
Prázdná stránka

Prázdná stránka

PŘEDMLUVA

Toto skriptum je určeno především posluchačům druhého ročníku Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze pro studium některých partií matematické analýzy. Na rozdíl od klasického přístupu, kdy jsou vydávány samostatně teoretické učebnice a na ně navazující cvičebnice či sbírky příkladů, je předkládané skriptum integrovaným učebním textem. Čtenář v něm tedy nalezne nejen ucelenou teorii s definicemi nových pojmů, větami a jejich důkazy, ale také řešené příklady s aplikací prostudované látky a úlohy k samostatnému procvičování.

Obsah skriptu je rozdělen do sedmi studijních jednotek (kapitol), z nichž každá tvoří relativně samostatný tématický celek. V první kapitole je nejprve definována bodová konvergence posloupnosti funkcí a poté konvergence stejnoměrná. Vysloveno a dokázáno je dále supremální kritérium pro její vyšetření. Pojmu stejnoměrné konvergence je následně užito při vyslovení vět o záměnách limity a derivace, resp. limity a integrálu, resp. limity a limity v bodě pro obecnou funkční posloupnost. V kapitole druhé jsou pojmy bodové a stejnoměrné konvergence rozšířeny na řady funkcí. Formulována a dokázána jsou elementární kritéria pro vyšetřování jak bodové tak stejnoměrné konvergence funkčních řad. Diskutována je také otázka záměn sumy a derivace, resp. sumy a integrálu, resp. sumy a limity. Ve třetí kapitole je prezentována teorie Taylorových řad, tj. mocninných aproximací funkcí jedné proměnné. Sestaven je tzv. Taylorův vzorec, jenž vyúsťuje ve formulaci Taylorovy věty. Čtvrtá kapitola o obyčejných diferenciálních rovnicích definuje základní terminologii a klasifikaci diferenciálních rovnic a v jednotlivých oddílech se zabývá jejich řešením. Čtenáři se tak dostává návodů k řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu metodou integračního faktoru, k řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice, k metodě separace proměnných a k řešení homogenní či exaktní diferenciální rovnice (rovnice ve tvaru totálního diferenciálu). U rovnic vyšších řádů se čtenář kromě obecných poznatků o struktuře prostoru všech řešení rovnic bez pravé strany seznámí s problematikou snižování řádu diferenciálních rovnic, s metodou variace konstant či s řešením rovnice s konstantními koeficienty a Eulerovy diferenciální rovnice. V páté kapitole jsou definovány pojmy bilineární a kvadratické formy. U těchto forem je prostřednictvím vět vystopována celá řada univerzálních znaků a jejich existence je poté užita při studiu kvadratických ploch, speciálně při jejich úplné klasifikaci v prostorech $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$. Předposlední studijní jednotka zavádí pojmy obecného skalární součinu, normy a metriky. Ty dále poslouží k obecné definici pojmu okolí a následně k typologii množin a jejich bodů. Čtenář se tu obeznámí s termíny otevřená, uzavřená, omezená, souvislá, kompaktní, konečná či spočetná množina v obecném metrickém prostoru. Diskutována je též abstraktní varianta konvergence spolu s pojmem Cauchyovskosti. Vyvrcholením je definice Hilbertova prostoru, výchozího bodu dalších partií matematické analýzy. Závěrečná kapitola se věnuje teorii Fourierovských rozvojų v obecných Hilbertových prostorech. V poslední části skriptu jsou pak čtenářům nabídnuty výsledky cvičení ze všech šesti studijních jednotek, soupis citované literatury a rejstřík pojmů.

autor

Toto skriptum věnuji RNDr. Janu Hejzmanovi, CSc. za jeho přednášky z matematické analýzy, které byly z části předlohou tohoto textu.

Obsah

1	Posloupnosti funkcí	9
1.1	Bodová konvergence posloupností funkcí	9
1.2	Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí	13
1.3	Vlastnosti posloupností funkcí	17
1.4	Cvičení	26
2	Řady funkcí	31
2.1	Bodová konvergence řad funkcí	31
2.2	Stejnoměrná konvergence řad funkcí	44
2.3	Mocninné řady	55
2.4	Cvičení	61
3	Taylorův rozvoj funkce jedné proměnné	69
3.1	Taylorův vzorec	69
3.2	Teorie Taylorových řad	71
3.3	Cvičení	86
4	Obyčejné diferenciální rovnice	93
4.1	Základní pojmy	93
4.2	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	96
4.3	Nelineární diferenciální rovnice prvního řádu	99
4.4	Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů	109
4.5	Diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	123
4.6	Cvičení	134
5	Kvadratické formy a kvadratické plochy	143
5.1	Bilineární a kvadratické formy	143
5.2	Kvadratické plochy	154
5.3	Cvičení	168
6	Metrické, normované a Hilbertovy prostory	175
6.1	Výchozí nerovnosti	175
6.2	Pre-Hilbertovy prostory	178
6.3	Skalární součin na prostorech komplexních funkcí reálné proměnné	182
6.4	Normované prostory	184
6.5	Ekvivalence norem	190
6.6	Metrické prostory	192
6.7	Konvergence v metrických prostorech	197
6.8	Hilbertovy prostory	200
6.9	Klasifikace množin a jejich bodů	202
6.10	Ortogonální polynomy	211
6.11	Cvičení	216

7	Fourierovy řady v Hilbertových prostorech	223
7.1	Separabilní Hilbertovy prostory	223
7.2	Hilbertovy prostory kvadraticky integrabilních funkcí	224
7.3	Ortonormální systémy prvků Hilbertova prostoru	226
7.4	Fourierova řada a její vlastnosti	227
7.5	Úplnost ortogonálního systému	230
8	Výsledky cvičení	233

Značení

Symbol	Význam
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbf{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbf{Z}$	množina celých čísel
$\mathbf{R}$	množina reálných čísel
$\mathbf{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbf{R}^r$	množina uspořádaných r -tic reálných čísel
$\mathbf{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbf{R}^-$	množina záporných reálných čísel
$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{X} \cup \{0\}$, kde $\mathbf{X}$ je libovolná číselná množina
$\mathbf{R}^*$	$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbf{E}^r$	r -rozměrný euklidovský prostor
$\hat{n}$	$\{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$
$\underline{n}$	$\{m \in \mathbf{N}_0 : m \leq n\}$
A, B, C	množiny
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$	matice
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	vektorové prostory
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$	operátory
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	soustavy množin
$C^n(G)$	třída všech funkcí, jež mají na množině G spojitě derivace až do řádu n
$C^\infty(G)$	třída všech funkcí, jež mají na množině G spojitě derivace všech řádů
$f'(x), f''(x), f'''(x)$	první, druhá, třetí derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$f^{(n)}(x)$	n -tá derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\dot{f}(t), \ddot{f}(t)$	první, druhá derivace funkce $f(t)$ podle proměnné t
$\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}$	n -tá derivace funkce $f(\varepsilon)$ podle proměnné ε
$d^n f_a(h)$	n -tý totální diferenciál funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $a \in \mathbf{R}$
$d^n f_{\vec{a}}(\vec{h})$	n -tý totální diferenciál funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$
$\mathcal{U}(x), \mathcal{U}_\varepsilon(x)$	okolí bodu x
$\mathcal{U}^*(x), \mathcal{U}_\varepsilon^*(x)$	redukované okolí bodu x
$\cup, \cap$	sjednocení a průnik množin
$\subset, \subsetneq$	podmnožina a vlastní podmnožina množiny
$\text{Dom}(f), \text{Ran}(f)$	definiční obor, resp. obor hodnot funkce $f(x)$
$f(A)$	obraz množiny A při zobrazení $f(x)$
$f^{-1}(A)$	vzor množiny A při zobrazení $f(x)$
$f^{-1}(a)$	vzor jednoprvkové množiny $\{a\}$ při zobrazení $f(x)$
$\approx$	přibližně
$\propto$	úměrně
$\sim$	ekvivalence množin či funkcí

Symbol	Význam
$A^\circ, \overline{A}$	vnitřek, resp. uzávěr množiny A
$\text{bd}(A)$	hranice množiny A
$\text{der}(A)$	derivace množiny A
$\vec{b}^\top = (b_1, b_2, \dots, b_r)$	řádkový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)^\top$	sloupcový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b}_k$	k -tý vektor posloupnosti $(\vec{b}_n)_{n=1}^\infty$
$b_{k\ell}$	ℓ -tá složka vektoru $\vec{b}_k$
$\mathbb{A}_{ij}$	prvek matice $\mathbb{A}$ v i -tém řádku a j -tém sloupci
$\mathbb{A}_{\bullet j}$	j -tý sloupec matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}_{i\bullet}$	i -tý řádek matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\top$	matice transponovaná k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^*$	komplexně sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\# = (\mathbb{A}^*)^\top$	hermitovsky sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{I}$	jednotková (Croneckerova) matice
δ_{ij}	prvek Croneckerovy matice
$\det(\mathbb{A})$	determinant matice $\mathbb{A}$
$\text{h}(\mathbb{A})$	hodnost matice $\mathbb{A}$
$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_r)$	diagonální matice s prvky $x_1, x_2, \dots, x_r$ na hlavní diagonále
$\mathcal{E}_r = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$	standardní báze v $\mathbf{R}^r$, tj. $e_{ij} = \delta_{ij}$
a^*	komplexně sdružené číslo k číslu a
$\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$	dolní, resp. horní celá část čísla x
$\mathcal{O}, \mathbf{R}$	symbolsy vymezené pro obor, resp. poloměr konvergence
$\mathbf{C}$	symbol vymezený pro libovolnou reálnou konstantu (zejména integrační)
$x \mapsto f(x \beta)$	funkce proměnné x s parametrem β
$\text{sgn}(x)$	funkce signum
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r]_\lambda$	lineární obal souboru vektorů
$\deg(\wp)$	stupeň polynomu $\wp$
$q(\vec{x}) \triangleright 0$	pozitivní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \supseteq 0$	pozitivní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \triangleleft 0$	negativní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \leq 0$	negativní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \triangleleft \triangleright 0$	indefinitnost kvadratické formy
$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{\mathbf{M}} f(\vec{x})$	bodová konvergence funkční posloupnosti na množině M
$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{\mathbf{M}} \rightrightarrows f(\vec{x})$	stejněměrná konvergence funkční posloupnosti na množině M
$f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$	konvergence podle normy
$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{norm} f_n(\vec{x})$	limita vzhledem ke konvergenci podle normy
$\ \vec{x}\ $	norma vektoru $\vec{x}$
$\langle \vec{x} \vec{y} \rangle$	skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$

Kapitola 1

Posloupnosti funkcí

V první kapitole těchto skript vyložíme základní poznatky o posloupnostech, jejímiž členy jsou funkce jedné proměnné. Cílem kapitoly je nejprve vybudovat pojem stejnoměrné konvergence, tj. jakési nadstavby pojmu konvergence, zavedeného v teorii o číselných posloupnostech. Dále se pokusíme rozhodnout, zda-li se vlastností jednotlivých členů funkčních posloupností přenášejí na příslušnou limitní funkci. Zodpovíme tedy otázky, zda funkce, jež je limitou dané posloupnosti funkcí, které jsou spojité, resp. diferencovatelné, resp. integrovatelné, je také spojitá, resp. diferencovatelná, resp. integrovatelná.

1.1 Bodová konvergence posloupností funkcí

Nejprve zavedeme základní pojmy a shrneme elementární poznatky o tzv. bodové konvergenci, která odpovídá klasické konvergenci číselných posloupností.

1.1.1 Úmluva

V celé kapitole jsou symboly m, n, n_0 vyhrazeny pro přirozená čísla.

1.1.2 Definice

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbf{R}$. Potom každé zobrazení množiny $\mathbf{N}$ do množiny všech funkcí definovaných na M nazýváme *posloupností funkcí* na M . Je-li číslu $n \in \mathbf{N}$ tímto způsobem přiřazena funkce $f_n(x)$, zapisujeme funkční posloupnost

$$f_1(x), f_2(x), \dots \quad \text{nebo} \quad (f_n(x))_{n=1}^{\infty}. \quad (1.1)$$

Přirozené číslo n přitom nazýváme *indexem* a funkci $f_n(x)$ n -tým členem posloupnosti (1.1).

1.1.3 Poznámka

Jenom pro přesnost budeme v této poznámce precizovat pojem "konvergentní posloupnost." Posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ nazýváme *konvergentní* právě tehdy, má-li reálnou limitu. Má-li však tato posloupnost limitu nevlastní (tedy ∞ nebo $-\infty$), nenazýváme ji konvergentní, ale řadíme ji mezi posloupnosti *divergentní*. Podobně je zaveden pojem konvergentní funkční posloupnosti v definici 1.1.4.

1.1.4 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje v bodě* $c \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$, tj. existuje-li $\gamma \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí nerovnost $|f_n(c) - \gamma| < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje (bodově) na množině* $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N .

1.1.5 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{R}$. Nechť pro každé $c \in N$, kde $N \subset M$, posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Označme $f(c)$ hodnotu limity posloupnosti $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$. Tímto způsobem je na

množině N definována funkce $x \mapsto f(x)$, kterou nazýváme *limitou posloupnosti funkcí* (1.1) (nebo zkráceně *limitní funkcí*) a značíme

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Oborem konvergence $\mathcal{O}$ posloupnosti (1.1) nazýváme množinu všech bodů $c \in M$, ve kterých tato posloupnost konverguje.

1.1.6 Poznámka

Definičním oborem limitní funkce $f(x)$ je tedy obor konvergence $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}$.

1.1.7 Příklad

Uvažme funkční posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{nx}{4(n+1)} + \frac{3}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}.$$

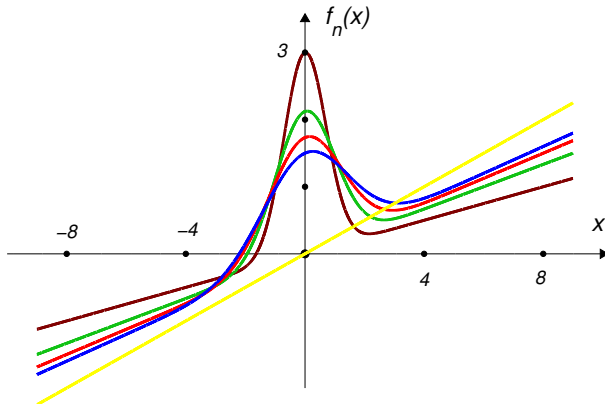
Definičním oborem všech funkcí $f_n(x)$ je množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel. Na ní má tedy smysl hledat limitní funkci. Snadno lze určit, že limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nx}{4(n+1)} + \frac{3}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{4(n+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}} = \frac{x}{4}$$

existuje pro každé $x \in \mathbf{R}$, a tedy že

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{x}{4}$$

a $\mathcal{O} = \text{Dom}(f) = \mathbf{R}$. Průběhy prvních několika členů vyšetřované funkční posloupnosti vykresluje na přiloženém obrázku. Žlutou barvou je vykreslena limitní funkce.



Obrázek 1.1
Graf funkční posloupnosti $\left(\frac{nx}{4(n+1)} + \frac{3}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}} \right)_{n=1}^{\infty}$.

1.1.8 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Posloupnost funkcí (1.1) konverguje v bodě $c \in M$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(c) - f_m(c)| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Důkaz:

• První implikace:

- vyjdeme z předpokladu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = \gamma \in \mathbf{R}$
- pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m, n \geq n_0$, platí

$$|f_n(c) - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f_m(c) - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$- \text{ a tedy } |f_n(c) - f_m(c)| \leq |f_n(c) - \gamma| + |f_m(c) - \gamma| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

• Druhá implikace:

– nechť tedy číselná posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ splňuje vztah (1.2)

– pak pro $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechny indexy $m, n \geq n_0$ platí nerovnost

$$|f_n(c) - f_m(c)| < 1$$

– položíme-li $m = n_0$, je pro všechna $n \geq n_0$ splněna nerovnost $f_{n_0}(c) - 1 < f_n(c) < f_{n_0}(c) + 1$

– z toho ale vyplývá, že posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ je omezená

– předpokládejme, že $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ diverguje (tedy, že nemá vlastní limitu)

– za tohoto předpokladu tudíž platí $-\infty < \liminf f_n(c) < \limsup f_n(c) < +\infty$

– proto existují čísla α a β tak, že $\liminf f_n(c) < \alpha < \beta < \limsup f_n(c)$

– z jednoduché úvahy lze vyvodit, že existuje nekonečně mnoho členů (označme je $f_\ell(c)$) číselné posloupnosti $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ a nekonečně mnoho členů $f_k(c)$ takových, že

$$f_\ell(c) > \beta \quad \wedge \quad f_k(c) < \alpha \tag{1.3}$$

– položíme $\varepsilon := \beta - \alpha$

– pro toto $\varepsilon > 0$ existuje podle předpokladu (1.2) hraniční index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro $\ell, k \geq n_0$ je

$$|f_\ell(c) - f_k(c)| < \varepsilon \tag{1.4}$$

– jelikož jsou ale splněny nerovnosti (1.3), platí pro nekonečně mnoho indexů také nerovnost

$$|f_\ell(c) - f_k(c)| > \beta - \alpha = \varepsilon,$$

což završuje spor

– posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ tudíž konverguje

• tím je důkaz zkompletován

1.1.9 Poznámka

Obecně vzato, nemusí splnění Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ implikovat existenci limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c)$. Např. posloupnost

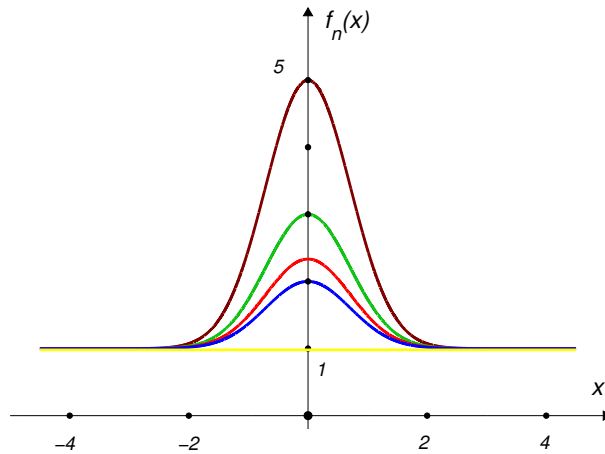
$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$$

citovanou podmínku splňuje (jedná se totiž o posloupnost konvergentní v $\mathbf{R}$), ale budeme-li hledat její limitu v množině $\mathbf{Q}$ racionálních čísel, nenalezneme ji. Posloupnost je tudíž divergentní v $\mathbf{Q}$, přestože Bolzanovu-Cauchyovu podmínku splňuje. Naše definice posloupnosti funkcí 1.1.2 je totiž vyslovena pro reálné funkce. Jelikož množina $\mathbf{R}$ je tzv. úplná, je v $\mathbf{R}$ každá posloupnost splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku zároveň konvergentní. Pro plné pochopení doporučujeme čtenáři, aby tuto problematiku důkladně nastudoval v šesté kapitole těchto skript.

1.1.10 Příklad

První otázkou, jež si budeme klást, je, zda limitou posloupnosti funkcí spojitých na jisté množině $M \subset \mathbf{R}$ je opět funkce spojitá na M . Uvažme proto posloupnost funkcí

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} := \left(1 + 4 \frac{e^{-x^2}}{n} \right)_{n=1}^{\infty}.$$



Obrázek 1.2
Graf funkční posloupnosti $\left(1 + 4 \frac{e^{-x^2}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

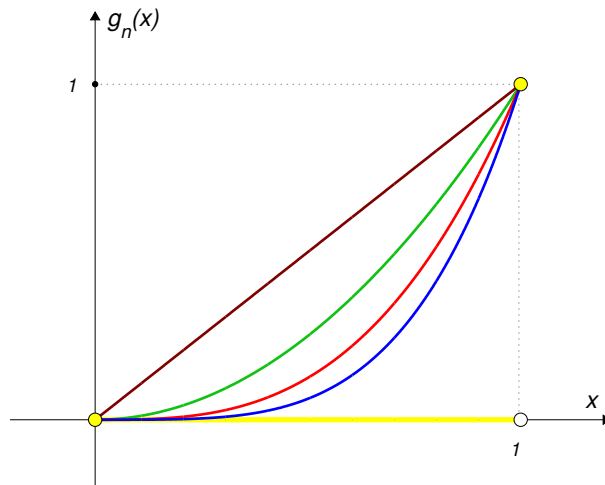
Ta zcela zjevně konverguje na celém $\mathbf{R}$ k funkci $f(x) = 1$, kde $\text{Dom}(f) = \mathcal{O} = \mathbf{R}$. Všechny funkce $f_n(x)$ jsou na $\mathbf{R}$ spojité a spojitá je také funkce $f(x)$.

1.1.11 Příklad

Uvažme ovšem druhý příklad. Tentokrát budeme studovat funkční posloupnost

$$(g_n(x))_{n=1}^{\infty} := (x^n)_{n=1}^{\infty},$$

kde x je vybíráno pouze z množiny $M = \langle 0, 1 \rangle$.



Obrázek 1.3
Graf funkční posloupnosti $(x^n)_{n=1}^{\infty}$.

Tato posloupnost konverguje na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ k funkci

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Zatímco jsou všechny funkce $g_n(x)$ na $\langle 0, 1 \rangle$ spojité, limitní funkce $g(x)$ nikoliv. Z toho je patrné, že samotná bodová konvergence k "přenosu" spojitosti z jednotlivých členů posloupnosti na limitní funkci nestačí. Bude tedy nutné k pojmu bodové konvergence hledat silnější alternativu.

1.1.12 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že (1.1) je *rostoucí* na M , jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) < f_{n+1}(x)$. Řekneme, že (1.1) je *klesající* na M , jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) > f_{n+1}(x)$. Řekneme, že (1.1) je *nerostoucí* na M , jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna neostrá nerovnost $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Řekneme, že (1.1) je *neklesající* na M , jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Posloupnost, která je buď neklesající nebo nerostoucí, nazýváme *monotónní* posloupností.

1.1.13 Věta

Nechť je dána neklesající posloupnost funkcí (1.1) definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}$. Je-li tato shora omezená, tj. existuje-li $K > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí $f_n(x) < K$, pak na množině M existuje limitní funkce $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ a její hodnota je v každém bodě $x \in M$ rovna supremu $\sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x)$, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x).$$

Důkaz:

- zvolme libovolně $c \in M$ a položme $s = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(c)$, což lze díky omezenosti shora
- zřejmě je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ splněno $f_n(c) \leq s$
- pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje v posloupnosti $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ alespoň jeden člen větší než $s - \varepsilon$
- to značí, že existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $f_{n_0}(c) > s - \varepsilon$
- pro libovolné $n \geq n_0$ je (díky faktu, že $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ je neklesající) splněno $f_n(c) \geq f_{n_0}(c)$
- nerovnost $s - \varepsilon < f_n(c) < s + \varepsilon$ je tedy splněna pro všechny indexy $n \geq n_0$
- odtud již plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = s$, což bylo dokázat

1.2 Stejněoměrná konvergence posloupností funkcí

Ve druhé části první kapitoly zavedeme pojem stejnoměrné konvergence funkční posloupnosti. Jak ukážeme později, bude vlastnost stejnoměrné konvergence zásadní při "přenosu" spojitosti, diferencovatelnosti či integrovatelnosti ze členů posloupnosti na její limitní funkci.

1.2.1 Definice

Nechť (1.1) je posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že tato posloupnost *stejněoměrně konverguje* na M k funkci $f(x)$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí nerovnost $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

1.2.2 Poznámka

Bodovou konvergenci značíme obvykle symbolem $f_n(x) \rightarrow f(x)$, stejnoměrnou pak $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí je dobře patrný z kvantifikátorového zápisu definic obou pojmů:

- bodová konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall x \in M) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

- stejnoměrná konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0 \wedge x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Stejněoměrná konvergence tedy požaduje existenci "univerzálního" n_0 , které plní svoji roli pro všechna $x \in M$.

