhovující podmínce $\vec{y}(x_0) = \vec{\sigma}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- úloha nalézt řešení soustavy rovnic (4.44) s počáteční podmínkou $\vec{y}(x_0) = \vec{\sigma}$ v Cauchyově tvaru (viz definice 4.4.9) je ekvivalentní s úlohou nalézt vektor funkcí $\vec{y}(x)$ s definičním oborem I tak, aby

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} \wp_{1j}(t)\, y_j(t) \right) \mathrm{d}t + \sigma_1 \\
y_2(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} \wp_{2j}(t)\, y_j(t) \right) \mathrm{d}t + \sigma_2 \\
&\vdots \\
y_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} \wp_{nj}(t)\, y_j(t) \right) \mathrm{d}t + \sigma_n
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

- tuto úlohu řešíme tzv. *metodou postupných aproximací*, tj. konstruujeme posloupnost funkcí

$$\vec{y}^{(\ell)}(x) = \big(y_1^{(\ell)}(x), y_2^{(\ell)}(x), \ldots, y_n^{(\ell)}(x)\big)^{\mathsf{T}}$$

tak, že $\vec{y}^{(\ell)}(x) \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \vec{y}(x)$, kde $\vec{y}(x)$ je hledané řešení soustavy (4.45) na I

- takovou posloupnost definujeme rekurentně předpisem

$$\vec{y}^{(0)}(x) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)^{\mathsf{T}}, \qquad y_i^{(\ell)}(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \wp_{ij}(t) y_j^{(\ell-1)}(t)\, \mathrm{d}t + \sigma_i \tag{4.46}$$

- nyní dokážeme, že na každém uzavřeném intervalu $J \subset I$, pro nejž $x_0 \in J$, konverguje posloupnost $\big(\vec{y}^{(\ell)}(x)\big)_{\ell=0}^{\infty}$ stejnoměrně k funkci $\vec{y}(x)$, která úlohu (4.45) řeší
- označme délku intervalu J symbolem $\mathtt{L}$
- označme $\mathtt{Y} := \max\big\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, \ldots, |\sigma_n|\big\}$
- dále ze spojitosti funkcí $\wp_{ij}(x)$ na kompaktním intervalu J víme, že existuje $\mathtt{K} \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $i, j \in \widehat{n}$ a všechna $x \in J$ platí nerovnost $|\wp_{ij}(x)| \leqslant \mathtt{K}$
- ze vztahu (4.46) vyplývá, že pro každé $i \in \widehat{n}$ platí:

$$\big|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}(x)\big| = \big|y_i^{(1)}(x) - \sigma_i\big| \leqslant n\mathtt{KY}|x - x_0|$$

- analogicky pro každé $i \in \widehat{n}$ (jak lze dokázat matematickou indukcí) platí:

$$\big|y_i^{(\ell+1)}(x) - y_i^{(\ell)}(x)\big| \leqslant n\mathtt{Y}\frac{n^{\ell}\mathtt{K}^{\ell+1}|x - x_0|^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \leqslant \mathtt{Y}\frac{n^{\ell+1}\mathtt{K}^{\ell+1}\mathtt{L}^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \tag{4.47}$$

- pro $i \in \widehat{n}$ nyní označme

$$y_i(x) = \lim_{\ell\to\infty} y_i^{(\ell)}(x) = \lim_{\ell\to\infty}\left[y_i^{(0)}(x) + \sum_{k=0}^{\ell-1}\big(y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}(x)\big)\right] = \sigma_i + \sum_{k=0}^{\infty}\big(y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}(x)\big)$$

- uvedená limita skutečně existuje, neboť platí vztah (4.47), který garantuje, že konvergentní číselná řada

$$\mathtt{Y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{\ell+1}\mathtt{K}^{\ell+1}\mathtt{L}^{\ell+1}}{(\ell+1)!} = \mathtt{Y}\left(\mathsf{e}^{n\mathtt{KL}} - 1\right)$$

je majorantní řadou k řadě $\sum_{k=0}^{\infty}\big(y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}(x)\big)$