1.2.3 Lemma

Jestliže posloupnost funkcí (1.1) stejnoměrně konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ k funkci $f(x)$, potom tato posloupnost konverguje na M k funkci $f(x)$ také bodově.

1.2.4 Lemma

Nechť (1.1) je konvergentní posloupnost konstantních funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{R}$. Potom tato posloupnost konverguje na M stejnoměrně.

1.2.5 Poznámka

Podle předešlého lemmatu tedy pro číselné posloupnosti (které lze chápat jako funkční posloupnosti konstantních funkcí) pojmy bodové a stejnoměrné konvergence splývají.

1.2.6 Příklady

Vraťme se nyní k příkladům 1.1.10 a 1.1.11. Ukážeme, že posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ z příkladu 1.1.10 na rozdíl od $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ z příkladu 1.1.11 konverguje ke své limitní funkci stejnoměrně. K libovolnému $\varepsilon > 0$ v prvním případě stačí totiž zvolit $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že $n_0 > 4/\varepsilon$. Tedy např.

$$n_0 := \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Potom totiž pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x \in \mathbf{R}$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| 1 + 4\frac{e^{-x^2}}{n} - 1 \right| = \left| 4\frac{e^{-x^2}}{n} \right| \leq \frac{4}{n} \leq \frac{4}{n_0} < \varepsilon.$$

Naproti tomu posloupnost $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje na $\langle 0, 1 \rangle$ ke své limitní funkci stejnoměrně. Kdyby tomu totiž tak bylo, pak by např. k číslu $\varepsilon = 1/2$ muselo existovat n_0 takové, že by pro všechna $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platilo

$$|x^n - g(x)| < \frac{1}{2}.$$

Speciálně pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ by tedy musela platit nerovnost $2x^n < 1$ pro všechna $n \geq n_0$. Dosadíme-li do této nerovnosti $n = n_0$, dostáváme celkem: Kdyby posloupnost $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergovala k funkci $g(x)$ stejnoměrně, muselo by existovat číslo n_0 takové, že

$$\forall x \in \langle 0, 1 \rangle : \quad x < 2^{-\frac{1}{n_0}}.$$

To však možné není, neboť pro všechna přirozená n_0 je číslo $2^{-\frac{1}{n_0}}$ menší než jedna.

1.2.7 Lemma

Nechť posloupnost funkcí (1.1) konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na množině M . Nechť je zvolena množina $N \subset \mathbf{R}$ tak, že $\emptyset \neq N \subset M$. Pak posloupnost funkcí (1.1) konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně také na množině N .

1.2.8 Poznámka

Předešlá vlastnost bývá nazývána *dědičností* stejnoměrné konvergence. Implikuje kromě jiného fakt, že nekonverguje-li jistá posloupnost na vybrané podmnožině množiny M , pak nemůže stejnoměrně konvergovat ani na množině M .

1.2.9 Lemma

Nechť posloupnost funkcí (1.1) konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na množinách M a N . Pak konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně také na sjednocení $M \cup N$.

1.2.10 Věta

Nechť posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na množině M . Nechť posloupnost funkcí $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $g(x)$ stejnoměrně na množině M . Pak posloupnost funkcí

$$(f_n(x) + g_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

konverguje k funkci $f(x) + g(x)$ stejnoměrně na množině M .

Důkaz:

- vyjdeme z obou předpokladů:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0 \wedge x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists m_0 \in \mathbf{N}) : \quad m \in \mathbf{N} \wedge m \geq m_0 \wedge x \in M \Rightarrow |g_m(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- položíme $\ell_0 := \max\{n_0, m_0\}$ a vezmeme libovolné $\varepsilon > 0$
- pak pro všechna $\ell \in \mathbf{N}$ taková, že $\ell \geq \ell_0$, a všechna $x \in M$ platí

$$|(f_\ell(x) + g_\ell(x)) - (f(x) + g(x))| \leq |f_\ell(x) - f(x)| + |g_\ell(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- to dokazuje jednak stejnoměrnou konvergenci a jednak fakt, že limitní funkcí součtové posloupnosti je skutečně součet limitních funkcí

1.2.11 Věta – *supremální kritérium*

Nechť $f(x)$ a $f_n(x)$ pro všechna n jsou funkce definované na množině M . Označme

$$\sigma_n := \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$$

pro každé n . Pak posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci $f(x)$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.

Důkaz:

- pro všechna $x \in M$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ zřejmě platí nerovnost $|f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n$
- První implikace:
 - předpokládáme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$
 - z definice limity číselné posloupnosti $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $|\sigma_n| = \sigma_n < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$
 - to značí (jak vyplývá z definice suprema), že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x \in M$ platí také $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, a tedy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M
- Druhá implikace:
 - předpokládáme, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M
 - zvolme libovolné $\varepsilon > 0$, k němuž jistě existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x \in M$ platí nerovnost $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$
 - odtud a z vlastností suprema plyne, že pro $n \geq n_0$ platí $\sigma_n \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$

1.2.12 Příklad

Znovu se navratme k příkladům 1.1.10 a 1.1.11. Pokusme se nyní užít předchozí věty k demonstraci faktu, že posloupnost funkcí

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} := \left(1 + 4 \frac{e^{-x^2}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

stejněměrně konverguje na $\mathbf{R}$ k limitní funkci $f(x) = 1$. Jasně je, že

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| 1 + 4 \frac{e^{-x^2}}{n} - 1 \right| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| 4 \frac{e^{-x^2}}{n} \right| = \frac{4}{n},$$

potažmo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, a tedy $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině všech reálných čísel stejněměrně. Naproti tomu pro posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty} = (x^n)_{n=1}^{\infty}$ je $\sigma_n := \sup_{x \in (0,1)} |x^n| = 1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 1$. Daná posloupnost tedy na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ stejněměrně nekonverguje. A podle poznámky 1.2.8 tedy nemůže konvergovat ani na $\langle 0, 1 \rangle$. Tím je demonstrována užitečnost věty 1.2.11.

1.2.13 Příklad

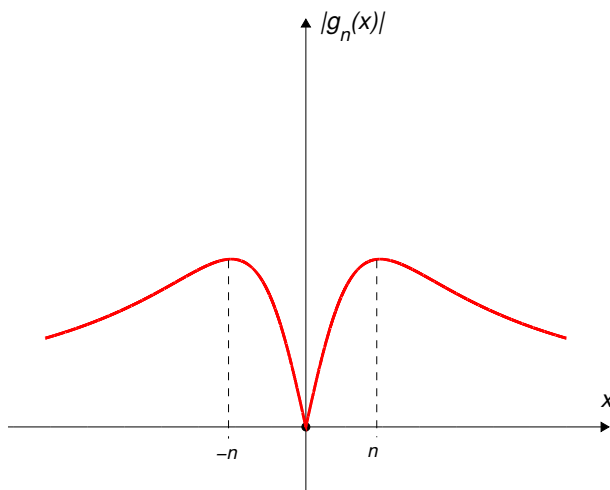
Vyšetřujeme stejněměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x^2 + 2x + n^2}{x^2 + n^2} \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Nejprve snadno vypočteme limitní funkci

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + n^2}{x^2 + n^2} = 1, \quad \text{Dom}(f) = \mathcal{O} = \mathbf{R}.$$

Označme nyní $g_n(x) := f_n(x) - 1 = \frac{2x}{x^2 + n^2}$. Jelikož chceme pro vyšetření stejněměrné konvergence užít supremálního kritéria 1.2.11, bude třeba určit hodnotu suprema $\sigma_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} |g_n(x)|$. K jeho zjištění užijeme znalost průběhu funkce $g_n(x)$. Z hodnoty první derivace $g'_n(x) = 2(n^2 - x^2)/(x^2 + n^2)^2$ určíme stacionární body $x = \pm n$ podezřelé z lokálního extrému. Jelikož je funkce $g_n(x)$ spojitá všude na $\mathbf{R}$, $g_n(0) = 0$ a navíc $\lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = 0$, je zřejmé, že bod $x = n$ je bodem lokálního (a tedy globálního) maxima funkce $g_n(x)$ na $\mathbf{R}$. Podobně: bod $x = -n$ je bodem globálního minima funkce $g_n(x)$. Graf funkce $|g_n(x)|$ je vyobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 1.4
Graf funkce $x \mapsto \left| \frac{2x}{x^2 + n^2} \right|$.

Odtud tedy

$$\sigma_n = g_n(n) = \frac{2n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{n},$$

potažmo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$. Proto tedy zadaná posloupnost konverguje na $\mathbf{R}$ ke své limitní funkci $f(x) = 1$ stejněměrně.

1.2.14 Příklad

Rozhodněme, zda konverguje posloupnost funkcí

$$\left(\frac{x}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

zadaná na $\mathbf{R}$ ke své limitní funkci stejnoměrně. Limitou této posloupnosti je nulová funkce (na celém $\mathbf{R}$), a tudíž není příliš složité zkoumat supremum

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{x}{n^2} - 0 \right| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{|x|}{n^2}$$

ze supremálního kritéria. Snadno zjistíme, že $\sigma_n = \infty$. Jelikož limitou posloupnosti $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ není nula, nekongruje zadaná posloupnost ke své limitní funkci stejnoměrně. Budeme-li ovšem vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci stejné posloupnosti na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, situace se změní. Za daných předpokladů totiž

$$\sigma_n = \sup_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} \frac{|x|}{n^2} = \frac{\max\{|\alpha|, |\beta|\}}{n^2}.$$

Tedy ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, a zadaná posloupnost proto konverguje na $\langle \alpha, \beta \rangle$ stejnoměrně. Posloupnost $\left(\frac{x}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ tedy konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu (dokonce i na každém otevřeném intervalu, který je omezený), ale na celém $\mathbf{R}$ stejnoměrně nekongruje.

1.2.15 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Posloupnost funkcí (1.1) je stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad m, n \geq n_0 \wedge x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (1.7)$$

Důkaz:

• První implikace:

- necht' $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na M k jisté funkci $f(x)$
- pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m, n \geq n_0$, a pro všechna $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- a tedy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

• Druhá implikace:

- necht' posloupnost funkcí splňuje vztah (1.7)
- podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro číselné posloupnosti 1.1.8 posloupnost (1.1) konverguje bodově k jisté funkci na množině M (označme ji $f(x)$)
- chceme dokázat $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M
- zvolme $\varepsilon > 0$ a k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ vyberme podle (1.7) n_0 tak, aby pro všechna $m, n \geq n_0$ platilo

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro libovolné pevně zvolené $n \geq n_0$ a pro m rostoucí nade všechny meze pak odsud dostaneme nerovnost $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ platnou pro každé $x \in M$

• tím je důkaz zkompletován

1.3 Vlastnosti posloupností funkcí

V této sekci budeme demonstrovat, jak významná je stejnoměrná konvergence při zachovávání vlastností členů funkčních posloupností. Ukážeme například, že pro stejnoměrně konvergentní funkční posloupnosti bude možno libovolně zaměňovat pořadí vybrané matematické operace (limitování $\lim_{x \rightarrow c}$, derivování $\frac{d}{dx}$ či integrování $\int_a^b dx$) a limitování $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

1.3.1 Věta

Nechť posloupnost (1.1) funkcí spojitých na množině M stejnoměrně konverguje na M k funkci $f(x)$. Potom je funkce $f(x)$ na M spojitá.

Důkaz:

- abychom dokázali spojitost funkce $f(x)$ na M , musíme dokázat spojitost pro každé $c \in M$
- zvolme libovolné $\varepsilon > 0$
- ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ plyne, že k číslu ε existuje index n_0 tak, že

$$(\forall n \in \mathbf{N})(n \geq n_0) (\forall x \in M) : \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.8)$$

- ze spojitosti funkce $f_{n_0}(x)$ v bodě c plyne, že k číslu ε existuje $\mathcal{U}(c)$ takové, že

$$(\forall x \in \mathcal{U}(c) \cap M) : \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.9)$$

- zvolíme-li index n_0 tak, aby platilo (1.8), a okolí $\mathcal{U}(c)$ tak, aby platilo (1.9), dostáváme celkem, že k číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{U}(c)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{U}(c) \cap M$ platí

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + |f_{n_0}(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- tím je důkaz dokončen

1.3.2 Věta

Nechť je pevně zvoleno $c \in \mathbf{R}$. Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c, c + \delta)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow c+} f_n(x) = b_n$. Pak existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow c+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (1.10)$$

Důkaz:

- První část (existence limit):
 - podle předpokladu konverguje posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně na intervalu $(c, c + \delta)$
 - tedy pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje podle věty 1.2.15 $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq n_0$ a všechna $x \in (c, c + \delta)$ platí nerovnost

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.11)$$

- dále využijeme předpokladu existence vlastních limit funkcí $f_n(x)$ a $f_m(x)$ v bodě $x = c$ zprava
- pro libovolně zvolená $m, n \geq n_0$ tudíž existují (z definice pravé limity funkce) čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{R}^+$ taková, že

$$c < x < c + \delta_1 \Rightarrow |f_m(x) - b_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad c < x < c + \delta_2 \Rightarrow |f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (1.12)$$

neboť $\lim_{x \rightarrow c+} f_n(x) = b_n$ a $\lim_{x \rightarrow c+} f_m(x) = b_m$

- chceme dokázat, že pro $m, n \geq n_0$ je $|b_m - b_n| < \varepsilon$
- zvolíme-li nyní x tak, že $c < x < c + \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, je (viz nerovnosti (1.11) a (1.12))

$$|b_m - b_n| \leq |b_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $|b_m - b_n| < \varepsilon$, a podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky 1.1.8 pro limity číselných posloupností tudíž existuje vlastní limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$
- označme tuto limitu jako b , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

- Druhá část (rovnost limit):

- zbývá dokázat, že $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = b$

- jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, existuje pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ index $\ell_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro jakékoli $n \geq \ell_0$ platí

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- jelikož na intervalu $(c, c + \delta)$ platí $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro jakýkoli index $n \geq n_0$ a pro jakýkoli bod $x \in (c, c + \delta)$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- položíme-li $m_0 := \max\{\ell_0, n_0\}$, pak pro každé $m \geq m_0$ existuje (díky existenci limity funkce $f_m(x)$ v bodě $x = c$ zprava) číslo $\delta_3 > 0$ tak, že pro každé $x \in (c, c + \delta_3)$ je

$$|f_m(x) - b_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- položíme-li $\Delta := \min\{\delta, \delta_3\}$, plyne z trojúhelníkové nerovnosti, že pro jakékoli $x \in (c, c + \Delta)$ platí

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - b_m| + |b_m - b| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- skutečně tedy $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = b$

1.3.3 Věta

Nechť je pevně zvoleno $c \in \mathbb{R}$. Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c - \delta, c)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow c-} f_n(x) = b_n$. Pak existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow c-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (1.13)$$

Důkaz:

- důkaz vyplývá z předešlé věty po dosazení $g_n(y) = f_n(-y)$

- konvergují-li totiž funkce $f_n(x)$ stejnoměrně na intervalu $(c - \delta, c)$, značí to, že funkce $g_n(y)$ konvergují stejnoměrně na $(d, d + \delta)$, kde $d = -c$

- dále

$$\lim_{x \rightarrow c-} f_n(x) = \left| \begin{array}{l} y = -x \\ d = -c \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow d+} g_n(y) = b_n$$

- pak podle (1.10) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c-} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow d+} g_n(y) = \lim_{y \rightarrow d+} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = \lim_{x \rightarrow c-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

- to kompletuje důkaz

1.3.4 Příklad

Nerovnost

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1-} x^n \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

a rovnost

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0+} x^n = \lim_{x \rightarrow 0+} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

plně korespondují s faktem, že posloupnost funkcí $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na jakémkoli intervalu $(0, \varepsilon)$ ($\varepsilon < 1$), ale nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu $(\mu, 1)$.

1.3.5 Důsledek

Nechť je pevně zvoleno $c \in \mathbf{R}$. Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = b_n$. Pak existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

1.3.6 Poznámka

Tvrzení předešlých vět 1.3.2 a 1.3.3 lze zobecnit také na konvergenci k plus, resp. minus nekonečnu. To bude naplní následujících dvou vět.

1.3.7 Věta

Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $K > 0$ na intervalu (K, ∞) k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = b_n$. Pak existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- První část (existence limit):

- podle předpokladu konverguje posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně na intervalu (K, ∞)
- tedy pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje podle věty 1.2.15 index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq n_0$ a všechna $x \in (K, \infty)$ platí nerovnost

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.14)$$

- dále využijeme druhého předpokladu, a sice existence vlastních limit funkcí $f_n(x)$ a $f_m(x)$ pro x rostoucí nade všechny meze
- pro libovolně zvolená $m, n \geq n_0$ totiž existují (z definice limity funkcí $f_n(x)$ a $f_m(x)$ pro x jdoucí k plus nekonečnu) čísla $K_1, K_2 \in \mathbf{R}^+$ taková, že

$$x > K_1 \Rightarrow |f_m(x) - b_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x > K_2 \Rightarrow |f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (1.15)$$

neboť $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = b_n$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f_m(x) = b_m$

- chceme dokázat, že pro $m, n \geq n_0$ je $|b_m - b_n| < \varepsilon$
- zvolíme-li nyní x tak, že $x > \max\{K, K_1, K_2\}$, platí (jak je patrné z nerovností (1.14) a (1.15))

$$|b_m - b_n| \leq |b_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $|b_m - b_n| < \varepsilon$, a podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky 1.1.8 pro limity číselných posloupností tudíž existuje vlastní limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$
- označme tuto limitu jako b , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

- Druhá část (rovnost limit):

- zbývá dokázat, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$
- jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, existuje pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ index $\ell_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli $n \geq \ell_0$ platí

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- jelikož na intervalu (K, ∞) platí $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro jakýkoli index $n \geq n_0$ a pro jakýkoli bod $x \in (K, \infty)$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- položíme-li $m_0 := \max\{\ell_0, n_0\}$, pak pro každé $m \geq m_0$ existuje (díky existenci limity funkce $f_m(x)$ v plus nekonečnu) číslo $K_3 > 0$ tak, že pro každé $x \in (K_3, \infty)$ je

$$|f_m(x) - b_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- položíme-li $\tilde{K} := \max\{K, K_3\}$, vidíme, že pro každé $x \in (\tilde{K}, \infty)$ platí

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - b_m| + |b_m - b| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- skutečně tedy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

1.3.8 Věta

Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $K < 0$ na intervalu $(-\infty, K)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = b_n$. Pak existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- důkaz vyplývá z předešlé věty po dosazení $g_n(y) = f_n(-y)$
- konvergují-li funkce $f_n(x)$ stejnoměrně na $(-\infty, K)$, značí to, že funkce $g_n(y)$ konvergují stejnoměrně na (L, ∞) , kde $L = -K > 0$
- dále $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = |y = -x| = \lim_{y \rightarrow \infty} g_n(y) = b_n$
- pak podle předešlé věty platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} g_n(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

1.3.9 Věta

Nechť je dána posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť tato posloupnost stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle a, b \rangle$ k funkci $f(x)$. Potom platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (1.16)$$

Důkaz:

- funkce $f_1(x), f_2(x), \dots$ jsou na $\langle a, b \rangle$ spojitě a proto všechny integrály $\int_a^b f_n(x) dx$ konvergují
- podle věty 1.3.1 je však spojitá také funkce $f(x)$ a levá strana rovnosti (1.16) tedy rovněž existuje
- označíme-li

$$\gamma_n := \int_a^b f_n(x) dx,$$

je naším úkolem prokázat, že posloupnost $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k hodnotě $\gamma := \int_a^b f(x) dx$, tj. že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n \geq n_0$ je splněna nerovnost

$$|\gamma_n - \gamma| = \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

- z definice stejnoměrné konvergence 1.2.1 plyne, že k pevně zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0) (\forall x \in \langle a, b \rangle) : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

- odtud a z vět o integrálu funkce jedné proměnné plyne

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) \, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \leq$$

$$\leq (b-a) \cdot \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

což podle definice limity dokazuje platnost vztahu (1.16)

1.3.10 Poznámka

Obsah předešlé věty lze vyjádřit také jednoduchou větou: "Stejněoměrně konvergentní posloupnost spojitých funkcí lze na uzavřeném intervalu integrovat člen po členu," tedy

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

1.3.11 Příklad

Vypočtěme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^3 \frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2} \, dx$$

při použití záměny pořadí integrace a limity. Aby bylo možno toto pořadí zaměnit, musí posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2}$ podle věty 1.3.9 stejněoměrně konvergovat na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^2$, budeme zkoumat supremum

$$\sigma_n = \sup_{x \in \langle 0, 3 \rangle} \left| \frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2} - x^2 \right| = \sup_{x \in \langle 0, 3 \rangle} \frac{x^4}{n^2 + x^2} =: \sup_{x \in \langle 0, 3 \rangle} g_n(x).$$

Jelikož je ale funkce $g_n(x)$ všude na $\mathbf{R}$ rostoucí, jak lze snadno zjistit analýzou první derivace, nastává její extrém v bodě $x = 3$. Proto $\sigma_n = g_n(3) = \frac{81}{n^2 + 9}$. Jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, konverguje zkoumaná posloupnost na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$ stejněoměrně. A proto tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^3 \frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2} \, dx = \int_0^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2} \, dx = \int_0^3 x^2 \, dx = 9.$$

1.3.12 Příklad

Rovnost výrazů $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \, dx = \int_0^1 0 \, dx = 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ je ale platná navzdory tomu, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ nekongruje na $\langle 0, 1 \rangle$ ke své limitní funkci stejněoměrně.

1.3.13 Věta

Nechť je dána posloupnost (1.1) funkcí diferencovatelných na otevřeném intervalu (a, b) taková, že pro alespoň jedno $c \in (a, b)$ číselná posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^\infty$ konverguje. Nechť navíc posloupnost $(f'_n(x))_{n=1}^\infty$ stejněoměrně konverguje na (a, b) . Potom také posloupnost (1.1) stejněoměrně konverguje na (a, b) . Navíc, označíme-li její limitu $f(x)$, je tato diferencovatelná na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí rovnost

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Důkaz:

- Předpoklady věty:

- zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně
- jelikož posloupnost $(f'_n(x))_{n=1}^\infty$ stejněoměrně konverguje na (a, b) , existuje podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky 1.2.15 zcela jistě $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro jakékoliv indexy $m, n \geq n_0$ a všechna $x \in (a, b)$ je splněna nerovnost

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (1.17)$$

- díky bodové konvergenci číselné posloupnosti $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ navíc také existuje (podle 1.1.8) index $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro libovolné $m, n \geq \tilde{n}_0$ platí

$$|f_m(c) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.18)$$

- označme $\ell_0 := \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$
- pak jsou pro libovolné indexy $m, n \geq \ell_0$ splněny jak podmínka (1.17), tak také (1.18)

• První část důkazu:

- zaveďme funkci $g(x)$ definičním předpisem $g(x) := f_m(x) - f_n(x)$
- podle Lagrangeovy věty o přírůstku 1.3.15 existuje mezi body c a $x \in (a, b)$ číslo ξ takové, že

$$g(x) - g(c) = g'(\xi)(x - c)$$

- toto tvrzení platí dokonce i tehdy, je-li za x zvoleno samo c , tj. pro $x = c$
- za předešlých předpokladů platí

$$f_m(x) - f_n(x) - f_m(c) + f_n(c) = (x - c)(f'_m(\xi) - f'_n(\xi))$$

- odtud ale

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(c) - f_n(c)| + |x - c| \cdot |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |x - c| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + |b - a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

- to ale neznačí nic jiného, než že posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na (a, b)

• Druhá část důkazu:

- zbývá ještě dokázat, že v libovolném bodě $x_0 \in (a, b)$ existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ a že její hodnota je rovna právě limitě $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0)$
- zvolme tedy libovolně $x_0 \in (a, b)$ a také pevné $\delta > 0$ takové, že $a + \delta < x_0 < b - \delta$
- položme

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h}, \quad \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.19)$$

- obě funkce jsou tedy definovány na intervalu $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$
- snadno lze ukázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \varphi(h)$$

- definujme ještě pomocnou funkci $\tau(h) := f_m(h) - f_n(h)$
- z Lagrangeovy věty o přírůstku 1.3.15 vyplývá, že mezi body x_0 a $x_0 + h$ jistě existuje číslo ξ tak, že platí

$$\tau(x_0 + h) - \tau(x_0) = h \cdot \tau'(\xi)$$

- to jest

$$\frac{f_m(x_0 + h) - f_m(x_0)}{h} - \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} = f'_m(\xi) - f'_n(\xi),$$

respektive

$$\varphi_m(h) - \varphi_n(h) = f'_m(\xi) - f'_n(\xi)$$

- z předpokladu (1.17) tudíž vyplývá nerovnost

$$|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| \leq |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| < \tilde{\varepsilon},$$

což prokazuje, že posloupnost $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na množině $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ k funkci $\varphi(x)$

- ze vztahu (1.19) navíc triviálně vyplývá, že

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \varphi_n(h) = \lim_{h \rightarrow 0-} \varphi_n(h) = f'_n(x_0)$$

- tím jsou naplněny předpoklady vět 1.3.2 a 1.3.3, a sice klademe-li v obou větách δ , $\varphi_n(h)$, $\varphi(h)$, $f'_n(x_0)$ a 0 za symboly δ , $f_n(x)$, $f(x)$, b_n a c
- z vět 1.3.2 a 1.3.3 pak tedy vyplývají rovnosti

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \varphi(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0), \quad \lim_{h \rightarrow 0-} \varphi(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0)$$

- vzhledem k definičnímu předpisu (1.19) funkce $\varphi(h)$ odtud plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

1.3.14 Poznámka

Znění věty 1.3.13 lze vyjádřit také jednoduchou větou: "Posloupnost diferencovatelných funkcí, jež konverguje alespoň v jednom bodě, lze na otevřeném intervalu derivovat člen po členu, pokud je na něm posloupnost sestavená z derivací původních funkcí stejnoměrně konvergentní." Pak $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

1.3.15 Poznámka – Lagrangeova věta o přírůstku

Nechť je dána funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, jež je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) vlastní či nevlastní derivaci $f'(x)$. Potom v intervalu (a, b) existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ tak, že platí rovnost $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

1.3.16 Příklad

Pokusme se nyní vyšetřit stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{1}{n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na intervalu $I = \langle 0, \infty \rangle$. Limitní funkcí je funkce $f(x) = 2\sqrt{x}$. Dále

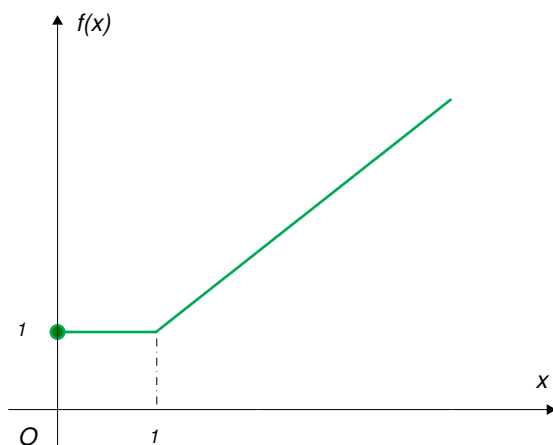
$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbf{R}^+} \left| \frac{1}{n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)} - 2\sqrt{x} \right| = \sup_{x \in \mathbf{R}^+} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right).$$

Funkce $g_n(x) := \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$ je ale na celém $\mathbf{R}^+$ zjevně klesající, a proto $\sigma_n = g_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, konverguje vyšetřovaná posloupnost k funkci $f(x) = 2\sqrt{x}$ stejnoměrně.

1.3.17 Příklad

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(\sqrt[n]{1+x^n})_{n=1}^{\infty}$ na množině $A = \langle 0, \infty \rangle$. Tentokrát má limitní funkce tvar

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & \dots & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ x & \dots & x > 1. \end{cases}$$



Obrázek 1.5
Graf limitní funkce $f(x)$.

Nyní vyšetříme stejnoměrnou konvergenci. Vidíme, že

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sup_{x \in \mathbb{R}_0^+} |\sqrt[n]{1+x^n} - f(x)| = \max \left\{ \sup_{x \in (0,1)} |\sqrt[n]{1+x^n} - 1|, \sup_{x > 1} |\sqrt[n]{1+x^n} - x| \right\} =: \\ &=: \max \left\{ \sup_{x \in (0,1)} |g_n(x)|, \sup_{x > 1} |h_n(x)| \right\} =: \max\{\alpha_n, \beta_n\}.\end{aligned}$$

Nejprve budeme hledat extrém funkce $g_n(x)$ na množině $(0, 1)$, kde platí

$$g'_n(x) = x^{n-1} (1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} > 0.$$

Funkce je tudíž na zmíněné množině spojitá a rostoucí, proto $\alpha_n = \sup_{x \in (0,1)} |g_n(x)| = g(1) = \sqrt[n]{2} - 1$. Dále vyšetříme extrém funkce $h_n(x)$ na množině $(1, \infty)$, kde platí

$$h'_n(x) = x^{n-1} (1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} - 1 < 0,$$

neboť pro $x > 1$ jsou splněny ekvivalentní nerovnosti

$$x^{n-1} (1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}} < 1 + \frac{1}{x^n}.$$

Funkce $h_n(x)$ je tudíž na množině $(1, \infty)$ spojitá a klesající, tedy

$$\beta_n = \sup_{x > 1} |h_n(x)| = h(1) = \sqrt[n]{2} - 1.$$

Odsud $\sigma_n = \sqrt[n]{2} - 1$. A protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, konverguje zadaná posloupnost na množině A ke své limitní funkci $f(x)$ stejnoměrně.

1.3.18 Příklad

Pro účely dalších výpočtů stanovíme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Posloupnost $\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná, monotónní a omezená, tudíž má limitu. Označme ji a . Jak je zřejmé, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{2(2n+1)!!} = \frac{a}{2}.$$

Matematickou indukcí snadno ukážeme, že platí nerovnost

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Pak tedy

$$b := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq a.$$

Navíc ještě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Odtud $b \cdot a = 0$, a proto $b = 0$. Matematická indukce také vede ke vztahu

$$\frac{1}{2} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}.$$

Odsud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{2(2n+1)!!} = \frac{a}{2} \leq b = 0.$$

Uzavíráme tedy, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 0.$$

1.3.19 Příklad

Nechť $b \in (0, 1)$ je pevně zvolený koeficient. Pokusme se dokázat, že bodová limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)}{n!}$$

je nulová. Její hodnotu lze zužít např. při hledání Maclaurinových řad funkcí tvaru $f(x) = (1 + ax^n)^q$. Jak je zřejmé, platí rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln\left(\frac{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)}{n!}\right)}.$$

Máme tedy prokázat, že

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)}{n!} \right) = -\infty.$$

Snadno ale nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{b+i-1}{i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(\frac{b+i-1}{i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1-b}{i} \right) = \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \ln(1-x) \leq -x \end{array} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b-1}{i} = (b-1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Jelikož ale číselná řada $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverguje k plus nekonečnu, vyplývá odtud, že $\ell = -\infty$, neboť $b-1 < 0$ díky skutečnosti, že $b \in (0, 1)$. Pak snadno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)}{n!} = 0.$$

1.4 Cvičení

Cvičení 1.1

Nalezněte limitní funkci posloupnosti

$$\left(\left(1 - \frac{|x|}{n} \right)^n \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Cvičení 1.2

Nalezněte limitní funkci posloupnosti

$$\left(\left(\frac{n^2 + 5nx + 2}{n^2} \right)^n \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Cvičení 1.3

Dokažte tvrzení lemmatu 1.2.7.

Cvičení 1.4

Dokažte lemma 1.2.9.

Cvičení 1.5

Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{n^3}{x^{n+1}},$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.6

Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!},$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.7

Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}},$$

a určete její limitní funkci. Na základě znalosti limitní funkce rozhodněte o stejnoměrné konvergenci zadané posloupnosti.

Cvičení 1.8

Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{n} \quad (x > 0),$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.9

Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}},$$

a určete její limitní funkci. Na základě znalosti limitní funkce rozhodněte o stejnoměrné konvergenci zadané posloupnosti.

Cvičení 1.10

Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \sqrt[n^2]{n^2 x^{n(n+1)}},$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.11

Výšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\sqrt[n]{1 + e^{-nx}} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině všech nezáporných reálných čísel.

Cvičení 1.12

Výšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\arctg \left(\frac{\sqrt{n} x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} \right) \right)_{n=1}^{\infty}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.13

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n},$$

konverguje stejnoměrně na množině a) $\langle -1, 1 \rangle$, resp. b) $\langle -2, 2 \rangle$.

Cvičení 1.14

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $(x^n - x^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na množině $\langle 0, 1 \rangle$.

Cvičení 1.15

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $(x^n - x^{2n})_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na množině $\langle 0, 1 \rangle$.

Cvičení 1.16

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x},$$

konverguje stejnoměrně na množině a) $\langle 0, 2 \rangle$, b) $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 1.17

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}},$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.18

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right),$$

na množinách a) $\mathbf{R}^+$, b) $(1, \infty)$.

Cvičení 1.19

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n},$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.20

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(x \arctg(nx))_{n=1}^{\infty}$ na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.21

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \left(\frac{x}{n} \right),$$

konverguje stejnoměrně na množině a) $(0, 5)$, resp. b) $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 1.22

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí

$$\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

konverguje stejnoměrně na množině $\langle 0, \infty \rangle$. Poznámka: Při vyšetřování extrému funkce (pro supremální kritérium) je nutno se obejít bez explicitní znalosti stacionárního bodu.

Cvičení 1.23

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí $(\sqrt[n]{x^{-n} + x^n})_{n=1}^{\infty}$ na množině $(0, \infty)$.

Cvičení 1.24

Ukažte, že posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg}(x^n),$$

konverguje na $\mathbf{R}$ stejnoměrně, ale

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'(1) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

Cvičení 1.25

Ukažte, že posloupnost funkcí $(nx e^{-nx^2})_{n=1}^{\infty}$ konverguje na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, avšak

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Cvičení 1.26

Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2 x^4} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^4} dx.$$

Cvičení 1.27

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2}{(x+n)(x+n+1)} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty \rangle$.

Cvičení 1.28

Rozhodněte, zda je splněna rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{12} \frac{n \ln(n) x^2}{1 + n^3 x^4} dx = \int_0^{12} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n) x^2}{1 + n^3 x^4} dx.$$

Cvičení 1.29

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině a) $\mathbf{R}$, resp. b) $M = \langle 0, c \rangle$, kde $c > 0$.

Cvičení 1.30

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x^2}{(1 + x^2)^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.31

Rozhodněte, zda funkční posloupnost

$$\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^n}{2n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Cvičení 1.32

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2 + 3x^2}{n^3 + x^3} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty \rangle$.

Cvičení 1.33

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(2nx^2e^{-nx} + 3xe^{-nx})_{n=1}^{\infty}$ na množině $\langle 0, \infty \rangle$.

Cvičení 1.34

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, 1 \rangle$.

Cvičení 1.35

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{n^2}{n^2 + 5nx + 2} \right)^n$$

na množině $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 1.36

Rozhodněte, zda je pro posloupnost funkcí

$$\left(\frac{\ln(x^4 + 4n^2x^2 + 4n^4)}{\ln^2(n)} \right)_{n=2}^{\infty}$$

splněna rovnost

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Cvičení 1.37

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\left(3\frac{x}{n^2} + 2\frac{x^2}{n^3} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty \rangle$.

Cvičení 1.38

Vypočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^3 \frac{1 + 9nx - 4n^2x^2 + 4n^3x^3}{2n - n^2x + n^3x^2} dx.$$

Cvičení 1.39

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{1}{n} \left(\frac{x}{n} - 1 \right)^2 e^{-\frac{x}{n}} + 2 \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty \rangle$.

Kapitola 2

Řady funkcí

Zavedeme-li do předpisu číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ proměnnou veličinu, podobně jako jsme to učinili pro posloupnosti v první kapitole těchto skript, obdržíme tzv. řadu funkcí. Budeme-li zkoumat některé vlastnosti funkčních řad, zjistíme, že samotná bodová konvergence je pro garanci jistých vlastností příliš slabá, a že bude tudíž nutno (v analogii k funkčním posloupnostem) zavést silnější pojem konvergence, tj. konvergenci stejnoměrnou.

2.1 Bodová konvergence řad funkcí

V prvním oddíle druhé kapitoly budeme definovat základní pojmy pro teorii funkčních řad a vyslovíme některá kritéria pro jejich bodovou konvergenci.

2.1.1 Úmluva

V celé kapitole jsou symboly m, n, n_0 vyhrazeny pro přirozená čísla.

2.1.2 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{R}$. Potom nekonečný součet

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

nazýváme *řadou funkcí* na M a značíme symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (2.1)$$

2.1.3 Definice

Nechť je dána funkční řada (2.1) definovaná na množině M . Funkci $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $x \in M$ budeme nazývat *n -tým částečným součtem* řady (2.1) a posloupnost $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ pak *posloupností částečných součtů* dané řady.

2.1.4 Definice

Nechť je dána funkční řada (2.1) definovaná na množině M . Nechť $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je příslušná posloupnost částečných součtů. Řekneme, že řada (2.1) *konverguje v bodě* $c \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $(s_n(c))_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že řada (2.1) *konverguje (bodově)* na množině $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N . Vlastní limitu

$$s(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$$

posloupnosti částečných součtů pak nazýváme *součtem řady* (2.1) a zapisujeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (2.2)$$

Definiční obor $\text{Dom}(s)$, tj. množinu všech $c \in M$, pro něž posloupnost $(s_n(c))_{n=1}^{\infty}$ konverguje, budeme dále nazývat *oborem konvergence řady* (2.1) a značit symbolem $\mathcal{O}$.

2.1.5 Poznámka

Obor konvergence řady (2.1) je tedy množina všech $c \in M$, pro něž číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje. Připomínáme, že součet $s(x)$ konvergentní funkční řady je na oboru konvergence $\mathcal{O}$ (díky poznámce 1.1.3) reálnou funkcí reálné proměnné. Kromě případu konvergentních řad rozeznáváme také řady divergující k plus nebo minus nekonečnu, popř. řady oscilující (tj. takové, jejichž součty neexistují ani jako vlastní ani jako nevlastní).

2.1.6 Poznámka

Díky symbolickému zápisu (2.2) lze na symbol $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nahlížet dvojím způsobem: jednak jako na řadu funkcí a jednak jako na její součet. Z kontextu bude ale vždy zřejmé, o který význam se jedná.

2.1.7 Příklad

Uvažme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n, \quad (2.3)$$

kde $a \in \mathbf{R}$ je její jediný parametr. Takovou řadu bývá zvykem nazývat *geometrickou řadou s kvocientem x* . Pro její n -tý částečný součet $s_n(x) = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^{n-1}$ platí, jak se lze lehce přesvědčit, jednoduchá rovnice

$$\frac{s_n(x) - a}{x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^{n-2} = s_{n-1}(x) = s_n(x) - ax^{n-1},$$

odkud pak vyplývá vztah

$$s_n(x) = a \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

platný pro případ, kdy kvocient x není jednotkový. Pokud $x = 1$, pak lze ale triviálně nahlédnout, že $s_n(x)$ je konstantní funkcí, a to $s_n(x) = na$. Jelikož je součet řady definován jako limita posloupnosti částečných součtů, je součtem řady (2.3) funkce

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}.$$

To ovšem pouze pro případ, kdy $|x| < 1$. Tedy součtem geometrické řady s kvocientem z intervalu $(-1, 1)$ je podíl prvního jejího členu a rozdílu $1 - x$. Pro $|x| \geq 1$ řada diverguje, kromě triviálního případu, kdy $a = 0$.

2.1.8 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Řada funkcí (2.1) zadaná na množině M konverguje v bodě $c \in M$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad m > n \geq n_0 \Rightarrow |f_{n+1}(c) + f_{n+2}(c) + f_{n+3}(c) + \dots + f_m(c)| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Důkaz:

- označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ n -tý částečný součet řady (2.1)
- z předpokladů a z definice bodové konvergence víme, že posloupnost $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje v bodě $c \in M$
- pak jsou ale naplněny předpoklady věty 1.1.8, tudíž výrok

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |s_m(c) - s_n(c)| < \varepsilon$$

je ekvivalentní bodové konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$

- odtud ale dostáváme, že platí

$$|s_m(c) - s_n(c)| = \left| \sum_{k=1}^m f_k(c) - \sum_{k=1}^n f_k(c) \right| = |f_{n+1}(c) + f_{n+2}(c) + f_{n+3}(c) + \dots + f_m(c)| < \varepsilon,$$

což finalizuje důkaz

2.1.9 Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině M součet $s(x)$. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině N součet $t(x)$. Nechť $M \cap N \neq \emptyset$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x))$ konverguje na $M \cap N$ a jejím součtem na $M \cap N$ je funkce $s(x) + t(x)$.

Důkaz:

- označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$
- označíme-li $r_n(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x))$, platí rovnost $r_n(x) = s_n(x) + t_n(x)$
- jelikož je bodová konvergence řad dědičnou vlastností (viz cvičení 2.1), konvergují obě řady na průniku $M \cap N$
- z předpokladů dokazované věty vyplývá, že $s_n(x) \rightarrow s(x)$ na $M \cap N$ a podobně $t_n(x) \rightarrow t(x)$ na $M \cap N$
- tudíž pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ a jakékoliv $c \in M \cap N$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ platí

$$|s_n(c) - s(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro ono zmíněné $\varepsilon > 0$ existuje ale také $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $m \geq m_0$ platí

$$|t_m(c) - t(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- položíme-li $\ell_0 := \max\{n_0, m_0\}$, je pro libovolné $\ell \geq \ell_0$ splněna nerovnost

$$|r_\ell(c) - (s(c) + t(c))| \leq |s_\ell(c) - s(c)| + |t_\ell(c) - t(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což implikuje jednak fakt, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x))$ konverguje v každém bodě $c \in M \cap N$ (tedy bodově na $M \cap N$) a jednak skutečnost, že příslušným součtem je právě funkce $r(x) = s(x) + t(x)$, kde $\text{Dom}(r) = M \cap N$

- tím je důkaz proveden

2.1.10 Lemma

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině M součet $s(x)$. Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ konverguje na M také řada $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot f_n(x)$ a jejím součtem na množině M je funkce $c \cdot s(x)$.

2.1.11 Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině M součet $s(x)$. Nechť je dále dána funkce $g(x) : M \rightarrow \mathbf{R}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x)$ konverguje na M a jejím součtem na množině M je funkce $g(x) \cdot s(x)$.

Důkaz:

- zvolme $c \in M$ libovolně a označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- z předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, je patrné, že pro $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|s_n(c) - s(c)| < \frac{\varepsilon}{|g(c)|} \quad (g(c) \neq 0)$$

- označme $t_n(x) = \sum_{k=1}^n g(x) f_k(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x)$
- zjevně platí $t_n(x) = g(x) s_n(x)$, odkud pak

$$|t_n(c) - g(c) \cdot s(c)| = |g(c) \cdot s_n(c) - g(c) \cdot s(c)| = |g(c)| \cdot |s_n(c) - s(c)| < |g(c)| \cdot \frac{\varepsilon}{|g(c)|} = \varepsilon$$

- to znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x)$ konverguje v bodě $c \in M$ k číslu $g(c) \cdot s(c)$
- a protože bylo c vybráno libovolně, je nyní prokázána platnost dokazovaného tvrzení
- poznámka: v případě, že $g(c) = 0$, platí dokazované tvrzení triviálně

2.1.12 Věta

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$ buďto obě konvergují nebo obě divergují k $+\infty$ nebo obě divergují k $-\infty$ nebo obě oscilují. Označíme-li $s(x)$ součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t(x)$ součet řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$, pak platí

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + t(x)$$

za předpokladu, že obě řady konvergují.

Důkaz:

- označme $s_n(x) = \sum_{\ell=1}^n f_{\ell}(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- řadu $f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+3}(x) + \dots$ lze jednoduše přepsat do tvaru

$$0 + 0 + \dots + 0 + f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+3}(x) + \dots$$

- označme $t_n(x)$ n -tý částečný součet této řady
- pak pro $n > k$ jistě platí rovnost $t_n(x) = f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+3}(x) + \dots + f_n(x)$, potažmo

$$s_n(x) = (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)) + t_n(x)$$

- po limitním přechodu $n \rightarrow \infty$ pak snadno získáváme všechna dokazovaná tvrzení

2.1.13 Poznámka

Zaměníme-li ve funkční řadě konečně mnoho jejích členů (funkcí), chování řady se tedy podle předešlé věty nemění.

2.1.14 Věta

Nechť je na množině M zadána konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, jejímž součtem na M je funkce $s(x)$. Nechť je dále na M zadána konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, mající na M součet $t(x)$. Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in M$ platí

$$f_n(x) \leq g_n(x).$$

Pak pro všechna $x \in M$ platí nerovnost

$$s(x) \leq t(x). \quad (2.5)$$

Důkaz:

- označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$
- z předpokladů věty vyplývá, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in M$ platí $s_n(x) \leq t_n(x)$
- po limitním přechodu $n \rightarrow \infty$ pak snadno získáváme tvrzení tvaru (2.5)

2.1.15 Věta – nutná podmínka bodové konvergence

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní řada zadaná na množině M . Pak funkční posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M k nulové funkci.

Důkaz:

- položme $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ a $s_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$
- z předpokladů věty víme, že limita $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ existuje a navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}(x) = s(x),$$

kde $s(x)$ je součet uvažované řady

- jelikož ale $f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$ pro každé $x \in M$, vyplývá z limitního přechodu rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}(x) = s(x) - s(x) = 0$$

2.1.16 Poznámka

Nutnou podmínku bodové konvergence funkčních řad lze zapsat úspornou implikací (jedostrannou) tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{M}{=} s(x) \Rightarrow f_n(x) \stackrel{M}{\rightarrow} 0.$$

Nutnou podmínku je možno s výhodou použít zejména při vyvracení konvergence funkčních řad. Na potvrzování konvergence řad však věta 2.1.15 bohužel nedostačuje.

2.1.17 Definice

Nechť je definována funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zadaná na M . Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je *řadou s nezápornými členy*, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in M$ platí nerovnost $f_n(x) \geq 0$.

2.1.18 Věta

Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť pro jakékoliv $c \in M$ je číselná posloupnost jejich částečných součtů shora omezená. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentní na M .