- podle Weierstrassova kritétia 2.2.14 navíc konverguje zkoumaná řada na J stejnoměrně
- tudíž i pravá strana ve vztahu (4.46) konverguje, a platí tedy (po záměně limity a integrálu))

$$y_i(x) = \int_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{n}\wp_{ij}(t)y_j(t)\,\mathrm{d}t + \sigma_i, \quad (i \in \widehat{n}),$$

což prokazuje fakt, že takto zkonstruovaný vektor $\vec{y}(x)$ řeší soustavu (4.45) na J

- protože každé $x \in I$ leží v některém uzavřeném intervalu $J \subset I$, je $\vec{y}(x)$ řešením soustavy (4.45) na celém I

4.4.23 Poznámka

Následující text se bude zabývat dvěma fundamentální otázkami celé teorie diferenciálních rovnic. A sice, kolik existuje lineárně nezávislých řešení dané rovnice a kolik rešení má Cauchyova úloha pro rovnici s nulovou pravou stranou.

4.4.24 Věta – *základní věta teorie diferenciálních rovnic*

Vektorový prostor všech řešení diferenciální rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$ řádu n má dimenzi n, tj. $\dim(\Omega_0) = n$.

Důkaz:

- podle existenční věty 4.4.22 lze ke každé $n$tici podmínek $y_k(x_0) = \sigma_k$ $(k \in \hat{n})$ nalézt řešení soustavy (4.44)
- to tedy značí, že po přeznačení (viz poznámka 4.4.21)

$$y_1(x) = y(x),\ y_2(x) = y'(x),\ y_3(x) = y''(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x),\ y_n'(x) = y^{(n)}(x),$$

  lze řešit každou Cauchyovu úlohu 4.4.9 s podmínkami $y^{(k)}(x_0) = d_k$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$
- formálně navíc: $\sigma_k = d_{k-1}$
- zvolme nyní n řešení Cauchyovy úlohy 4.4.9 takových, že první z nich má vektor počátečních podmínek (stanovených v bodě $x_0 \in I$) rovný $(1, 0, 0, \dots, 0)$, druhý rovný $(0, 1, 0, \dots, 0)$, třetí $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, atd.
- označme tato řešení $z_m(x)$, $m = 1, 2, \dots, n$ a ukažme, že jsou lineárně nezávislá
- protože Wronského determinant těchto funkcí vyčíslený v bodě $x = x_0$ má hodnotu jedna (neboť Wronského matice je jednotkovou maticí), jsou podle důsledku 4.4.16 funkce $z_m(x)$, kde $m = 1, \dots, n$, lineárně nezávislé
- zbývá ukázat, že přidáme-li do lineárně nezávislého souboru funkcí $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ další funkci $w(x)$, pro kterou také platí, že $\widehat{L}(w(x)) = 0$, pak je takto vzniklý soubor lineárně závislý
- pro funkci $w(x)$ označme $\beta_i = w^{(i)}(x_0)$ a ukažme, že $w(x)$ lze nakombinovat z funkcí souboru $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$
- hledejme tedy konstanty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ tak, že $\sum_{m=1}^{n} c_m z_m(x) = w(x)$
- protože odtud plyne, že $w^{(i)}(x) = \sum_{m=1}^{n} c_m z_m^{(i)}(x)$, lze celé řešení s výhodou (po dosazení $x = x_0$) převést do tvaru soustavy

$$\begin{pmatrix} z_1(x_0) & z_2(x_0) & \dots & z_{n-1}(x_0) & z_n(x_0) \\ z_1'(x_0) & z_2'(x_0) & \dots & z_{n-1}'(x_0) & z_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)}(x_0) & z_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_{n-1}^{(n-1)}(x_0) & z_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

  pro neznámé $c_1,\ c_2,\ c_3, \dots, c_n$
- její determinant je ale totožný s wronskiánem $W_{z_1, z_2, \dots, z_n}(x_0)$, o němž již víme, že není nulový
- proto má uvedená soustava řešení, a $w(x)$ je tedy skutečně lineární kombinací funkcí $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$
- uzavíráme proto, že $\dim(\Omega_0) = n$

4.4.25 Definice

Každá množina n lineárně nezávislých řešení $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$, jež podle věty 4.4.24 generuje bázi vektorového prostoru Ω_0 všech řešení rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$, se nazývá *fundamentálním systémem* řešení diferenciální rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$, resp. $\widehat{L}\big(y(x)\big) = q(x)$.