Důkaz:

- jedná se o bezprostřední důsledek věty 1.1.13

2.1.19 Lemma

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že je pro každý index $n \geq k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) \leq g_n(x)$. Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konvergentní, je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2.1.20 Důsledek

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že je pro každý index $n \geq k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) \leq g_n(x)$. Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergentní, je divergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

2.1.21 Věta

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že je pro každý index $n \geq k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leq \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}. \quad (2.6)$$

Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konvergentní, je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Důkaz:

- z podmínky (2.6) mimo jiné vyplývá, že žádná z funkcí $f_n(x)$ ani $g_n(x)$ pro $n \geq k$ nenabývá na M nulové hodnoty
- z nerovnosti (2.6) vyplývá: pro $n \geq k$ a $x \in M$ platí

$$\frac{f_n(x)}{f_k(x)} = \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} \cdot \frac{f_{n-1}(x)}{f_{n-2}(x)} \cdots \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \leq \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} \cdot \frac{g_{n-1}(x)}{g_{n-2}(x)} \cdots \frac{g_{k+1}(x)}{g_k(x)} = \frac{g_n(x)}{g_k(x)}$$

- to značí, že pro $n \geq k$ platí

$$f_n(x) \leq \frac{f_k(x)}{g_k(x)} g_n(x)$$

- označme $\gamma(x) = \frac{f_k(x)}{g_k(x)}$
- konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, pak podle věty 2.1.11 konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x) \cdot g_n(x)$
- jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x) \cdot g_n(x)$ je na M konvergentní funkční řadou nezáporných členů, plyne z věty 2.1.19, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rovněž konverguje

2.1.22 Důsledek

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že je pro každý index $n \geq k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost (2.6). Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergentní, je divergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

2.1.23 Definice

Nechť jsou dány funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ definované na množině M . Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g_n(x)$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ nazýváme řadou *majorantní* k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2.1.24 Věta – srovnávací kritérium

Nechť je funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na množině M . Pak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ na M , pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ na množině M rovněž konvergují.

Důkaz:

- z definice majorantní řady mimo jiné vyplývá, že žádná z funkcí $g_n(x)$ pro $n \geq k$ nenabývá na M záporné hodnoty
- z předpokladů věty a z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky vyplývá, že pro jakékoliv $c \in M$ a pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m > n \geq n_0$ platí

$$g_{n+1}(c) + g_{n+2}(c) + g_{n+3}(c) + \dots + g_m(c) < \varepsilon$$

- odtud ale

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(c) + f_{n+2}(c) + f_{n+3}(c) + \dots + f_m(c)| &\leq |f_{n+1}(c)| + |f_{n+2}(c)| + |f_{n+3}(c)| + \dots + |f_m(c)| \leq \\ &\leq g_{n+1}(c) + g_{n+2}(c) + g_{n+3}(c) + \dots + g_m(c) < \varepsilon \end{aligned}$$

- podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergují v každém bodě $c \in M$

2.1.25 Důsledek

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ na množině M , pak také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M konverguje.

2.1.26 Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje *absolutně* na M , pokud na M konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje *relativně* nebo *neabsolutně* na M , pokud na M konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ je na M divergentní.

2.1.27 Věta – d'Alembertovo podílové kritérium

Nechť je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zadaná na množině M . Nechť pro každé $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $f_n(x) \neq 0$. Jestliže pro vybrané $c \in M$ platí nerovnost

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} \right| < 1,$$

pak $c \in \mathcal{O}$. Je-li naopak $\ell > 1$, pak $c \notin \mathcal{O}$.

Důkaz:

- vezměme libovolné $c \in M$ a předpokládejme, že $\ell < 1$
- zvolíme-li s takové, že $\ell < s < 1$, pak jistě existuje $m_0 \geq n_0$ takové, že pro všechna $n > m_0$ platí

$$\left| \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} \right| \leq s = \frac{s^{n+1}}{s^n}$$

- jelikož $s < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} s^n$ konvergentní, a podle věty 2.1.21 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, tj. $c \in \mathcal{O}$
- nechť naopak $\ell > 1$
- pak jistě existuje $m_0 \geq n_0$ takové, že pro všechna $n > m_0$ platí $|f_{n+1}(c)| \geq |f_n(c)|$, tj. $|f_n(c)|$ je rostoucí posloupností (od indexu n_0), proto je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ divergentní, čili $c \notin \mathcal{O}$

2.1.28 Věta – Cauchyovo odmocninové kritérium

Nechť je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zadaná na množině M . Pak všechna $c \in M$, pro něž platí nerovnost

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(c)|} < 1,$$

patří do oboru konvergence $\mathcal{O}$ zadané řady. Každé $c \in M$, pro které $\ell > 1$, do oboru konvergence nepatří.

Důkaz:

- vezměme libovolné $c \in M$
- platí-li, že $\ell < 1$, lze jistě volit s takové, že $\ell < s < 1$
- z definice limity existuje jistě $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{|f_n(c)|} \leq s$, tj. $|f_n(c)| \leq s^n$
- jelikož je ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} s^n$ jistě konvergentní (neboť $|s| < 1$), je podle srovnávacího kritéria konvergentní jak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- je-li naopak $\ell > 1$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{|f_n(c)|} \geq 1$, což značí, že $|f_n(c)| \geq 1$
- tudíž $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \neq 0$, což odporuje nutné podmínce bodové konvergence 2.1.15
- proto v tomto druhém případě platí, že $c \notin \mathcal{O}$

2.1.29 Věta – integrální kritérium

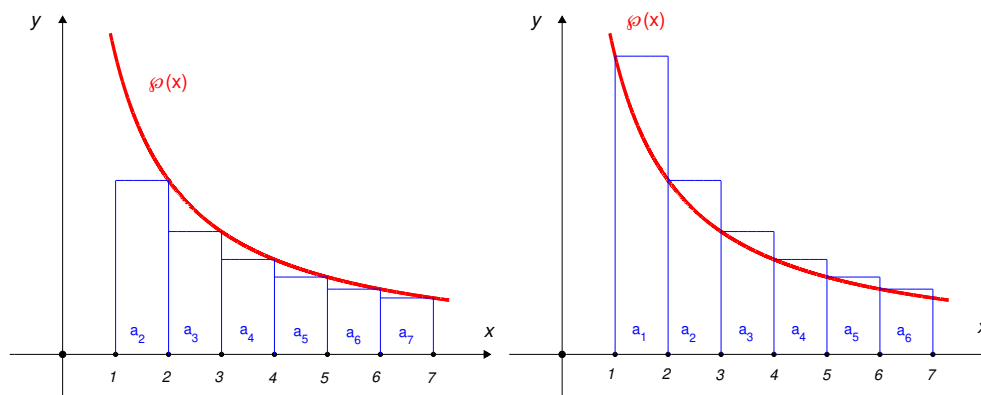
Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť $c \in M$. Nechť je posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí. Nechť dále existuje nerostoucí funkce $\varphi(x) : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $\varphi(n) = f_n(c)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $c \in \mathcal{O}$ právě tehdy, když existuje integrál $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$ a je vlastní.

Důkaz:

- označme $a_n := f_n(c)$
- z předpokladů věty jasně vyplývá (viz také obrázek), že pro každé $n \geq 2$ platí sada nerovností

$$s_n(c) - a_1 \leq \int_1^n \varphi(x) dx \leq s_{n-1}(c), \quad (2.7)$$

kde $s_n(x)$ je n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$



Obrázek 2.6

K důkazu integrálního kritéria.

- funkce $f(x)$ je, jak vyplývá z předpokladů, na $\langle 1, \infty \rangle$ nerostoucí, tudíž integrál $\int_1^n \varphi(x) dx$ existuje
- z levé části nerovnosti (2.7) vyplývá, že existuje-li vlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \varphi(x) dx =: \gamma \in \mathbf{R},$$

pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ je $s_n(c) \leq a_1 + \gamma$

- posloupnost $(s_n(c))_{n=1}^{\infty}$ je tudíž shora omezená a z předpokladů také nezáporná
- to podle věty 2.1.18 značí, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, tj. c patří do jejího oboru konvergence $\mathcal{O}$
- z pravé části nerovnosti (2.7) vyplývá, že je-li integrál $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$ divergentní, tzn.

$$\int_1^{\infty} \varphi(x) dx = \infty,$$

bude také $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(c) = \infty$, což implikuje fakt, že c nepatří do oboru konvergence $\mathcal{O}$ funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

2.1.30 Příklad

Hledejme nyní obor konvergence funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$. Aby vůbec řada mohla konvergovat v bodě $x \in \mathbf{R}$, musí být splněna nutná podmínka, tj. musí platit, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = 0$. Jak je ale zřejmé, pro $x \geq 0$ platí rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = \begin{cases} \infty & \dots & x > 0 \\ 1 & \dots & x = 0, \end{cases}$$

a proto má smysl hledat body, v nichž řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ bodově konverguje, pouze mezi zápornými x . Za těchto okolností, tj. pro $x \in (-\infty, 0)$, je funkce $\varphi(t) = t^x$ na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ klesající a platí pro ni, že $f(n) = n^x$. Tím jsou naplněny předpoklady věty 2.1.29. Uvažme nejprve $x \in (-1, 0)$. Pro tato x zjevně platí

$$\int_1^{\infty} t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_1^{\infty} = \infty.$$

Je-li $x = -1$, pak

$$\int_1^{\infty} t^{-1} dt = [\ln(t)]_1^{\infty} = \infty.$$

A nakonec pro $x < -1$ platí

$$\int_1^{\infty} t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_1^{\infty} = \frac{-1}{x+1} \in \mathbf{R}.$$

Uzavíráme tedy, že oborem konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ je množina $\mathcal{O} = (-\infty, -1)$.

2.1.31 Věta – Raabeovo kritérium

Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť pro každé $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $f_n(x) \neq 0$. Jestliže pro vybrané $c \in M$ platí nerovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} - 1 \right) > 1, \quad (2.8)$$

pak $c \in \mathcal{O}$. Je-li naopak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} - 1 \right) < 1, \quad (2.9)$$

pak $c \notin \mathcal{O}$.

Důkaz:

- vezměme libovolné $c \in M$ a předpokládejme, že platí nerovnost (2.8)
- pak existuje $\ell > 1$ tak, že od jistého indexu je splněna nerovnost

$$\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \geq 1 + \frac{\ell}{n}$$

- jistě lze volit s takové, že $1 < s < \ell$
- položíme-li $b_n := n^{-s}$, zjišťujeme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ je konvergentní (podle příkladu 2.1.30)
- pro názornost nyní zavedme funkci

$$h(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^s$$

- pro její první derivaci snadno stanovíme rovnost

$$\frac{dh}{dt} = \frac{s}{n} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{s-1}$$

- podle Lagrangeovy věty 1.3.15 o přírůstku existuje číslo $\gamma \in (0, t)$ tak, že

$$h(t) - h(0) = \frac{dh}{dt}(\gamma) \cdot t$$

- odtud tedy

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^s - 1 = \frac{s}{n} \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^{s-1} \cdot t$$

- pro $t = 1$ takto dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n} \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^{s-1} \quad (\gamma \in (0, 1))$$

- z tohoto pomocného výpočtu vyplývá, že

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n} \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^{s-1} < 1 + \frac{s}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-1} \quad (2.10)$$

- protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-1} = s < \ell,$$

existuje jistě index $m_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechny indexy $n \geq m_0$ je

$$s \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-1} < \ell$$

- pak tedy z rovnosti (2.10) vyplývá, že pro $n \geq m_0$ platí

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{\ell}{n} \leq \frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)}$$

- odtud

$$\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

- tím jsou naplněny předpoklady věty 2.1.21 a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c konverguje, čili $c \in \mathcal{O}$
- dokážeme nyní druhou část tvrzení
- platí-li nerovnost (2.9), pak existuje index m_0 tak, že pro všechna $n \geq m_0$ platí nerovnost

$$\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} \geq \frac{n+1}{n},$$

odkud podle věty 2.1.21 plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c diverguje, čili $c \notin \mathcal{O}$

2.1.32 Poznámka

Vztahy (2.8) a (2.9) jsou ekvivalentní vztahům

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} \right) > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} \right) < 1.$$

2.1.33 Věta – *Leibnizovo kritérium*

Nechť je na množině M zadána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Nechť $c \in M$. Nechť jsou splněny následující vlastnosti:

1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $\operatorname{sgn}(f_n(c)) = -\operatorname{sgn}(f_{n+1}(c))$.
2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $|f_{n+1}(c)| \leq |f_n(c)|$.
3. Existuje vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c)$ a pro její hodnotu platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = 0$.

Potom číslo c patří do oboru konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Důkaz:

- předpokládejme, že $f_1(c) > 0$ (v případě, že by $f_1(c) < 0$, by byl důkaz naprosto analogický)
- nechť $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- z ní vyberme podposloupnost $(s_{2k}(x))_{k=1}^{\infty}$ sudých členů
- pro tu zjevně platí, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$s_{2k+2}(c) = s_{2k}(c) + f_{2k+1}(c) + f_{2k+2}(c) \geq s_{2k}(c),$$

neboť díky předpokladům je součet $f_{2k+1}(c) + f_{2k+2}(c)$ zcela jistě nezáporný

- číselná podposloupnost $(s_{2k}(c))_{k=1}^{\infty}$ je tudíž neklesající
- dále ale také platí

$$s_{2k}(c) = f_1(c) + (f_2(c) + f_3(c)) + (f_4(c) + f_5(c)) + \dots + (f_{2k-2}(c) + f_{2k-1}(c)) + f_{2k}(c) < f_1(c),$$

neboť všechny součty $f_{2k-2}(c) + f_{2k-1}(c)$ jsou z předpokladů věty nekladné a navíc $f_{2k}(c) < 0$

- z nerovnosti $s_{2k}(c) < f_1(c)$ ale vyplývá, že podposloupnost $(s_{2k}(c))_{k=1}^{\infty}$ je shora omezená číslem $f_1(c)$
- dokázané vlastnosti omezenosti a monotonie zjevně implikují fakt, že podposloupnost $(s_{2k}(c))_{k=1}^{\infty}$ má konečnou limitu; označme ji $s := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}(c)$

- uvažujme nyní podposloupnost $(s_{2k+1}(c))_{k=1}^{\infty}$ lichých členů
- pro ni v bodě $c \in M$ platí rovnost $s_{2k+1}(c) = s_{2k}(c) + f_{2k+1}(c)$
- jelikož ale $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}(c) = s$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = 0$, je také $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1}(c) = s$
- z toho, že $s_{2k}(c) \rightarrow s$ a $s_{2k+1}(c) \rightarrow s$, již triviálně vyplývá fakt, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(c) = s$
- tedy $c \in \mathcal{O}$

2.1.34 Příklad

Hledejme nyní obor konvergence funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x$. Aby vůbec řada mohla konvergovat v bodě $x \in \mathbf{R}$, musí být splněna nutná podmínka, tj. musí platit, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^x = 0.$$

Jak je ale patrné, pro $x \geq 0$ tato podmínka splněna není, neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^x$ ani neexistuje. Proto má smysl hledat body, v nichž řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x$ bodově konverguje, pouze mezi zápornými x . Zcela zjevně platí, že za daných okolností střídá řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x$ znaménka. Dále platí $(n+1)^x \leq n^x$ a pro $x < 0$ také $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = 0$. Podle Leibnizova kritéria 2.1.33 je tudíž oborem konvergence zkoumané řady množina $\mathcal{O} = (-\infty, 0)$.

2.1.35 Věta – alternativní Raabeovo kritérium

Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Nechť $c \in M$. Nechť jsou splněny následující vlastnosti:

1. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí rovnost $\operatorname{sgn}(f_n(c)) = -\operatorname{sgn}(f_{n+1}(c))$.
2. Existuje vlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \right| - 1 \right) = q.$$

Pak je-li $q > 1$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c absolutně. Je-li $q \in (0, 1)$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c relativně. Pokud $q < 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c diverguje.

Důkaz:

- zvolme $q \in (0, 1)$, neboť pro $q > 1$ plyne dokazované tvrzení z Raabeova kritéria
- pak jistě existuje číslo $\ell \in (0, q)$ tak, že od jistého indexu je splněna nerovnost

$$n \left(\left| \frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \right| - 1 \right) > \ell$$

- to jest

$$\left| \frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \right| > 1 + \frac{\ell}{n} > 1 \quad (2.11)$$

- proto platí také nerovnost $|f_{n+1}(c)| < |f_n(c)|$, která představuje naplnění druhého předpokladu Leibnizova kritéria
- odsud mimo jiné také vyplývá, že posloupnost $(|f_n(c)|)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, a protože je zcela bez pochyby také omezená zdola, existuje jistě vlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(c)| = \gamma \in \mathbf{R}_0^+$$

- dokážeme nakonec, že z daných předpokladů vyplývá i třetí předpoklad Leibnizova kritéria
- z nerovnosti (2.11) vyplývá, že od jistého indexu n_0 platí

$$\left| \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} \right| < \frac{n}{n + \ell}$$

- bez újmy na obecnosti lze pro jednoduchost zápisu předpokládat, že $n_0 = 1$

- bez pochyby platí rovnost

$$\left| \frac{f_{n+1}(c)}{f_1(c)} \right| = \left| \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} \right| \cdot \left| \frac{f_n(c)}{f_{n-1}(c)} \right| \cdot \left| \frac{f_{n-1}(c)}{f_{n-2}(c)} \right| \cdots \left| \frac{f_3(c)}{f_2(c)} \right| \cdot \left| \frac{f_2(c)}{f_1(c)} \right|$$

- odtud

$$|f_{n+1}(c)| < \frac{n! |f_1(c)|}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)} \quad (2.12)$$

- chceme nyní dokázat, že limitou výrazu na pravé straně je nula
- vyjdeme z triviální rovnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln\left(\frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)}\right)}.$$

- nyní postačí dokázat, že

$$h := \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)} \right) = -\infty$$

- snadno ale nahlédneme, že

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{i}{\ell+i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(\frac{i}{\ell+i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\ell}{\ell+i} \right) = \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \ln(1-x) \leq -x \end{array} \right| \leq -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell}{\ell+i}$$

- jelikož ale číselná řada $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell}{\ell+i}$ diverguje k plus nekonečnu, vyplývá odtud, že $h = -\infty$
- odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)} = 0$$

- ze vztahu (2.12) proto vyplývá, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$
- jelikož jsou nyní splněny všechny předpoklady věty 2.1.33, plyne odsud, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(c)|$ diverguje z Raabeova kritéria
- celkem tedy: řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje v bodě c relativně
- dokážeme nyní třetí část tvrzení pro $q < 0$
- pak jistě existuje $\ell < 0$ takové, že od jistého indexu platí

$$\left| \frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \right| < 1 + \frac{\ell}{n} < 1$$

- pak ale $|f_{n+1}(c)| > |f_n(c)|$, což implikuje nesplnění nutné podmínky konvergence
- v tomto případě tedy $c \notin \mathcal{O}$, čímž je důkaz proveden

2.1.36 Definice

Nechť jsou dány řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ zadané na množině M . *Součinnou řadou* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ budeme rozumět řadu $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$, jejíž n -tý člen je na množině M definován předpisem

$$h_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) \cdot g_{n-k}(x).$$

Značíme $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$.

2.1.37 Věta

Nechť jsou řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ absolutně konvergentní na množině M . Nechť

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = g(x).$$

Pak součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ je také absolutně konvergentní na M a příslušným součtem je funkce $f(x) \cdot g(x)$.

Důkaz:

- označme součin uvedených řad jako $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$
- dle předpokladů konvergují řady $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ a $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)|$ na M
- nechť $\sigma_n(x)$ je n -tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ a $\tau_n(x)$ je n -tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)|$
- nechť $h_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) \cdot g_{n-k}(x)$ dle definice 2.1.36
- obě posloupnosti $(\sigma_n(x))_{n=0}^{\infty}$ a $(\tau_n(x))_{n=0}^{\infty}$ částečných součtů jsou zcela bez pochyby neklesající
- označme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma(x) \geq 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(x) = \tau(x) \geq 0$
- pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí: $\sigma_n(x) \leq \sigma(x)$ a $\tau_n(x) \leq \tau(x)$
- dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |h_k(x)| &= |f_0(x)g_0(x)| + |f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_2(x)| + \dots + |f_0(x)g_n(x) + f_1(x)g_{n-1}(x) + \dots + f_n(x)g_0(x)| \leq \\ &\leq |f_0(x)g_0(x)| + |f_0(x)g_1(x)| + |f_1(x)g_2(x)| + \dots + |f_0(x)g_n(x)| + |f_1(x)g_{n-1}(x)| + \dots + |f_n(x)g_0(x)| \leq \\ &\leq [|f_0(x)| + |f_1(x)| + \dots + |f_n(x)|] \cdot [|g_0(x)| + |g_1(x)| + \dots + |g_n(x)|] = \sigma_n(x) \cdot \tau_n(x) \leq \sigma(x) \cdot \tau(x) \end{aligned}$$

- částečné součty $\sum_{k=0}^n |h_k(x)|$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} |h_n(x)|$ jsou tedy shora omezené
- navíc je také posloupnost $(\sum_{k=0}^n |h_k(x)|)_{n=0}^{\infty}$ monotónní, jak triviálně vyplývá z faktu, že sčítáme nezáporné členy
- podle věty 1.1.13 je proto posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} |h_k(x)|$ konvergentní, tedy uvedená řada na množině M konverguje
- zbývá dokázat, že jejím součtem je skutečně funkce $f(x) \cdot g(x)$
- označme pro tyto účely $\tilde{\sigma}_n(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\tilde{\tau}_n(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$
- pak pro n -tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ platí (jak vyplývá z definice 2.1.36) rovnost

$$\sum_{k=0}^n h_k(x) = \tilde{\sigma}_n(x) \cdot \tilde{\tau}_n(x)$$

- z limitního přechodu $n \rightarrow \infty$ odtud snadno vyplývá, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n h_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_n(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\tau}_n(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- tím je důkaz proveden

2.1.38 Poznámka

Jsou-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ relativně konvergentní na množině M , může jejich součin být divergentní na M . To nastává např. pro řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pokud je ale součin konvergentních řad konvergentní (žádná z řad přitom nemusí konvergovat absolutně), je její součet roven součinu $f(x) \cdot g(x)$. Jestliže alespoň jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je absolutně konvergentní, je i jejich součin konvergentní řadou se součtem $f(x) \cdot g(x)$.

2.2 Stejnomořná konvergence řad funkcí

V analogii k posloupnostem funkcí zavedeme také pro řady funkcí se značným užitekem pojem stejnoměrné konvergence.

2.2.1 Definice

Řekneme, že řada funkcí konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ *stejnomořně* ke svému součtu $s(x)$ a označíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{M}{\equiv} s(x)$, jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje na M stejnoměrně k funkci $s(x)$.

2.2.2 Poznámka

Z předešlé definice, z věty 1.2.7 a z poznámky 1.2.8 přímo vyplývá, že stejnoměrná konvergence řady funkcí je *dědičná vlastnost*, t.j. konverguje-li řada (2.1) stejnoměrně na jisté množině, konverguje stejnoměrně také na každé její neprázdné podmnožině.

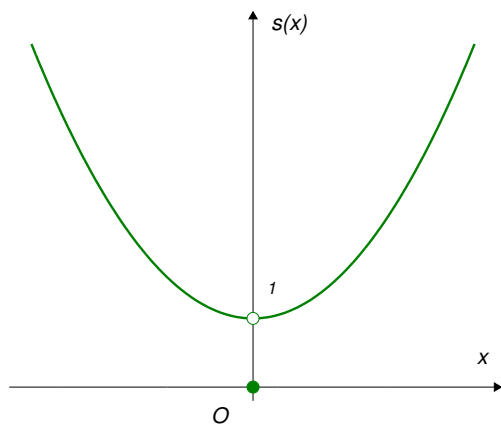
2.2.3 Příklad

Ukážeme, že součtem řady spojitých funkcí nemusí nutně být spojitá funkce. Uvažme řadu

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \dots$$

Jde o geometrickou řadu s prvním členem x^2 a kvocientem $(1+x^2)^{-1}$. Oborem konvergence je množina $\mathbf{R}$, neboť i nula do něj patří, přestože kvocient je v tomto případě roven jedné. Součtem uvažované řady je funkce

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \dots & x \neq 0 \\ 0 & \dots & x = 0. \end{cases}$$



Obrázek 2.7
Graf součtové funkce $s(x)$.

Zatímco jsou všechny funkce $x \mapsto x^2(1+x^2)^{n-1}$ na $\mathbf{R}$ spojitě, funkce $s(x)$ na $\mathbf{R}$ spojitá není. Opět (stejně jako v případě posloupností funkcí) lze ukázat, že zkoumaná řada konverguje pouze bodově, což, jak lehce nahlédneme, vede právě ke zmiňovanému "porušení" spojitosti.

2.2.4 Věta

Jestliže řada funkcí (2.1) stejnoměrně konverguje na $M \subset \mathbf{R}$, potom na $M \subset \mathbf{R}$ konverguje i bodově.

Důkaz:

- je snadným důsledkem předchozích definic a věty 1.2.3

2.2.5 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ *regulárně*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje na M stejnoměrně.

2.2.6 Věta

Nechť řada (2.1) spojitých funkcí stejnoměrně konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$. Potom součtem této řady je funkce spojitá na M .

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.3.1
- je-li funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ řadou spojitých funkcí, pak jistě také příslušná posloupnost částečných součtů $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je posloupností spojitých funkcí
- z předpokladů věty ale vyplývá, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$
- tím je zaručeno splnění předpokladů věty 1.3.1 a limita $s(x)$ posloupnosti částečných součtů je tudíž spojitá
- součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je tedy za daných okolností spojitá funkce

2.2.7 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Řada funkcí (2.1) konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geq n \geq n_0$ a pro jakékoliv $x \in M$ je splněna nerovnost

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.2.15
- označíme-li totiž $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ příslušnou posloupnost částečných součtů, získáváme rovnost

$$s_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x), \quad s_m(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x)$$

- podle věty 1.2.15 (v nepatrné obměně) konverguje posloupnost $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ na M stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geq n \geq n_0$ a pro jakékoliv $x \in M$ je splněna nerovnost $|s_m(x) - s_{n-1}(x)| < \varepsilon$
- z této nerovnosti ovšem vyplývá, že

$$\left| \sum_{k=1}^m f_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \right| = |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon$$

2.2.8 Poznámka

Předešlou větu lze shrnout následujícím formálním zápisem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{M}{=} s(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n)(m \geq n \geq n_0)(\forall x \in M) : |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon.$$

Stejněoměrná konvergence tedy opět (podobně jako tomu bylo u posloupností funkcí) požaduje existenci jistého indexu n_0 , který je "univerzální" pro všechna $x \in M$.

2.2.9 Věta – nutná podmínka stejnoměrné konvergence

Jestliže řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na množině M stejnoměrně, potom posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na této množině stejnoměrně k nulové funkci.

Důkaz:

- z předpokladů věty plyne, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})(m \geq n \geq n_0)(\forall x \in M) : |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon$$

- jelikož toto tvrzení platí pro jakákoli $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m \geq n \geq n_0$, platí také při speciální volbě $m = n$
- pak ale

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n \geq n_0)(\forall x \in M) : |f_n(x)| = |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

- tento výrok je ale ekvivalentní tvrzení, že posloupnost funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k nulové funkci.

2.2.10 Poznámka

Nutná podmínka stejnoměrné konvergence je jednostrannou implikací, lze ji tedy využívat zejména při vyvracení stejnoměrné konvergence řady. Není-li totiž na množině M splněno, že $f_n(x) \rightarrow 0$, nemůže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M stejnoměrně konvergovat. Naproti tomu může nastat případ, kdy posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na jisté množině M stejnoměrně k nulové funkci, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ přesto na M stejnoměrně nekonverguje. Takovou řadou je např. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$$

zadaná například na množině $M = \langle 0, 1 \rangle$. Snadno se lze přesvědčit, že posloupnost $(\frac{x}{n})_{n=1}^{\infty}$ na M stejnoměrně konverguje, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} \left| \frac{x}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ ale na M nekonverguje ani bodově (např. podle integrálního kritéria), tedy o stejnoměrnou konvergenci se jistě jednat nemůže.

2.2.11 Věta – srovnávací kritérium

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je na množině M majorantní křadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na M . Pak jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ stejnoměrně konvergentní na M , tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- užijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku 2.2.7
- z předpokladu víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na M , tedy pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $m \geq n \geq n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí

$$0 \leq g_n(x) + g_{n+1}(x) + \dots + g_m(x) < \varepsilon$$

- dále víme, že existuje m_0 tak, že pro všechna $x \in M$ a všechny indexy $n \geq m_0$ platí $|f_n(x)| \leq g_n(x)$
- pro zvolené ε a všechna $n \geq \max\{n_0, m_0\}$ pak platí

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| \leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_m(x)| \leq g_n(x) + g_{n+1}(x) + \dots + g_m(x) < \varepsilon$$

- to dokazuje obě tvrzení věty

2.2.12 Důsledek

Konverguje-li řada na množině M regulárně, konverguje na M také stejnoměrně.

2.2.13 Poznámka

Důsledkem předešlé věty je také jedno z nejhodnějších užívaných kritérií pro vyšetřování stejnoměrné konvergence řad funkcí.

2.2.14 Věta – Weierstrassovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada, $f_n(x)$ jsou funkce a pro všechna $x \in M$ a všechna $n \in \mathbf{N} \setminus \widehat{n_0}$ je $|f_n(x)| \leq a_n$. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ stejnoměrně konvergují na M , tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- v předchozí větě položíme $g_n(x) := a_n$ pro všechna $x \in M$ a uvědomíme si, že pojmy bodové a stejnoměrné konvergence u řady konstantních funkcí splývají

2.2.15 Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c, c + \delta)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow c+} f_n(x) = b_n$. Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow c+} s(x)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow c+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow c+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (2.13)$$

Důkaz:

- označme $s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ pro libovolné $x \in (c, c + \delta)$
- jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c, c + \delta)$ ke svému součtu $s(x)$, pak na $(c, c + \delta)$ platí $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$
- jelikož každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow c+} f_n(x) = b_n$, má také každá z funkcí $s_n(x)$ vlastní limitu

$$\lim_{x \rightarrow c+} s_n(x) = \lim_{x \rightarrow c+} \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n b_i =: r_n$$

- tato rovnost platí podle věty o limitě součtu konečně mnoha spojitých funkcí
- r_n tak představuje n -tý částečný součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- tím jsou splněny předpoklady věty 1.3.2 a podle jejího tvrzení tedy platí, že existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ a $\lim_{x \rightarrow c+} s(x)$ a jsou si rovny, t.j.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c+} s_n(x) = \lim_{x \rightarrow c+} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x).$$

- dokazované tvrzení pak získáváme po sérii dosazení

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i = \lim_{x \rightarrow c+} s(x)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \lim_{x \rightarrow c+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow c+} f_i(x) = \lim_{x \rightarrow c+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

2.2.16 Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c - \delta, c)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow c-} f_n(x) = b_n$. Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow c-} s(x)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow c-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow c-} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- plyne buď z předešlé věty po záměně $f_n(x)$ za $f_n(-x)$ nebo lze dokázat analogicky jako v předešlé větě užitím tvrzení 1.3.3

2.2.17 Příklad

Součtovou funkcí řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je funkce $s(x) = x/(1-x)$. Pro ni platí, že $\lim_{x \rightarrow 1-} s(x) = +\infty$. Platí ale také, že $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1-} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$. Rovnost $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1-} x^n = \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ tedy platí navzdory tomu, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ nekonverguje na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ stejnoměrně.

2.2.18 Důsledek

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = b_n$. Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow c} s(x)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

2.2.19 Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $K > 0$ na intervalu (K, ∞) ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = b_n$. Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- plyne z věty 1.3.7

2.2.20 Důsledek

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $K < 0$ na intervalu $(-\infty, K)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = b_n$. Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

2.2.21 Věta

Předpokládejme, že řada (2.1) spojitých funkcí stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle a, b \rangle$ a že jejím součtem na $\langle a, b \rangle$ je funkce $s(x)$. Potom číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ konverguje a pro její součet platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Důkaz:

- aplikujeme větu 1.3.9 na posloupnost $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů
- označme tedy $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

- jelikož všechny funkce $f_n(x)$ jsou podle předpokladů spojité, je také každá funkce $s_n(x)$ na M spojitá
- dále na M platí, že $s_n(x) \Rightarrow s(x)$, čímž jsou naplněny předpoklady věty 1.3.9, a z jejího tvrzení tudíž vyplývá, že

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx$$

- dále snadno

$$\begin{aligned} \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx \\ \int_a^b s(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx \\ \int_a^b s(x) dx &= \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx \end{aligned}$$

2.2.22 Věta

Nechť je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcí diferencovatelných na intervalu (a, b) taková, že pro alespoň jedno $c \in (a, b)$ číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje. Nechť navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ stejnoměrně konverguje na (a, b) a jejím součtem je funkce $\sigma(x)$. Potom také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na (a, b) . Navíc, označíme-li její součet $s(x)$, je tento diferencovatelný na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí rovnost $s'(x) = \sigma(x)$.

Důkaz:

- aplikujeme větu 1.3.13 na posloupnost $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů
- z předpokladů věty víme, že posloupnost $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje alespoň pro jedno $c \in M$
- dále víme, že posloupnost částečných součtů $(\sigma_n(x))_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ konverguje na M stejnoměrně, tedy $\sigma_n(x) \Rightarrow \sigma(x)$
- tím jsou naplněny předpoklady věty 1.3.13, a platí proto $(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(x)$
- odtud

$$s'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma(x)$$

2.2.23 Poznámka

Větu 2.2.21 shrnujeme slovy: "Stejněoměrně konvergentní řadu spojitých funkcí lze na uzavřeném intervalu integrovat člen po členu." Větu 2.2.22 shrnujeme slovy: "Řadu diferencovatelných funkcí lze na otevřeném intervalu derivovat člen po členu, pokud konverguje alespoň v jednom jeho bodě a řada sestavená z derivací jejích členů stejnoměrně konverguje." Tato věta totiž říká, že za daných předpokladů platí:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

2.2.24 Věta – Abelova parciální sumace

Nechť $p \in \mathbb{N}$ a $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \hat{p}$. Položme $s_k := a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Pak platí:

$$\sum_{i=1}^p a_i b_i = \sum_{i=1}^{p-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_p b_p.$$

Důkaz:

$$\sum_{i=1}^p a_i b_i = s_1 b_1 + \sum_{i=2}^p (s_i - s_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^p s_i b_i - \sum_{i=1}^{p-1} s_i b_{i+1} = \sum_{i=1}^{p-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_p b_p$$

2.2.25 Věta – Abelovo a Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci

Nechť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ a $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti funkcí na množině $M \subset \mathbf{R}$. Nechť pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ monotónní. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

1. *Abelova podmínka*: Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na M a posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je tzv. *stejnoměrně omezená* na M , tj. existuje $K \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí $|g_n(x)| < K$.
2. *Dirichletova podmínka*: Nechť je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně omezená na množině M , tj. existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\left| \sum_{\ell=1}^n f_{\ell}(x) \right| \leq K.$$

Nechť dále posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M stejnoměrně k nulové funkci.

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M .

Důkaz:

- vezměme libovolná $n_0, p \in \mathbf{N}$ a označme $s_i(x) := f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+2}(x) + \dots + f_{n_0+i}(x)$
- pak z předchozí věty vyplývá rovnost

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x)g_j(x) = \sum_{i=1}^p f_{n_0+i}(x)g_{n_0+i}(x) = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x)[g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)] + s_p(x)g_{n_0+p}(x)$$

- odtud pak plyne srovnání

$$\left| \sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x)g_j(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{p-1} |s_i(x)| \cdot |g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)| + |s_p(x)| \cdot |g_{n_0+p}(x)| \quad (2.14)$$

- *Abelova podmínka*:

– z předpokladů Abelova kritéria víme, že

$$(\exists K > 0)(\forall x \in M)(\forall n \in \mathbf{N}) : |g_n(x)| \leq K$$

– podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky aplikované na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ existuje k libovolnému pevnému $\varepsilon > 0$ takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna $i \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí:

$$|s_i(x)| = |f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+2}(x) + \dots + f_{n_0+i}(x)| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

– z mezivýpočtu (2.14) pak plyne

$$\left| \sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x)g_j(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{i=1}^{p-1} |g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{2K} |g_{n_0+p}(x)| = \frac{\varepsilon}{2K} |g_{n_0+1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

- v předešlém bodě jsme využili monotónii posloupnosti $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$, díky níž mají všechny rozdíly $g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)$ stejné znaménko nebo jsou nulové
- tím je za použití Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řad "Abelova" část důkazu věty provedena

- *Dirichletova podmínka*:

– posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je omezená, a tudíž existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ a pro všechna $i \in \mathbf{N}$ platí:

$$\left| \sum_{j=n_0+1}^{n_0+i} f_j(x) \right| = |s_i(x)| < K$$

– z mezivýpočtu (2.14) pak plyne

$$\left| \sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x) g_j(x) \right| \leq K \sum_{i=1}^{p-1} |g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)| + K |g_{n_0+p}(x)| = K |g_{n_0+1}(x)|$$

– protože $g_n(x) \Rightarrow 0$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že

$$(\forall x \in M) : \quad |g_{n_0+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$$

– tedy spolu

$$\left| \sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x) g_j(x) \right| \leq K |g_{n_0+1}(x)| < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

– tím je "Dirichletova" část důkazu věty provedena

2.2.26 Poznámka

Z předcházející věty mimo jiné bezprostředně vyplývá Leibnizovo kritérium 2.1.33 pro konvergenci oscilujících číselných řad. Stačí totiž za $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ zvolit číselnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a za $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ oscilující posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ pak konverguje, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$. Uvědomme si, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je omezená. Z Dirichletova kritéria vyplývá rovněž logická alternativa Leibnizova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci funkčních řad.

2.2.27 Lemma – Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci

Nechť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí zadanych na množině $M \subset \mathbf{R}$. Nechť pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ monotónní. Nechť dále pro posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ platí $f_n(x) \Rightarrow 0$ na M . Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M .

2.2.28 Příklad

Budeme vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{n} x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} \right) \quad (2.15)$$

na jejím oboru konvergence. Snahou je za použití Weierstrassova kritéria dokázat stejnoměrnou konvergenci řady (2.15) na co největší množině. Nejjednodušší metodou se zdá být omezení funkce

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{n} x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} \right)$$

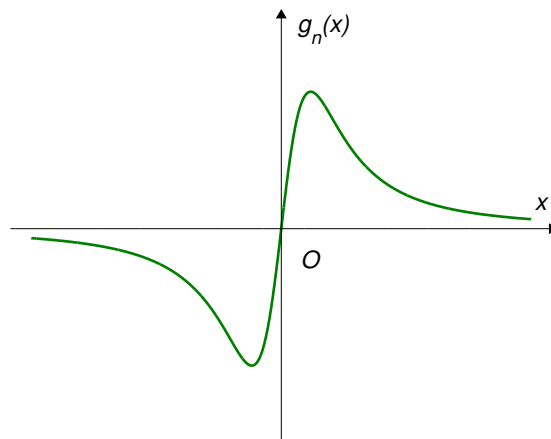
její supremální hodnotou na $\mathbf{R}$. Protože ale víme, že funkce $\operatorname{arctg}(x)$ je na celém $\mathbf{R}$ rostoucí, postačí vyšetřovat extrém funkce

$$g_n(x) = \frac{\sqrt{n} x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Pro hledání extrému položíme první derivaci funkce $g_n(x)$ rovnu nule. Tedy

$$g'_n(x) = \sqrt{n} \frac{8n^2 - 2x^2}{(8n^2 + x^2)^{5/2}} = 0.$$

Rovnici řeší body $x = \pm 2n$, z nichž pouze bod $x_0 = 2n$ je vzhledem k průběhu funkce $g_n(x)$ jejím maximem.



Obrázek 2.8
Průběh funkce $g_n(x)$.

Maximum funkce $g_n(x)$ na množině $\mathbf{R}$ má tedy hodnotu

$$\max_{x \in \mathbf{R}} g_n(x) = g_n(2n) = \frac{2}{12^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Tohoto faktu a skutečnosti, že $\forall x \in \mathbf{R} : |\operatorname{arctg}(x)| \leq |x|$, nyní využijeme při aplikaci Weierstrassova kritéria:

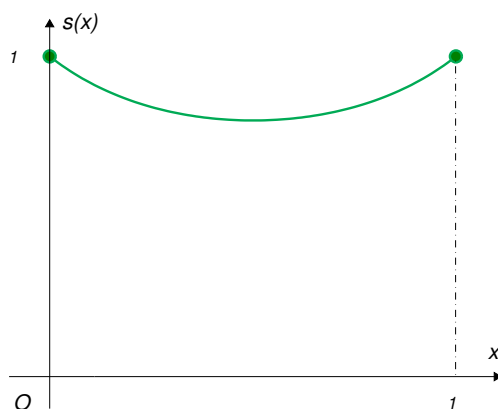
$$(\forall x \in \mathbf{R}) : \left| \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{n} x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} \right) \right| \leq \left| \frac{\sqrt{n} x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{2}{12^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Jelikož číselná řada vytvořená ze členů na pravé straně této nerovnosti zjevně konverguje, můžeme celý příklad uzavřít tvrzením, že řada funkcí (2.15) stejnoměrně konverguje na oboru konvergence $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

2.2.29 Příklad

Pokusme se rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)^n$ na množině $I = \langle 0, 1 \rangle$. Součtem řady na celém I je funkce

$$s(x) = \frac{1}{1+x(1-x)} = \frac{1}{1+x-x^2},$$



Obrázek 2.9
Součet $s(x)$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)^n$.

neboť uvedená řada je geometrickou řadou s kvocientem $q(x) = -x(1-x)$, pro nějž na množině I zjevně platí $|q(x)| < 1$. Jelikož je součet spojitá funkce, nelze tvrdit, že zadaná řada na I stejnoměrně konverguje. Pokusme se nyní dokázat stejnoměrnou konvergenci pomocí Dirichletova (Leibnizova) kritéria. Zvolme $f_n(x) := (-1)^n$ a $g_n(x) := x^n(1-x)^n$. Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ je bez pochyby stejnoměrně omezená a navíc pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in I$ platí:

$$g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 \geq 0.$$

To plyne z faktu, že diskriminant kvadratické rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ je záporný, tudíž pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je $x^2 - x + 1 > 0$. Zbývá tedy ukázat, že posloupnost $(x^n(1-x)^n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k nule. Snadno se přesvědčíme, že limitní funkcí je nula, a to i v krajních bodech intervalu I . Funkce $x \mapsto x^n(1-x)^n$ má na I bod lokálního maxima nezávislý na n a to $x_{stac} = \frac{1}{2}$. Odsud

$$\sigma_n = \sup_{x \in I} |x^n(1-x)^n| = \frac{1}{4^n}$$

a následně $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, což je postačující podmínkou pro tvrzení, že posloupnost $(x^n(1-x)^n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje na I stejnoměrně k nulové funkci. Podle Dirichletova kritéria tedy zadaná řada konverguje stejnoměrně na I .

2.2.30 Příklad

Prokažme stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n}{x}}$$

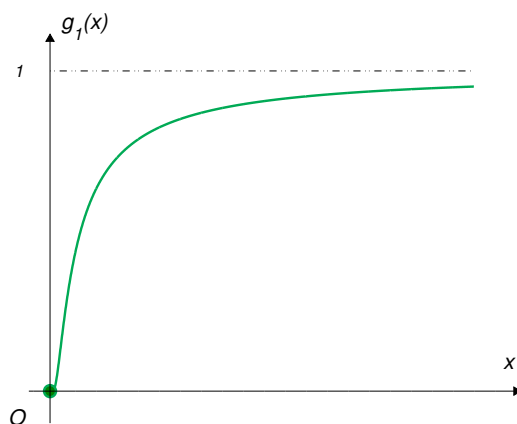
na intervalu $I = (0, \infty)$. K důkazu užijeme Abelova kritéria. Položíme $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ a $g_n(x) = e^{-\frac{n}{x}}$. Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentní řadou konstantních funkcí, konverguje na I stejnoměrně. Dále se přesvědčíme, že funkce $g_1(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ je na I omezená. To lze snadno, neboť příslušná derivace

$$g_1'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

je na I stále kladná a tedy $g_1(x)$ je na I rostoucí. Odtud $\sup_{x \in I} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$. Zbývá tedy ukázat, že posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je monotónní. Pro všechna $x \in I$ a všechna n ale jistě platí sada implikací

$$1 \geq e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow e^{-\frac{n}{x}} \geq e^{-\frac{n+1}{x}} \Rightarrow g_n(x) \geq g_{n+1}(x).$$

Z monotonie posloupnosti $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ a omezenosti $g_1(x)$ plyne omezenost všech funkcí $g_n(x)$. Podle Abelova kritéria tedy zadaná řada konverguje na množině $\mathbf{R}^+$ stejnoměrně.



Obrázek 2.10
Graf funkce $g_1(x)$.

2.2.31 Věta

Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině M ke svému součtu $s(x)$. Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině N ke svému součtu $t(x)$. Nechť $M \cap N \neq \emptyset$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x))$ konverguje stejnoměrně na $M \cap N$ a jejím součtem na $M \cap N$ je funkce $s(x) + t(x)$.

Důkaz:

- označme $s_n(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t_n(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$

- označíme-li $r_n(x)$ n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x))$, platí $r_n(x) = s_n(x) + t_n(x)$
- jelikož je stejnoměrná konvergence řad funkcí dědičnou vlastností (jak se čtenář snadno přesvědčí), konvergují obě řady na $M \cap N$ také stejnoměrně
- z předpokladů dokazované věty vyplývá, že $s_n(x) \Rightarrow s(x)$ na $M \cap N$ a podobně $t_n(x) \Rightarrow t(x)$ na $M \cap N$
- tudíž pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ a všechna $x \in M \cap N$ platí

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro ono zmíněné $\varepsilon > 0$ existuje ale také $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geq m_0$ a všechna $x \in M \cap N$ platí

$$|t_n(x) - t(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- položíme $\ell_0 := \max\{n_0, m_0\}$
- pak pro libovolné $n \geq \ell_0$ a všechna $x \in M \cap N$ je splněna nerovnost

$$|r_n(x) - (s(x) + t(x))| \leq |s_n(x) - s(x)| + |t_n(x) - t(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což implikuje jednak fakt, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x))$ stejnoměrně konverguje na $M \cap N$, a jednak skutečnost, že příslušným součtem je právě funkce $r(x) = s(x) + t(x)$, kde $\text{Dom}(r) = M \cap N$

2.2.32 Lemma

Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině M ke svému součtu $s(x)$. Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ stejnoměrně konverguje na M také řada $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot f_n(x)$ a jejím součtem na množině M je funkce $c \cdot s(x)$.

2.2.33 Lemma

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní funkční řada na množině M . Nechť je dále dána funkce $g(x) : M \mapsto \mathbf{R}$, jež je omezená na M . Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na M .

2.2.34 Lemma

Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konvergují na M . Nechť je navíc posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ monotónní pro každé $x \in M$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M .

2.2.35 Poznámka

Upozorňujeme, že předešlá věta by bez předpokladu o monotónii nebyla platná. Neplatí tedy, že konvergují-li obě řady na M stejnoměrně, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M . Položíme-li např.

$$f_n(x) = g_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konvergují na $\mathbf{R}$. Ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dokonce ani nekonverguje, natož pak stejnoměrně.

2.2.36 Věta

Nechť řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ regulárně konvergují na množině M . Nechť

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \stackrel{M}{=} f(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \stackrel{M}{=} g(x).$$

Pak je součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ také regulárně konvergentní na M a příslušným součtem je funkce $f(x) \cdot g(x)$.

Bez důkazu.

2.3 Mocninné řady

Po zkoumání obecných řad funkcí nyní přejdeme k detailní analýze jejich nejzajímavějšího zástupce – k řadám mocninných funkcí. Jak se dovíme později (v následující kapitole), bude studium řad mocninných funkcí zásadní při hledání mocninných aproximací funkcí jedné proměnné.

2.3.1 Definice

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a necht' $c \in \mathbf{R}$. Potom řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ nazýváme *mocninnou řadou se středem v bodě c* .

2.3.2 Poznámka

Substitucí $\tilde{x} = x - c$ přejdeme ke studiu mocninných řad se středem v počátku, t.j. k řadám typu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$. Upozorňujeme, že následující tvrzení jsou platná pouze pro řady funkcí se středem v bodě nula. Pro řady s nenulovým středem je třeba všechna tvrzení tohoto oddílu vhodně modifikovat.

2.3.3 Poznámka

Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zřejmě konverguje vždy alespoň pro $x = 0$. Navíc mohou nastat nejvýše tyto tři vzájemně se vylučující možnosti:

1. řada konverguje pouze v bodě $x = 0$, tj. $\mathcal{O} = \{0\}$,
2. řada konverguje pro alespoň jedno $x \neq 0$ a pro alespoň jedno $\tilde{x} \neq 0$ diverguje,
3. řada konverguje všude v $\mathbf{R}$, tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

2.3.4 Příklady

Uvedeme mocninné řady s vlastnostmi 1, 2 a 3 z předešlé poznámky.

1. Limitním podílovým kritériem ukážeme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ má jednoprvkový obor konvergence $\mathcal{O} = \{0\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)x| = \infty > 1 \quad (x \neq 0).$$

2. Stejným způsobem ukážeme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$ např. pro $|x| = 1$ konverguje a např. pro $|x| = 4$ diverguje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1) 2^{n+1}} \frac{n 2^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{2} = \begin{cases} 2 > 1 & \dots & |x| = 4 \\ \frac{1}{2} < 1 & \dots & |x| = 1. \end{cases}$$

3. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ naproti tomu konverguje všude v $\mathbf{R}$, neboť pro $x = 0$ je to zřejmé a pro všechna $x \neq 0$ platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

2.3.5 Věta – Abelovo lemma

Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ ($x_0 \neq 0$), potom konverguje absolutně na intervalu $(-|x_0|, |x_0|)$.

Důkaz:

- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ (viz nutná podmínka konvergence)
- posloupnost $(a_n x_0^n)_{n=0}^{\infty}$ je tudíž omezená, proto existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna n platí $|a_n x_0^n| < K$

- odsud pro x splňující nerovnost $|x| < |x_0|$ plyne

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| < K \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

- řada $\sum_{n=0}^{\infty} K \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ je konvergentní geometrickou řadou s kvocientem $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, tudíž ze srovnávacího kritéria pro číselné řady ihned plyne tvrzení věty

2.3.6 Poznámka

Konverguje-li mocninná řada v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ ($x_0 \neq 0$), neznamená to ale ještě, že na intervalu $(-|x_0|, |x_0|)$ konverguje stejnoměrně. To je zásadní poznatek.

2.3.7 Lemma

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$, potom diverguje v každém bodě $x \in (-\infty, -|x_0|) \cup (|x_0|, \infty)$.

2.3.8 Poznámka

Důsledkem předešlých dvou vět je skutečnost, že existuje číslo $R \in \mathbf{R}$ tak, že pro $x \in (-R, R)$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje a naopak pro $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje. Toto číslo R budeme nazývat *poloměrem konvergence*.

2.3.9 Definice

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada se středem v bodě nula a $\mathcal{O}$ její obor konvergence. Supremum množiny $\mathcal{O}$ značíme R a nazýváme *poloměrem konvergence*. Interval $(-R, R)$ budeme nazývat *intervalem konvergence*.

2.3.10 Poznámka

Je zřejmé, že $R \in \langle 0, \infty \rangle \cup \{\infty\}$ a $(-R, R) \subset \mathcal{O}$.

2.3.11 Věta

Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nechť existují $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nebo $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Potom pro poloměr konvergence R zadané řady platí:

- $R = L^{-1}$, pokud $L \neq 0$ a $L \neq \infty$
- $R = \infty$, pokud $L = 0$
- $R = 0$, pokud $L = \infty$.

Důkaz:

- při vyšetřování konvergence užijeme např. podílové kritérium, z něhož vyloučíme triviální případ $x = 0$
- řada konverguje pro ta $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, pro něž je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| < 1$$

- navíc řada diverguje pro ta $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, pro něž je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| > 1$$

- odtud je zřejmé, že pro $L = \infty$ je $R = 0$ a pro $L = 0$ je $R = \infty$
- v ostatních případech tedy pro poloměr konvergence platí

$$R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{L}$$

- analogicky lze větu dokázat pro odmocninové kritérium

2.3.12 Poznámka

Obecněji lze předešlé tvrzení zformulovat takto: Ke každé mocninné řadě existuje hodnota $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ a poloměr konvergence je jeho převrácenou hodnotou (ve zobecněném smyslu věty 2.3.11).

2.3.13 Příklad

Pokusme se nyní vypočítat poloměr konvergence mocninné řady z příkladu 2.3.4 – bod 2. Vidíme, že

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{(n+1) 2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

odkud $R = 2$, což koresponduje s výsledkem dosaženým v příkladu 2.3.4.

2.3.14 Poznámka

Při vyšetřování oboru konvergence mocninných řad typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\beta n}$, kde $\beta \in \mathbb{N}$, je nutné přejít substitucí $t = x^{\beta}$ k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, jejíž poloměr konvergence určíme podle výše uvedených pravidel. Je-li tímto poloměrem číslo R_t , je poloměrem konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\beta n}$ číslo $R_x = \sqrt[\beta]{R_t}$.

2.3.15 Poznámka

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ je mocninná řada se středem v bodě $c \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{O}$ její obor konvergence. Poloměrem konvergence této řady je pak $R = \sup\{x - c : x \in \mathcal{O}\}$.

2.3.16 Příklad

Nalezneme obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} (x-3)^{2n}$. Označíme-li nejprve $t = (x-3)^2$, dostáváme standardní tvar mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} t^n$ se středem v bodě $t = 0$. Jelikož

$$L_t = \frac{4^{n+1}}{n+1} \frac{n}{4^n} = 4,$$

je poloměrem substituované řady číslo $R_t = 1/4$. Krajními body intervalu konvergence této řady jsou tudíž body $t = \pm 1/4$. Chceme-li zkoumat interval konvergence původní mocninné řady, je třeba řešit nerovnost $|t| = |x-3|^2 < 1/4$. Odtud snadno zjišťujeme, že hledaným intervalem konvergence je množina $I = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, která je zároveň také oborem konvergence, neboť v obou krajních bodech zadaná řada zjevně diverguje. Vždy se totiž jedná o tutéž divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. V souladu s předešlou poznámkou tedy zjišťujeme, že mezi poloměry konvergence dotčených řad je citovaný vztah $(1/2)^2 = R_x^2 = R_t = 1/4$.

2.3.17 Poznámka

Po zkoumání bodové konvergence přejdeme nyní k vyšetřování stejnoměrné konvergence mocninných řad.

2.3.18 Věta

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bodě $r > 0$. Pak konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle 0, r \rangle$.

Důkaz:

- budeme zkoumat stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

- označme proto $f_n(x) = a_n r^n$ a $g_n(x) = \left(\frac{x}{r}\right)^n$
- jelikož číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konstantních funkcí stejnoměrně na $\langle 0, r \rangle$

- posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $x \in \langle 0, r \rangle$ monotónní, neboť platí sada ekvivalentních nerovností

$$x \leq r \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n \Leftrightarrow g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$$

- navíc je $g_n(x)$ omezená, neboť

$$|g_n(x)| = \left| \frac{x^n}{r^n} \right| \leq 1$$

- podle Abelova kritéria tedy konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na $\langle 0, r \rangle$ stejnoměrně

2.3.19 Věta

Nechť mocnná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bodě $r < 0$. Pak konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle r, 0 \rangle$.

Důkaz:

- pro všechna $x \in \langle r, 0 \rangle$ platí triviální nerovnost $r \leq x$
- budeme zkoumat stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

- označme proto $f_n(x) = a_n r^n$ a $g_n(x) = \left(\frac{x}{r}\right)^n$
- jelikož číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konstantních funkcí stejnoměrně na $\langle r, 0 \rangle$
- posloupnost $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $x \in \langle r, 0 \rangle$ monotónní, neboť platí sada ekvivalentních nerovností

$$x \geq r \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^n \geq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} \Leftrightarrow g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$$

- navíc je $g_n(x)$ omezená, neboť

$$\left| \frac{x^n}{r^n} \right| \leq 1$$

- podle Abelova kritéria tedy konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na $\langle r, 0 \rangle$ stejnoměrně

2.3.20 Věta – základní věta teorie mocnných řad

Nechť je dána mocnná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence R . Potom tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném intervalu, který je částí jejího oboru konvergence.

Důkaz:

- jde vlastně o důsledek vět 2.3.18 a 2.3.19 a faktu, že konverguje-li řada na intervalech $\langle \alpha, 0 \rangle$ a $\langle 0, \beta \rangle$ stejnoměrně, konverguje stejnoměrně také na jejich sjednocení $\langle \alpha, \beta \rangle$

2.3.21 Poznámka

Je-li tedy obor konvergence mocnné řady uzavřenou množinou, konverguje tato řada na oboru konvergence stejnoměrně. Je třeba si ale uvědomit, že obecně neplatí tvrzení, že každá řada konverguje stejnoměrně na svém intervalu konvergence. Např. řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ nekonverguje stejnoměrně na intervalu $(-R, R) = (-1, 1)$, neboť na něm není ani splněna nutná podmínka (viz příklad 1.2.6).

2.3.22 Věta

Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence R . Potom součet $s(x)$ této řady je funkce spojitá na $(-R, R)$.

Důkaz:

- zvolme $x \in (-R, R)$, k němuž jistě existuje $r \in (0, R)$ takové, že $x \in \langle -r, r \rangle$
- všechny funkce $x \mapsto a_n x^n$ jsou na $\langle -r, r \rangle$ spojitě a podle věty 2.3.20 řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje na $\langle -r, r \rangle$ stejnoměrně
- tím jsou splněny předpoklady věty 2.2.6, a tedy $s(x)$ je spojitou funkcí v bodě $x \in \langle -r, r \rangle$
- jelikož byl bod x zvolen libovolně, je funkce $s(x)$ spojitá na celém $(-R, R)$

2.3.23 Věta – Abelova

Jestliže v pravém, resp. levém krajním bodě intervalu konvergence řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje (i relativně), potom funkce, která je jejím součtem, je v tomto bodě spojitá zleva, resp. zprava.

Důkaz:

- v této větě se de facto jedná o záměnu limity $\lim_{n \rightarrow \infty}$ a limity $\lim_{x \rightarrow R_-}$, resp. $\lim_{x \rightarrow -R_+}$
- tvrzení věty je důsledkem vět 2.2.15, resp. 2.2.16 a základní věty teorie mocninných řad 2.3.20

2.3.24 Věta – o integrování mocninné řady člen po členu

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada s kladným poloměrem konvergence R . Definujme funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pro $x \in (-R, R)$. Potom mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na intervalu $(-R, R)$ konverguje a definujeme-li funkci $F(x)$ předpisem

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

na intervalu $(-R, R)$, je $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu $(-R, R)$.

Důkaz:

- pro $x_0 \in (-R, R)$ zvolme $r > 0$ tak, že $x_0 \in \langle -r, r \rangle \subset (-R, R)$
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je řadou spojitých funkcí, která podle věty 2.3.20 stejnoměrně konverguje na $\langle -r, r \rangle$
- tedy podle věty 2.2.21 číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

konverguje pro všechna $x \in \langle -r, r \rangle$ a pro její součet $F(x)$ na intervalu $\langle -r, r \rangle$ platí

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t) dt$$

- jelikož je $f(x)$ integrabilní a spojitou funkcí na omezeném intervalu $\langle 0, r \rangle$, platí pro funkci $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, že $F'(x_0) = f(x_0)$
- jelikož bylo x_0 zvoleno v intervalu $(-R, R)$ libovolně, je $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$ na celém tomto intervalu

2.3.25 Věta

Mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důkaz:

- označme R poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a R' poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

- První implikace:

- vezměme $x \in (-R', R')$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^{n-1}|$ konverguje
- odtud plyne, že konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$
- a dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in (-R', R')$ platí: $|a_n x^n| \leq |n a_n x^n|$
- tedy pro všechna $x \in (-R', R')$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutně konverguje, čili $R \geq R'$

- Druhá implikace:

- vezměme $x \in (-R, R)$ a zvolme $\varrho > 0$ tak, že $|x| < \varrho < R$
- víme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \varrho^n = 0$, resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \varrho^{n-1} = 0$
- odsud plyne, že $(a_n \varrho^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ musí nutně být omezenou posloupností
- tedy existuje $K > 0$ takové, že pro všechna n platí $|a_n \varrho^{n-1}| \leq K$
- srovnáme

$$|n a_n x^{n-1}| = n |a_n \varrho^{n-1}| \left| \frac{x}{\varrho} \right|^{n-1} \leq nK \left| \frac{x}{\varrho} \right|^{n-1}$$

- ovšem řada $\sum_{n=1}^{\infty} nK \left| \frac{x}{\varrho} \right|^{n-1}$ konverguje podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)K}{nK} \left| \frac{x}{\varrho} \right| = \left| \frac{x}{\varrho} \right| < 1$$

- a protože majoranta konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, čili $R' \geq R$

- Závěr: $(R \geq R') \wedge (R' \geq R) \Rightarrow R = R'$

2.3.26 Věta – o derivování mocninné řady člen po členu

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má kladný poloměr konvergence. Pro $x \in (-R, R)$ položme $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pak má funkce $s(x)$ na intervalu $(-R, R)$ spojitě derivace všech řádů a navíc

$$s^{(\ell)}(x) = \sum_{n=\ell}^{\infty} a_n n(n-1) \dots (n-\ell+1) x^{n-\ell}.$$

Důkaz:

- z předešlé věty a věty 2.3.24 víme, že na intervalu $(-R, R)$ je funkce $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ primitivní k funkci

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

- tudíž $s'(x) = \sigma(x)$
- o spojitosti není pochyb, neboť součet mocninné řady je na intervalu konvergence spojitou funkcí (viz věta 2.3.22)
- opakovanou aplikací předešlého dostáváme finální část dokazovaného tvrzení

2.3.27 Příklad

Vyšetřeme obor konvergence $\mathcal{O}$ mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}}{\sqrt{4+n^2}} x^n.$$

Poloměr konvergence zadané řady je $R = 5$, neboť

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{-n-1}}{5^{-n}} \frac{\sqrt{4+n^2}}{\sqrt{4+(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{n^2+4}{n^2+2n+5}} = \frac{1}{5}.$$

V pravém krajním bodě $x = 5$ má řada tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4+n^2}}.$$

Při vyšetřování její konvergence užijeme srovnávací kritérium:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} : \quad \frac{\sqrt{2}}{2n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} < \frac{1}{\sqrt{4+n^2}}.$$

Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n}$ diverguje, tedy diverguje i vyšetřovaná číselná řada. V bodě $x = -5$ má řada tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{4+n^2}}.$$

Tentokrát užijeme pro vyšetřování konvergence Leibnizovo kritérium. Jelikož platí rovnost $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4+n^2}} = 0$ i monotonie, číselná řada konverguje. A to nás vede k tvrzení, že zadaná mocninná řada má obor konvergence $\mathcal{O} = (-5, 5)$.

2.3.28 Příklad

Při použití rovnosti (jejíž důkaz je proveden pomocí tzv. Fubiniovy věty ve skriptech [16])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

vypočteme součty číselných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$$

Prostřednictvím jednoduchých úprav lehce získáme rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pro druhou řadu pak snadno platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2.4 Cvičení

Cvičení 2.1

Dokažte, že bodová konvergence řad funkcí je dědičná vlastnost.

Cvičení 2.2

Dokažte lemma 2.1.10.

Cvičení 2.3

Dokažte lemma 2.1.19.

Cvičení 2.4

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Cvičení 2.5

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}.$$

Cvičení 2.6

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \quad (x > 0).$$

Cvičení 2.7

Nalezněte obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$$

a vyšetřete její stejnoměrnou konvergenci na množině $(-\infty, -c)$, kde $c > 0$.**Cvičení 2.8**

Dokažte lemma 2.2.27.

Cvičení 2.9

Dokažte lemma 2.2.32

Cvičení 2.10

Vyšetřete obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Cvičení 2.11

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(2n+1)^2} \frac{\cosh(2nx) + \sinh(2nx)}{\cosh(2nx)}$$

na množině $\mathbf{R}^+$.**Cvičení 2.12**

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{x^2 + n^3} \right).$$

Cvičení 2.13

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$$

na množině $\langle \frac{1}{3}, 5 \rangle$.

Cvičení 2.14

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin(x)}$$

na množině $\mathbf{R}$.

Cvičení 2.15

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$$

na množině $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 2.16

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^4(3x^2+2)^n}{(x^2+1)^n(x^2+2)^n}$$

na jejím oboru konvergence. Vypočtěte, čemu se rovná limita posloupnosti částečných součtů zadané řady.

Cvičení 2.17

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} \left(\frac{|x|}{(8n^2 + x^2)^{3/2}} \right)$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.18

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3x^2 e^{-n|x|}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.19

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2|x|} \operatorname{arctg}(x)$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.20

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.21

Určete definiční obor a derivaci funkce

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{n^2} \right).$$

Cvičení 2.22

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n^5 x}{3^n(3n^2 + x^2)^2}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.23

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.

Cvičení 2.24

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x^n)x^n$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Cvičení 2.25

Rozhodněte, zda (a případně kde) platí následující rovnost:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \right)'.$$

Cvičení 2.26

Rozhodněte, zda platí následující rovnost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right) dx.$$

Cvičení 2.27

Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ konverguje na množině $\langle 0, 1 \rangle$ absolutně (bodově) i stejnoměrně, ovšem nikoliv regulárně.

Cvičení 2.28

Vyvráťte nebo dokažte tvrzení, že stejnoměrně konvergentní řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx^2}$$

nekonečně diferencovatelných funkcí má na $\mathbf{R}$ součet, který není diferencovatelný v bodě $x = 0$.

Cvičení 2.29

Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Cvičení 2.30

Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}.$$

Cvičení 2.31

Vypočtěte

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2} dx.$$

Cvičení 2.32

Dokažte lemma 2.2.34.

Cvičení 2.33

Dokažte lemma 2.3.7.

Cvičení 2.34

Stanovte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$

kde $p \in \mathbf{R}$ je parametr.

Cvičení 2.35

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

Cvičení 2.36

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Cvičení 2.37

Stanovte obor konvergence mocninné řady s parametrem $a > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n.$$

Cvičení 2.38

Stanovte obor konvergence mocninné řady s parametrem $a > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}.$$

Cvičení 2.39

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

Cvičení 2.40

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n.$$

Cvičení 2.41

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n,$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

Cvičení 2.42

V závislosti na hodnotě parametru $\beta \in \mathbf{R}^+$ vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\beta^n + n}.$$

Cvičení 2.43

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{a^n + b^n} x^n,$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

Cvičení 2.44

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \sqrt{\ln(n)}}.$$

Cvičení 2.45

Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-3)!!!}{(3n+1)!!!} (x-3)^n,$$

kde $n!!! := n(n-3)(n-6) \dots 1$.**Cvičení 2.46**

Vyšetřete obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25^n} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^3 (x+3)^{2n}.$$

Cvičení 2.47

Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} x^{2n}.$$

Cvičení 2.48

Rozhodněte, zda je možno řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{x + \sqrt{n^3 + x^2}}{n^{3/2}} \right)$$

derivovat na množině $(0, \infty)$ člen po členu.**Cvičení 2.49**

Ukažte, že řada funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

nekonverguje na svém oboru konvergence stejnoměrně, ačkoliv nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci je splněna.

Cvičení 2.50

Vypočítejte (a zdůvodněte)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^n x^{2n+1} dx.$$

Cvičení 2.51

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x}{3n + x^4}$$

na množině $M = (0, \infty)$.**Cvičení 2.52**

Nechť je dána řada funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Sestavte příslušnou posloupnost jejích částečných součtů a poté pomocí definice rozhodněte o stejnoměrné konvergenci zadané řady na množině $M = (0, \infty)$. Uvažte, jakého kritéria lze při tomto postupu užít.**Cvičení 2.53**

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^n}{2n}$$

a rozhodněte, zda na něm zadaná řada konverguje stejnoměrně. Korektně zdůvodněte!

Cvičení 2.54

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{x^2 + x^4 + n^4}{x^4 + n^4} \right)$$

na množině všech reálných čísel.

Cvičení 2.55

Abelovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x \ln(n)}{n(x^2 + n^2)}$$

na množině $M = \langle 0, \infty \rangle$.

Cvičení 2.56

Nalezněte obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^3 - x)^n}{6^n \ln(n)}.$$

Cvičení 2.57

Nalezněte řadu funkcí, která vznikne na množině $M = \langle -10^8, 10^8 \rangle$ derivací řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2 + x^2)}{\ln^2(n)}$$

člen po členu. Řádně ověřte, zda jsou splněny podmínky pro příslušnou záměnu.

Cvičení 2.58

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)^n}{n^n} x^n.$$

Cvičení 2.59

Vypočtete určitý integrál

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2x}{48 + n^2 x^4} dx.$$

Užijte Dirichletovo kritérium a znalosti rozvoje funkce $\ln(1+x)$.

Cvičení 2.60

Dirichletovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x \ln(n)}{n(x^2 + n^2)}$$

na množině $M = \langle 0, \infty \rangle$.

Cvičení 2.61

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+3)!} \frac{(x-1)^n}{2^n}.$$

Cvičení 2.62

Na množině $\mathbf{R}$ vyvrátte stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2},$$

víte-li, že jejím součtem je funkce

$$s(x) = \frac{\pi x \cotgh(\pi x) - 1}{2x}.$$

Cvičení 2.63

Abelovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^n}{2n+1}$$

na množině $M = \langle 0, 1 \rangle$. Dále popište, jakým jiným postupem lze stejnoměrnou konvergenci pro tento případ vyšetřit.

Cvičení 2.64

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx \ln(n)}{4n^4 + x^4 + n^2 x^2}$$

na množině $M = (-\infty, \infty)$.

Cvičení 2.65

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^2}{\sqrt{n^6 + x^6}}$$

na množině $\mathbf{R}$. Řádně zdůvodněte!

Kapitola 3

Taylorův rozvoj funkce jedné proměnné

V této kapitole se budeme zabývat hledáním polynomických funkcí, které jsou v jistém smyslu ekvivalentní vybraným funkcím jedné proměnné. Jak uvidíme později, bude možno některé funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ nahradit na okolí vybraného bodu $c \in \text{Dom}(f)$ mocninnou řadou tak, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = f(x).$$

Takové funkce, pro které zmíněný mocninný ekvivalent existuje, budeme nazývat funkcemi analytickými. Náhrada libovolné funkce mocninnou řadou má celou řadu výhod, především při odhadování jejích hodnot, počítání limit apod.

3.0.1 Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}_0$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Pak funkci $g(x) = ax^n$ nazýváme *monomem stupně n* . Je-li navíc $c \in \mathbf{R}$ zvoleno pevně, pak funkci $f(x) = a(x - c)^n$ nazýváme *monomem stupně n centrovaným do bodu c* .

3.1 Taylorův vzorec

Nejprve probereme možnost aproximovat chování libovolné funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ jedné proměnné vhodným polynomem. Přitom se také budeme zabývat jednak otázkou, jak takový polynom získat a jednak, jak přesné aproximace jsme touto metodou schopni dosáhnout.

3.1.1 Věta – Taylorova (o Taylorově vzorci)

Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $f(x)$ je funkce třídy $C^n(\langle a, b \rangle)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že v každém bodě otevřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje také $f^{(n+1)}(x)$. Nechť dále c, x jsou dva různé body ležící v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom existuje bod ξ , ležící mezi body c a x tak, že platí

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_{n+1}(x), \quad (3.1)$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}. \quad (3.2)$$

Důkaz:

- označme J uzavřený interval s krajními body c a x
- položme

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

- zřejmě $F(x) = 0$ a $F(c) = R_{n+1}(x)$

- uvnitř intervalu J má funkce $F(t)$ derivaci

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) = & -\dot{f}(t) - \left(-\dot{f}(t) + \ddot{f}(t) \frac{x-t}{1!} \right) - \left(-\ddot{f}(t) \frac{x-t}{1!} + f^{(3)}(t) \frac{(x-t)^2}{2!} \right) - \dots - \\ & - \left(-f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) - \left(-f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^n}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

- v této rovnosti se první člen v každé závorce zruší se členem stojícím před ním
- proto

$$\dot{F}(t) = -f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}$$

- protože $F(t)$ má derivaci na intervalu J , je tudíž na něm $F(t)$ spojitá
- nechť $\varphi(t)$ je libovolná funkce spojitá na intervalu J , mající na $J^\circ = (a, b)$ derivaci
- podle jisté věty (viz [10], strana 274, věta 234) existuje uvnitř intervalu J° číslo ξ tak, že

$$\frac{F(x) - F(c)}{\varphi(x) - \varphi(c)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

- to značí, že

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{\varphi'(\xi)} \frac{(x - \xi)^n}{n!}$$

- toto tvrzení platí pro jakoukoli funkci $\varphi(x)$ splňující výše uvedené požadavky
- zvolíme-li $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$, dostáváme

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - c)^{n+1}}{(n+1)(x - \xi)^n} \frac{(x - \xi)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}$$

3.1.2 Definice

Rovnost (3.1) nazýváme *Taylorovým vzorcem* funkce $f(x)$ v bodě c a funkci (3.2) *Lagrangeovým zbytkem* v *Taylorově vzorci* funkce $f(x)$ po n -tém členu. Polynom

$$\mathcal{T}_f^n(x) := f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

pak nazýváme *Taylorovým polynomem* řádu n funkce $f(x)$ v bodě c . Je-li $c = 0$, užíváme ve všech právě definovaných pojmech místo označení Taylorův označení *Maclaurinův*.

3.1.3 Poznámka

Taylorův polynom řádu n nemusí nutně být stupně n . Je-li totiž $f^{(n)}(c) = 0$, nejvyšší $(n-1)$ -tá mocnina v polynomu $\mathcal{T}_f^n(x)$ nevystupuje, a $\mathcal{T}_f^n(x)$ má tudíž stupeň nižší než n .

3.1.4 Příklad

Pokusme se užitím teorie o Taylorových rozvoích vyčíslit hodnotu čísla $\ln(3/2)$. Užijeme pro tento účel např. funkce $f(x) = \ln(x + 1)$. Nalezneme nejprve Maclaurinův polynom řádu např. $n = 4$ a vyčíslíme pak příslušnou chybu. Ve větě 3.1.1 tedy klademe $a = -1/2$, $b = 1$ (například), dále $c = 0$ a $x = 1/2$, neboť chceme vyčíslit hodnotu $\ln(3/2) = \ln(1/2 + 1)$. Snadno pak nahlédneme, že $f(0) = 0$ a dále $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$ a $f^{(4)}(0) = -6$. Odtud pak

$$\ln(x + 1) = \mathcal{T}_f^4(x) + R_{n+1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_{n+1}(x)$$

a následně

$$\ln(3/2) \approx \mathcal{T}_f^4(1/2) = \frac{77}{192} \approx 0.401042.$$

Tím jsme získali odhad čísla $\ln(3/2)$. Zbývá ale rozřešit otázku, do jaké míry je tento odhad přesný. Skutečná hodnota zbytku je sice teoreticky vyjádřena ve větě 3.1.1 jako

$$R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-c)^5,$$

ale o skutečné hodnotě čísla ξ víme jen to, že leží kdesi v intervalu $(0, 1/2)$. Tedy je jasné, že skutečnou chybu nejsme schopni najít. Zkusíme tedy nalézt alespoň odhad této chyby. Označme ho např. $\mathcal{R}_5(x)$. Chceme, aby $R_5(x) \leq \mathcal{R}_5(x)$. Jelikož $x = 1/2$ a $c = 0$, platí

$$R_5(1/2) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{5} \frac{1}{(\xi+1)^5} \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Jelikož je funkce $g(\xi) = (\xi+1)^{-5}$ zjevně klesající, nastává její supremum, které hledáme na intervalu $(0, 1/2)$, právě v jeho levém krajním bodě. Tedy

$$\mathcal{R}_5(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \sup_{\xi \in (0, 1/2)} g(\xi) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.00625.$$

Uzavíráme tedy, že $\ln(3/2) = 0.4010 \pm 0.0063$, což plně odpovídá skutečnosti, neboť skutečnou hodnotou je $\ln(3/2) = 0.405465\dots$. Nyní ponecháváme na čtenáři, aby rozvážil, jak dosáhnout zpřesnění dosaženého výsledku.

3.2 Teorie Taylorových řad

Zkonstruujeme nyní Maclaurinovy rozvoje všech elementárních funkcí. Za tímto účelem nejprve vyslovíme důležitou větu, jež bývá nazývána větou Taylorovou.

3.2.1 Definice

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na jistém okolí $\mathcal{U}(c)$ bodu $c \in \mathbf{R}$. Nechť existuje posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=0}^\infty$ tak, že na tomto okolí platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n. \quad (3.3)$$

Potom řadu (3.3) nazýváme *Taylorovou řadou funkce $f(x)$ se středem v bodě $c \in \mathbf{R}$* a čísla $a_0, a_1, a_2, \dots$ *Taylorovými koeficienty*. Speciálně pro $c = 0$ mluvíme o tzv. *Maclaurinově řadě*. Funkci $f(x)$, kterou lze na nějakém okolí bodu c zapsat ve tvaru (3.3), nazýváme *funkcí analytickou v bodě c* .

3.2.2 Věta – Taylorova (o Taylorových koeficientech)

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je analytická v bodě $c \in \mathbf{R}$. Potom funkce $f(x)$ má v bodě c derivace všech řádů a pro koeficienty a_n její Taylorovy řady se středem v bodě c platí:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c). \quad (3.4)$$

Důkaz:

- předpokládejme, že na jistém $\mathcal{U}_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ platí rovnost (3.3)
- to tedy značí, že pro $\varepsilon \in (0, \delta)$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ stejnoměrně na $\langle c-\varepsilon, c+\varepsilon \rangle$
- totéž platí také pro všechny řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} (a_n(x-c)^n)$ získané k -tou derivací původní řady člen po členu
- odtud plyne, že součet dotčené řady (tedy funkce $f(x)$) je třídy $C^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon(c))$
- dosadíme-li do rovnice (3.3) $x = c$, dostáváme $f(c) = a_0$, čili $a_0 = \frac{f^{(0)}(c)}{0!}$
- postupným derivováním rovnosti (3.3) člen po členu získáme pro k -tou derivaci funkce $f(x)$ rovnost

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n(x-c)^{n-k}$$

- po dosazení $x = c$ dostáváme $f^{(k)}(c) = k! a_k$, a tedy $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$

3.2.3 Poznámka

Po důkazu předešlé věty lze (poněkud populárněji) tvrdit, že Taylorova řada je vlastně Taylorův rozvoj do polynomu nekonečného stupně. Tedy každou analytickou funkci lze na okolí bodu rozepsat jako lineární kombinaci prvků nekonečné množiny $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$. Prostor analytických funkcí společně s jejich sčítáním a násobením skalárem proto tvoří nekonečnédimenzionální vektorový prostor s bází $(1, x, x^2, x^3, x^4, \dots)$.

3.2.4 Lemma

Funkce $f(x)$ má Taylorovu řadu se středem v bodě $x = c$ rovnou $f(c) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ právě tehdy, když má funkce $f'(x)$ Taylorovu řadu se středem v bodě $x = c$ rovnou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-c)^{n-1}$.

3.2.5 Definice

Nechť $a \in \mathbf{R}$ a $n \in \mathbf{N}$. Pak definujeme *zobecněné kombinační číslo* předpisem

$$\binom{a}{0} := 1, \quad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}.$$

3.2.6 Definice

Nechť $n, \ell \in \mathbf{N}$. Pak ℓ -násobným faktoriálem čísla n rozumíme číslo definované předpisem

$$n \overbrace{!!!!!!}^{\ell \text{ krát}} := \begin{cases} 1 & \dots \quad n < \ell, \\ \prod_{i=0}^{\lceil \frac{n}{\ell} \rceil - 1} (n - \ell i) & \dots \quad n \geq \ell. \end{cases}$$

3.2.7 Příklad

Nechť např. $n = 11$ a $\ell = 3$. Pak trojným faktoriálem jedenácti je dle předchozí definice číslo

$$11!!! = \prod_{i=0}^{\lceil \frac{11}{3} \rceil - 1} (11 - 3i) = \prod_{i=0}^3 (11 - 3i) = 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 = 880.$$

3.2.8 Lemma

Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ platí rovnosti $2^n n! = (2n)!!$, $3^n n! = (3n)!!!$, $4^n n! = (4n)!!!!$ atd.

3.2.9 Příklad

Postupně budeme hledat Maclaurinovy rozvoje elementárních funkcí. Zahájíme základními goniometrickými funkcemi $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Funkce $\sin(x)$ má v bodě $c = 0$ nenulové pouze liché derivace (jde o lichou funkci), tedy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (3.5)$$

zatímco u funkce $\cos(x)$ jsou nenulové pouze sudé derivace (sudá funkce). Odtud

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (3.6)$$

V obou případech je poloměrem konvergence plus nekonečno, jak se lze přesvědčit triviálním výpočtem, a proto je příslušným oborem konvergence množina všech reálných čísel, tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Proto, abychom ale mohli s určitostí tvrdit, že ve vztazích (3.5) a (3.6) je možno psát rovnítka, bude ještě nutno rozhodnout, zda součtem příslušné Maclaurinovy řady je skutečně výchozí funkce. To bude námětem dalšího textu (viz poznámka 3.2.17 a dále).

3.2.10 Příklad

Hledejme nyní Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = e^x$. To je velice jednoduché, neboť platí, že $f^{(n)}(x) = e^x$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, potažmo $f^{(n)}(0) = 1$. Proto je příslušnou Maclaurinovou řadou řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Opět zcela triviálně nahlédneme, že řada konverguje pro všechna reálná x , tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

3.2.11 Příklad

Nechť nyní $f(x) = \ln(1+x)$. Snadno pak pro $n \in \mathbf{N}$ ukážeme rovnosti

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

Proto je hledanou Maclaurinovou řadou funkce $f(x) = \ln(1+x)$ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \quad (3.7)$$

Vypočteme nejprve její poloměr konvergence. To lze snadno, neboť

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Vyšetření bodové konvergence v krajních bodech intervalu konvergence, a sice v bodech $|x| = R = 1$, je banální. Uzavíráme proto, že oborem konvergence řady (3.7) je množina $\mathcal{O} = (-1, 1)$.

3.2.12 Příklad

Při hledání Maclaurinovy řady funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ uijeme drobného zjednodušení. Derivací funkce $f(x)$ získáme funkci $f'(x) = (1+x^2)^{-1}$, na kterou lze nahlížet jako na součet geometrické řady mající kvocient $-x^2$ a první člen roven jedné. Takovou řadou je jistě řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Proto tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Zpětnou integrací (při níž využijeme s výhodou platnosti věty 2.3.24) získáme pak hledanou rovnost

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + C,$$

kde ale $C = 0$ díky skutečnosti, že $\operatorname{arctg}(0) = 0$. Zbývá vyšetřit obor konvergence. To je opět snadné, neboť označíme-li v souladu s poznámkou 2.3.14 $t = x^2$, máme

$$R_t^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1 \quad \Rightarrow \quad R_t = 1 \quad \Rightarrow \quad R_x = \sqrt{R_t} = 1.$$

Pak snadno nahlédneme, že $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$.

3.2.13 Příklad

V tomto příkladě budeme hledat Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr. Snadno určíme, že

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Tedy $f(0) = 1$ a pro $n \in \mathbf{N}$ platí: $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$. Odsud

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Užijeme-li definice 3.2.5, dosáváme pak zeštíhlený zápis tvaru

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Určení oboru konvergence bude poněkud rozsáhlejší, než jsme byli zvyklí v předešlých úlohách, neboť obor konvergence $\mathcal{O}$ bude závislý na hodnotě parametru α . Zahájíme nejprve nejjednodušším případem, kdy $\alpha \in \mathbf{N}$. Tehdy jsou ale od určitého n všechna zobecněná kombinační čísla nulová. Tudíž zkoumaná řada je fakticky konečná, proto konverguje všude v $\mathbf{R}$. Závěr tedy je, že $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

Tentokrát vyberme hodnotu parametru α z množiny kladných reálných čísel (ovšem vyjma již zkoumaných přirozených čísel), tj. $\alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$. Poloměr konvergence zkoumané řady je v tomto případě roven jedné ($R = 1$), neboť

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1.$$

V pravém krajním bodě $x = R = 1$ vyšetříme absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$ Raabeovým kritériem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1 \right) = 1 + \alpha > 1.$$

Povšimněme si, že pro $n \rightarrow \infty$ číslo n od určité hodnoty převyší pevně zvolené $\alpha > 0$, proto se absolutní hodnota upravuje tak, jak je uvedeno výše. Z Raabeova kritéria konverguje tedy jak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$. Uzavíráme, že pro $\alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$ je oborem konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

uzavřený interval $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$.

Nyní přejdeme k záporným hodnotám parametru α , tj. $\alpha < 0$. Poloměr konvergence je i v tomto případě roven jedné (viz předešlý případ). Nejprve budeme zkoumat konvergenci této řady v levém krajním bodě $x = -1$. Zde platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+n-1)}{n!},$$

kde jsme položili $\beta := -\alpha > 0$. Jde o řadu s kladnými členy. Užijeme opětovně Raabeovo kritérium

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+n-1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+n-1)(n+\beta)} - 1 \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n+1}{n+\beta} - 1 \right) = 1 - \beta < 1. \end{aligned}$$

Řada tudíž diverguje. Pro $x = 1$ se pokusíme prokázat konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+n-1)}{n!}$$

Leibnizovým kritériem. Leibnizova podmínka $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ je splněna, pokud

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+n-1)(n+\beta)}{(n+1)!} < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+n-1)}{n!},$$

resp. pokud

$$n + \beta < n + 1,$$

čili $\beta < 1$. Pro $\beta \geq 1$, tj. $\alpha \leq -1$, řada diverguje. Pro $\beta \in (0, 1)$ je ještě nutno ověřit druhou Leibnizovu podmínku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+n-1)}{n!} = 0.$$

Ta ale platí, jak jsme vypočetli v příkladu 1.3.19. Závěrem tedy je, že

$$\begin{aligned} \alpha \leq -1 \quad \dots \quad \mathcal{O} &= (-1, 1) \\ \alpha \in (-1, 0) \quad \dots \quad \mathcal{O} &= (-1, 1). \end{aligned}$$

Pro úplnost dodáváme, že předešlé obory konvergence lze stanovit také užitím alternativního Raabeova kritéria 2.1.35.

3.2.14 Příklad

Nalezněme nyní Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \arcsin(x)$. Funkci nejprve zderivujeme a užijeme výsledku příkladu 3.2.13. Odtud

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Navíc

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2}}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Tedy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Opět zintegrujeme s výsledkem

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C,$$

kde $C = 0$, neboť $\arcsin(0) = 0$. Uzavíráme tedy tvrzením, že hledanou řadou je řada

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Nalezněme ještě obor konvergence této řady. Poloměr konvergence je roven jedné, neboť (také za použití poznámky 2.3.14) platí

$$R_{x^2}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{2n+1}{2n+3} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = 1 \Rightarrow R_{x^2} = 1 \Rightarrow R_x = 1.$$

Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$ a $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$ z obou krajních bodů intervalu konvergence konvergují absolutně podle Raabeova kritéria, jelikož

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Uzavíráme tedy, že $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$.

3.2.15 Poznámka

Pro přehlednost v této poznámce sumarizujeme Maclaurinovy řady vybraných elementárních funkcí.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \mathcal{O} = \begin{cases} \mathbf{R} & \dots & \alpha \in \mathbf{N}_0 \\ \langle -1, 1 \rangle & \dots & \alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N} \\ (-1, 1) & \dots & \alpha \in (-1, 0) \\ (-1, 1) & \dots & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

3.2.16 Příklad

Pokusme se určit Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = 1 + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (3.8)$$

a rozhodnout o jejím oboru konvergence. Nejprve tedy funkci $f(x)$ zderivujeme a využijeme již známý rozvoj funkce $(1+x)^a$ pro $a = -1/2$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Zpětným integrováním dostáváme

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Pomocí známé hodnoty funkce $f(0) = 1$ určíme hodnotu konstanty $C = 1$. Dále vyšetříme obor konvergence. Pro převrácenou hodnotu poloměru konvergence vypočteme

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{2n+1}{2n+3} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = 1.$$

Proto je poloměr konvergence roven jedné, čili $R = 1$. V levém krajním bodě $x = -R = -1$ má redukovaná řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}.$$

O absolutní konvergenci této číselné řady rozhodneme Raabeovým kritériem. Jelikož

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

podle Raabeova kritéria řada konverguje. V pravém krajním bodě musí řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$$

také konvergovat, a to podle věty o absolutní konvergenci číselných řad. Uzavíráme proto, že hledanou Maclaurinovou řadou funkce (3.8) je řada

$$1 + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

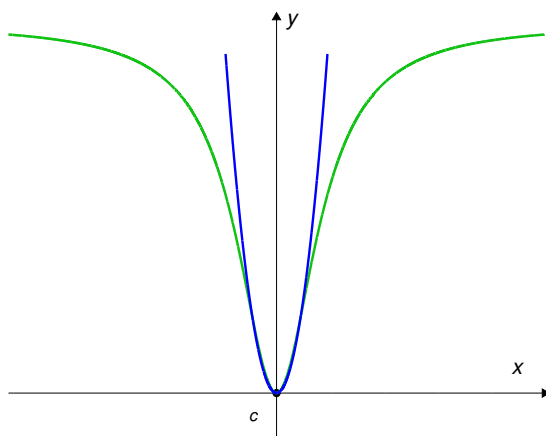
s definičním oborem $\text{Dom}(f) = \mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$.

3.2.17 Poznámka

Jestliže má funkce $f(x)$ v bodě $c \in \mathbf{R}$ všechny derivace, potom ji můžeme odhadnout mocninnou řadou na pravé straně rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n. \quad (3.9)$$

Její součet však nemusí obecně být pro každé $x \in \mathcal{O}$ roven hodnotě $f(x)$. To je zcela zásadní poznatek a lze ho nahlédnout z faktu, že změníme-li funkci $f(x)$ vně jistého okolí bodu c (viz ilustrační obrázek níže), na jejích derivacích v bodě c se nic nezmění. Tedy Taylorova řada bude táž.



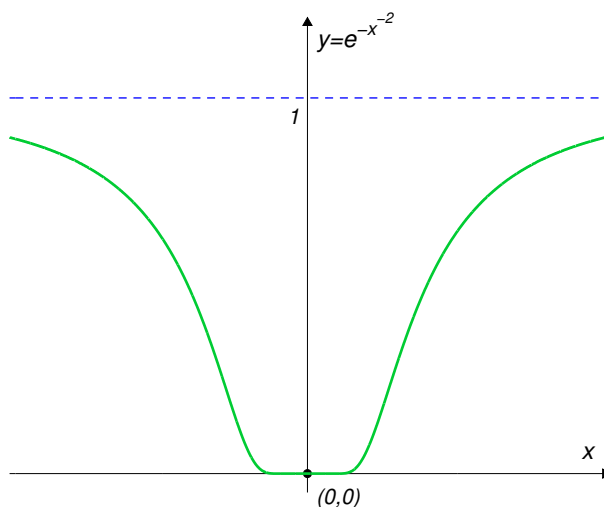
Obrázek 3.11

Dvě funkce mající stejný Taylorův polynom v bodě $x = c$.

3.2.18 Příklad

Ukážeme nyní funkci $f(x)$, pro kterou bude rovnost (3.9) platit dokonce pouze v bodě c , ačkoliv pro její formálně vypočtenou Taylorovu řadu platí $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Definujme funkci $f(x)$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \dots \quad x \neq 0 \\ 0 & \dots \quad x = 0. \end{cases}$$



Obrázek 3.12

Graf funkce, která není analytická v bodě $x = 0$.

Budeme nyní hledat její Maclaurinovu řadu. Definujeme nejprve funkci

$$g(x) = \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (m \in \mathbf{N}_0).$$

Budeme zkoumat její limity v nule. Po substituci $x = t^{-1}$ a násobné aplikaci l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^m e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^m}{e^{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mt^{m-2}}{2e^{t^2}} = \frac{m(m-2)t^{m-4}}{4e^{t^2}} = \dots = 0.$$

A podobně lze ukázat, že také $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 0$. Tedy celkem $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Funkce $f(x)$ má následující derivace

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

a tak dále. Tyto jsou tvořeny pouze výrazy typu funkce $g(x)$. Proto pro všechna přirozená $n \in \mathbf{N}_0$ platí, že $f^{(n)}(0) = 0$. Maclaurinovým rozvojem funkce $f(x)$ je proto řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0,$$

která konverguje na množině všech reálných čísel, tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Jedná se, jak je patrné, o nulovou funkci. Posuďte nyní sami, jak velice se formálně vypočtená Maclaurinova řada liší od zadané funkce.

3.2.19 Poznámka

Při hledání rozvoje funkce $f(x)$ v Taylorovu řadu (v bodě c) je tedy třeba provést následující kroky:

- vypočítat hodnoty všech derivací funkce, tj. $f^{(n)}(c)$
- vypočítat hodnoty Taylorových koeficientů
- sestavit příslušnou Taylorovu řadu, tj. dosadit hodnoty Taylorových koeficientů do předpisu řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad (3.10)$$

- vyšetřit obor konvergence $\mathcal{O}$ řady (3.10), neboť pouze tam eventuálně může být řada (3.10) rovna funkci $f(x)$
- rozhodnout, zda součtem řady (3.10) je skutečně výchozí funkce $f(x)$, a kde se obě funkce (součtová funkce a výchozí funkce $f(x)$) rovnají

Pouze za těchto předpokladů lze prohlásit, že řada (3.10) je Taylorovou řadou funkce $f(x)$ v bodě c a že pro všechna $x \in \mathcal{U}(c)$ platí rovnost (3.9). Jakými metodami lze rozhodnout, zda řada (3.10) skutečně konverguje k funkci $f(x)$? O tom bude pojednávat následující text.

3.2.20 Věta – kritérium analytičnosti

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $c \in \mathbf{R}$ derivace všech řádů. Potom mocninná řada (3.10) je konvergentní a má součet $f(x)$ právě pro taková $x \in \mathbf{R}$, pro která platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$, kde $R_{n+1}(x)$ je zbytek po n členech Taylorova vzorce (viz věta 3.1.1).

Důkaz:

- z věty 3.1.1 plyne, že

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x-c)^i + R_{n+1}(x) = \mathcal{T}_f^n(x) + R_{n+1}(x)$$

- řada (3.10) je konvergentní a má součet $f(x)$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_f^n(x) = f(x)$, t.j. když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - \mathcal{T}_f^n(x)] = f(x) - f(x) = 0$$

- tím je tvrzení dokázáno

3.2.21 Věta – o limitě Lagrangeova zbytku

Nechť funkce $f(x)$ má na nějakém okolí $\mathcal{U}(c)$ bodu $c \in \mathbf{R}$ spojitě derivace všech řádů, tj. $f(x) \in C(\mathcal{U}(c))$. Předpokládejme dále, že existují čísla $K, M \in \mathbf{R}$ a $n_0 \in \mathbf{N}$ taková, že pro každé $x \in \mathcal{U}(c)$ a pro všechna $n > n_0$ platí

$$|f^{(n)}(x)| \leq KM^n.$$

Potom pro Lagrangeův zbytek $R_{n+1}(x)$ v Taylorově vzorci platí $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$, a to pro každé $x \in \mathcal{U}(c)$.

Důkaz:

- vyjdeme z Lagrangeova tvaru zbytku (viz věta 3.1.1)

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

- za daných předpokladů platí

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{KM^{n+1}}{(n+1)!} |x-c|^{n+1}$$

- chceme nyní ukázat, že limita pravé strany je nula
- to prokážeme tak, že nejprve dokážeme konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{KM^{n+1}}{(n+1)!} |x-c|^{n+1} \quad (3.11)$$

a poté užijeme nutné podmínky bodové konvergence 2.1.15

- podle ní bude pak platit, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{KM^{n+1}}{(n+1)!} |x-c|^{n+1} = 0,$$

a tudíž také $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$, a z věty 3.2.20 pak přímo vyplývá dokazované tvrzení

- jak je patrné, řada (3.11) konverguje například z podílového kritéria, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{KM^{n+2} |x-c|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{KM^{n+1} |x-c|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n+2} |x-c| = 0 < 1.$$

3.2.22 Poznámka

Za zmínku stojí také následující úvaha. Je-li součtem řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ funkce $s(x)$, pak Taylorovou řadou funkce $s(x)$ v bodě c je pouze a jedině řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. To značí, že jednoduchou možností, jak ověřit, je-li některá z řad Taylorovou řadou dané funkce, je prostě zjistit její součet a porovnat ho s výchozí funkcí. Rovná-li se tyto, pak byl proces sestavování Taylorovy řady úspěšný. Jak bylo demonstrováno v příkladě 3.2.18, ne vždy povede tento proces k vysněnému cíli. Vyslovíme, nicméně, následující větu, která matematicky shrnuje sérii předešlých úvah.

3.2.23 Věta

Nechť je dána mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad (3.12)$$

na množině $\mathcal{U}(c)$. Nechť je funkce $s(x)$ součtem této řady na množině $\mathcal{U}(c)$. Pak Taylorovou řadou funkce $s(x)$ v bodě c je právě řada (3.12).

Důkaz:

- z Taylorovy věty 3.2.2 víme, že každá funkce má nejvýše jednu Taylorovu řadu (v jednom pevně zvoleném bodě c)
- z předpokladů věty víme, že na množině $\mathcal{U}(c)$ platí rovnost $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$

- dále snadno $s(c) = a_0$, $s'(c) = a_1$, $s''(c) = 2a_2$ atd, tedy celkem $s^{(n)}(c) = n! a_n$
- Taylorova řada funkce $s(x)$ má tudíž podle věty 3.2.2 tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{n!} (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = s(x)$$

- to kompletuje důkaz

3.2.24 Příklad

Završíme nyní úlohu hledání Maclaurinovy řady funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Jelikož pro jejich derivace zcela jistě platí nerovnosti

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} (\sin(x)) \right| = \left| \frac{d^n}{dx^n} (\cos(x)) \right| \leq 1,$$

jsou všechny derivace omezené na $\mathbf{R}$, a tudíž podle věty 3.2.21 je limita Lagrangeova zbytku v Taylorově vzorci nulová, a máme tedy (skutečně až nyní na tomto místě) oprávnění vložit mezi symbol funkce a příslušnou řadu znaménko rovnosti. Uzavíráme tedy slavnostně celý rozsáhlý výpočet jednoduchými rovnostmi

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

3.2.25 Příklad

Podobně jako v předcházejícím příkladu se nyní pokusíme ověřit, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.13}$$

je skutečně Maclaurinovou řadou exponenciální funkce e^x . Vycházíme přitom z výsledků příkladu 3.2.10. K dosažení našeho cíle užijeme věty 3.2.23 a poznámky 3.2.22. Hledejme tedy funkci $s(x)$, která je součtem řady (3.13). To jest

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Na oboru konvergence $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ lze řadu derivovat člen po členu. Takto získáme diferenciální rovnici

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = s(x).$$

Řešením diferenciální rovnice $s'(x) - s(x) = 0$ je, jak je jednak triviálně patrné a jednak bude důkladně probráno v následující kapitole, systém funkcí $s(x) = C e^x$. Konstanta C musí být zvolena tak, aby ve vybraném bodě $x = \gamma$ korespondovaly hodnoty $s(\gamma)$ a $C e^\gamma$. Zvolme, jako budeme ostatně činit téměř vždy, $\gamma = 0$. Srovnáváme tedy hodnoty funkcí $s(x)$ a $C e^x$ v bodě nula. Snadno pak zjistíme, že integrační konstanta C musí být jednotková, neboť jedině tehdy je

$$s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \dots = 1.$$

Uzavíráme, že hledanou funkcí je funkce $s(x) = e^x$, a to prokazuje fakt, že

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

3.2.26 Příklad

U funkce $f(x) = \ln(1+x)$ je situace ještě jednodušší. Její derivací totiž získáme sadu rovností

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad (3.14)$$

Zde jsme využili faktu, že pro $|x| < 1$ je součtem geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ právě funkce $\frac{1}{1+x}$. Čteno v obráceném pořadí to vlastně znamená, že Maclaurinovou řadou funkce $\frac{1}{1+x}$ je řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. Zpětnou integrací vztahu (3.14) pak snadno zjišťujeme, že

$$\ln(1+x) + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m},$$

kde C je doposud hledanou integrační konstantou. Pro $x = 0$ musí ale být tato konstanta volena tak, aby $f(0) = 0$. Proto $C = 0$ a platí

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Pro úplnost dodáváme: Platnost tohoto vztahu pro $x = 1$ vyplývá z Abelovy věty 2.3.23.

3.2.27 Poznámka

Obdobně lze prokázat, že pro všechny elementární funkce z poznámky 3.2.15 platí v příslušných vztazích skutečně rovnosti.

3.2.28 Příklad

Určeme, jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet řady

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{3^m x^{m+1}}{m!},$$

jsou-li x volena z množiny kladných reálných čísel. Součet řady vypočítáme takto:

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{3^m x^{m+1}}{m!} = -x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-3x)^m = -x e^{-3x}, \quad \text{Dom}(s) = \mathbf{R}.$$

Protože platí $s(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = 0$, $f(x) \in C(\mathbf{R}^+)$ a $s(x) \leq 0$, nabývá $s(x)$ na $\mathbf{R}^+$ jistě svého minima. Rovnost $s'(x) = 0$ je splněna pouze v bodě $x = 1/3$, jak se lze snadno přesvědčit, který je zjevně bodem lokálního i globálního minima. Proto $s_{\min} = s(1/3) = -\frac{1}{3}e^{-1}$.

3.2.29 Příklad

Vypočítejme, čemu se také rovná součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

z příkladu 2.3.28. Necht'

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}.$$

Vidíme, že díky vlastnostem mocninných řad lze funkci $s(x)$ derivovat na intervalu $(-1, 1)$ s následujícím výsledkem

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2n-1}.$$

Dále zavedeme novou funkci $h(x) := x s'(x)$. Pro ni na intervalu $(-1, 1)$ platí

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Zintegrujeme-li (rozkladem na parciální zlomky) získanou funkci, máme

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C,$$

kde zjevně $C = 0$. Odsud pak pro $x \in (-1, 1)$

$$s(x) = \int_c^x \frac{1}{2t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) dt.$$

Jelikož ale platí $s(0) = 0$, je konstanta $C = 0$. Zadaná číselná řada má tutéž hodnotu jako $s(1)$. Použitím Abelovy věty 2.3.23 dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \int_0^x \frac{1}{2t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{2t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) dt.$$

Metodou per partes lze ještě ukázat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt.$$

Tento výpočet není zcela triviální, neboť vyžaduje několikanásobnou aplikaci l'Hospitalova pravidla. Doporučujeme čtenáři daný výpočet provést.

3.2.30 Příklad

Taylorových rozvojů lze rovněž použít k výpočtu limit. Uvažme např. limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right].$$

Substitucí $y = x^{-1}$ přejde tato limita na

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{(1 - y + \frac{1}{2}y^2) e^y - \sqrt{1 + y^6}}{y^3}.$$

Dále užijeme známých rozvojů (viz poznámka 3.2.15)

$$e^y \approx 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!}$$

$$\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+y^6} \approx 1.$$

Po dosazení pak snadno vychází, že zadaná limita má hodnotu

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{6}y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} a_n y^n}{y^3} = \frac{1}{6} + \lim_{y \rightarrow 0+} \sum_{n=4}^{\infty} a_n y^{n-3} = \frac{1}{6}.$$

3.2.31 Příklad

Hledejme Taylorovu řadu funkce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{5+x}}$$

v bodě $x = 3$ a vyšetřeme její obor konvergence. Není velmi obtížné zjistit, že

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n} (5+x)^{-\frac{3n+1}{3}}, \quad g^{(n)}(3) = (-1)^n \frac{1}{2} \frac{(3n-2)!!!}{24^n}.$$

Proto je hledanou Taylorovou řadou funkce $g(x)$ řada

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{24^n n!} (x-3)^n.$$

Pro převrácenou hodnotu jejího poloměru konvergence pak platí

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)!!!}{24^{n+1} (n+1)! (3n-2)!!!} \frac{24^n n!}{(3n-2)!!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{24(n+1)} = \frac{1}{8}.$$

Poloměrem konvergence je tedy $R = 8$. Je dobré si nyní uvědomit, že krajní body intervalu konvergence jsou v tomto případě $x_\ell = -5$ a $x_\phi = 11$. V těchto dvou krajních bodech mají příslušné číselné řady následující tvary.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!}. \quad (3.15)$$

Konvergenci obou řad vyšetříme alternativním Raabeovým kritériem 2.1.35. Jelikož je hodnota limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!} \frac{(3n+3)!!!}{(3n+1)!!!} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3n+3}{3n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

z intervalu $(0, 1)$, je z alternativního Raabeova kritéria jasné, že řada (3.15) konverguje pouze relativně, tudíž že příslušným oborem konvergence je množina $\mathcal{O} = (-5, 11)$.

3.2.32 Poznámka

V této poznámce vyslovíme tzv. *zobecněnou binomickou větu*. Užijeme již dokázané rovnosti

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

platné zcela obecně přinejmenším na intervalu $(-1, 1)$. Pokusme se sestavit analogii binomického rozvoje

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

doposud platnou pouze pro $n \in \mathbf{N}$. Snadno nahlédneme, že pro $a+b > 0$

$$(a+b)^\gamma = a^\gamma \left(1 + \frac{b}{a}\right)^\gamma = a^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma}{i} \left(\frac{b}{a}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma}{i} a^{\gamma-i} b^i.$$

Tato rovnost platná přinejmenším pro taková $a, b \in \mathbf{R}$, pro něž $|b| \neq |a|$ a $a+b > 0$, představuje zobecnění binomické věty tak, jak ji čtenář dosud vnímal. Doporučujeme také zvážit proč je v předchozím vztahu nerovnítko ve výrazu $|b| \neq |a|$ namísto na první pohled očekávaného znaku menší než. Analogicky:

$$(a+b)^\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma}{i} a^i b^{\gamma-i}.$$

3.2.33 Příklad

Pokusme se nalézt součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n}$. Označme ho například $s(x)$. Jednoduše lze zjistit, že definičním oborem hledaného součtu bude množina $\text{Dom}(s) = \mathcal{O} = (-1, 1)$, neboť poloměr konvergence je roven jedné a divergence v krajních bodech $|x| = 1$ je zřejmá. Označme nyní $s(x) = x f(x)$, kde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$. Jelikož je podle příslušné věty možno tuto řadu na intervalu $\mathcal{O}$ derivovat člen po členu, získáváme rovnost

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = \frac{x}{1-x^2},$$

kde jsme na poslední sumu nahlédli jako na geometrickou řadu s kvocientem x^2 a prvním členem rovným x . Rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} - \frac{\frac{1}{2}}{1+x},$$

a proto

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C,$$

kde $C = 0$, jak lze určit z faktu, že musí platit $f(0) = 0$. Pak tedy $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$, odkud pak

$$s(x) = -\frac{x}{2} \ln(1-x^2).$$

Tato funkce je na množině $(-1, 1)$ součtem zadané řady.

3.2.34 Příklad

V tomto příkladě budeme hledat součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

Označme ho $s(x)$. Definičním oborem hledaného součtu bude množina $\text{Dom}(s) = \mathcal{O} = \mathbf{R}$, neboť platí

$$R_{x^2}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{x^2} = \infty \quad \Rightarrow \quad R = \infty.$$

Označme nyní $s(x) = x y(x)$, kde

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Derivováním pak získáváme první

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

a druhou derivaci

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) \cdot x^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Srovnáním se zadanou řadou pak obdržíme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y'' - y = 0 \tag{3.16}$$

s nulovou pravou stranou. Ze všech řešení této rovnice ovšem hledáme jenom takové řešení, pro něž bude platit $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$. Uvedená rovnice je lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty. Ačkoliv korektní metody řešení diferenciálních rovnic budou popsány až v následující kapitole, my zde s předstihem užijeme výsledku příkladu 4.5.10, kde bylo vypočteno, že všechna řešení rovnice (3.16) jsou tvaru $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Okrajové podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ pak vedou ke dvěma rovnicím $C_1 + C_2 = 1$, $C_1 - C_2 = 0$, jejichž řešením je dvojice $(C_1, C_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Proto

$$y(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh(x).$$

Příklad tedy uzavíráme finálním tvrzením, že

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} = x \cdot \cosh(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

3.2.35 Příklad

V tomto příkladě budeme hledat součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

Označme ho $s(x)$. Definičním oborem hledaného součtu bude množina $\text{Dom}(s) = \mathcal{O} = \mathbf{R}$, neboť pro poloměr konvergence platí rovnost

$$R = \infty \quad \Leftarrow \quad R_{x^2} = \infty \quad \Leftarrow \quad R_{x^2}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Označme nyní $s(x) = x f(x)$, kde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = e^{x^2}.$$

Proto

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x e^{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

3.2.36 Příklad

Jedním z frekventovaných integrálů, které ovšem není možno řešit přímým integrováním, je určitý integrál

$$\int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Problém při pokusu řešit ho analyticky spočívá v tom, že primitivní funkce k funkci e^{-x^2} nemá elementární tvar, není tudíž vyjádřitelná jako "klasická" funkce. To je okamžik, kdy s výhodou uijeme teorii o mocninných aproximacích probranou dříve. Zmíněný integrál modifikujeme do často užívaného tvaru $\text{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Tuto funkci bývá v matematice zvykem označovat jako *chybovou funkci* nebo anglicky *error function* (odtud zkratka v označení). Postup při stanovení mocninné řady, jež se rovná chybové funkci, zahájíme hledáním Maclaurinovy řady integrandu. Jak snadno nahlédneme například z poznámky 3.2.15, platí vztah

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Jelikož je na intervalu konvergence možno podle příslušných vět integrovat a derivovat člen po členu, platí také

$$\begin{aligned} \text{Erf}(x) &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right]_0^x dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}. \end{aligned}$$

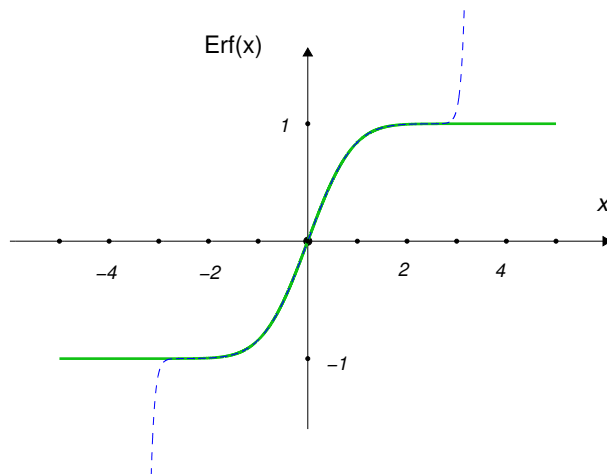
Chceme-li nalézt přibližnou hodnotu chybové funkce, vezmeme prvních $k+1$ členů jejího úplného rozvoje, čímž získáme hodnotu

$$\text{Erf}(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}. \quad (3.17)$$

Zbývá ovšem vyčíslit chybu tohoto přiblížení. Jelikož je ale příslušná Maclaurinova řada řadou střídajících znamének, může být hledaná chyba $R_{2k+2}(x)$ odhadnuta absolutní hodnotou následujícího členu, tj. prvního členu, jež nebyl zahrnut do aproximace (3.17). Tedy

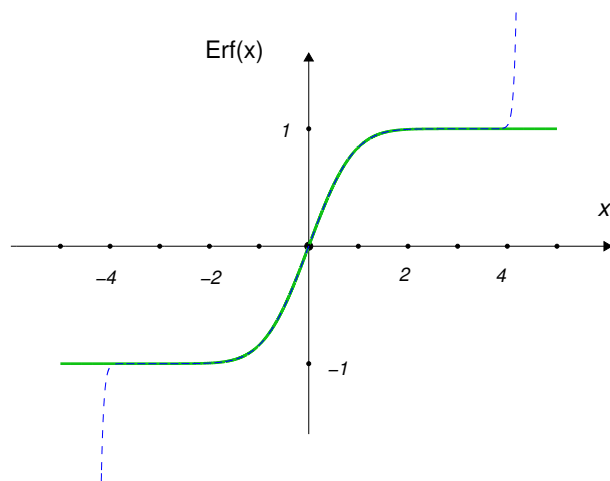
$$R_{2k+2}(x) \leq \mathcal{R}_{2k+2}(x) = \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)(k+1)!}.$$

Jak je patrné, odhad chyby $\mathcal{R}_{2k+2}(x)$ konverguje pro $k \rightarrow \infty$ poměrně rychle k nule, tedy již první aproximace (pro malá k) budou poměrně přesné. Pro ilustraci v následujícím obrázku vykreslujeme průběh chybové funkce.



Obrázek 3.13
Chybová funkce $\text{Erf}(x)$ (plnou čarou) a její aproximace pro $k = 20$ (přerušovanou čarou).

Pro názornou představu níže ilustrujeme způsob konvergence Maclaurinovy řady funkce $\text{Erf}(x)$ pro rostoucí k , tedy pro přesnější aproximaci.



Obrázek 3.14
Chybivá funkce $\text{Erf}(x)$ (plnou čarou) a její aproximace pro $k = 40$ (přerušovanou čarou).

3.3 Cvičení

Cvičení 3.1

Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = x^3$ analytická v bodě $a = 2$. Podrobně zdůvodněte.

Cvičení 3.2

Nalezněte Maclaurinovy řady základních funkcí z poznámky 3.2.15 a stanovte jejich obory konvergence.

Cvičení 3.3

Funkci $f(x) = \ln(\cos(x))$ rozepište do mocninné řady až do členu s x^6 včetně.

Cvičení 3.4

Funkci $f(x) = \sin(\sin(x))$ rozepište do mocninné řady až do členu s x^3 včetně.

Cvičení 3.5

Funkci

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2 + 2x + x^2}\right)$$

rozložte do mocninné řady podle mocnin výrazu $x + 1$.

Cvičení 3.6

Rozkladem na parciální zlomky nalezněte rozvoj funkce

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

do Maclaurinovy řady a určete její obor konvergence.

Cvičení 3.7

Nalezněte součet $s(x)$ mocninné řady

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Cvičení 3.8

Nalezněte součet $s(x)$ mocninné řady

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

Cvičení 3.9

Pro mocninnou řadu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ukážete, že platí $y''(x) = y(x)$.**Cvičení 3.10**

Integrováním člen po členu vypočtete součet řady

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + 25x^5 - \dots$$

Cvičení 3.11

Ověřte, že řada funkcí

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

vyhovuje obyčejné diferenciální rovnici $xy'' + y' - y = 0$.**Cvičení 3.12**

Derivováním nebo integrováním člen po členu vypočtete součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

Cvičení 3.13

Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)4^n}.$$

Cvičení 3.14

Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2+n}.$$

Cvičení 3.15S jakou přesností bude vypočtena hodnota $\frac{\pi}{4}$, jestliže použijeme prvních pět členů Maclaurinova rozvoje funkce $\arctg(x)$ pro $x = 1$?**Cvičení 3.16**Metodou neznámých koeficientů nalezněte první čtyři nenulové členy Maclaurinova rozvoje funkce $\tg(x)$.**Cvičení 3.17**

Vypočtete přibližnou hodnotu integrálu

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$$

pomocí tří nenulových členů příslušného rozvoje a odhadněte chybu.

Cvičení 3.18

Pomocí vhodného Maclaurinova rozvoje vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}.$$

Cvičení 3.19Vypočtete přibližně hodnotu čísla $\ln(5)$ pomocí prvních pěti nenulových členů příslušného rozvoje a odhadněte chybu.

Cvičení 3.20

Vypočtete přibližně hodnotu integrálu

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx.$$

Návod: Daný integrál upravte s použitím metody per partes na jiný integrál. Užijte faktu, že

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) \operatorname{arctg}(x) = 0.$$

Hodnotu získaného integrálu odhadněte pomocí prvních pěti nenulových členů příslušné řady a stanovte korektní odhad chyby. Dále pomocí vhodného rozvoje dokažte vztah z druhého bodu nápovědy.

Cvičení 3.21

Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

Cvičení 3.22

Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(2n)!!} x^n.$$

Cvičení 3.23

Pomocí vhodné mocninné řady vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Cvičení 3.24

Sečtete

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Cvičení 3.25

Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n x^{n+1}}{3^n}$$

a určete její součet.

Cvičení 3.26

Funkci

$$f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

rozviňte do Maclaurinovy řady a vyšetřete její obor konvergence.

Cvičení 3.27

Pomocí vhodných Taylorových rozvojů určete hodnotu limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Cvičení 3.28

Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 5^n}{n!}.$$

Cvičení 3.29

Funkci

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t} dt$$

rozviňte do mocninné řady se středem v bodě nula a určete její obor konvergence.

Cvičení 3.30

Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$$

Cvičení 3.31

Užitím vhodných Taylorových řad určete hodnotu limity $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x x^{-3} \sin(x) - x^{-2}(1+x))$.

Cvičení 3.32

Sečtěte

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}.$$

Cvičení 3.33

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^{12} + 1} - \left(x^6 - x^4 + \frac{x^2}{2} \right) e^{\frac{1}{x^2}} \right].$$

Cvičení 3.34

Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2 + x^3}$$

a její interval konvergence.

Cvičení 3.35

Nalezněte součet následující číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Cvičení 3.36

Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)16^n}.$$

Cvičení 3.37

Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}.$$

Cvičení 3.38

Pomocí prvních pěti nenulových členů vhodné mocninné řady odhadněte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 \frac{\sinh(x)}{x} dx.$$

Stanovte korektní odhad chyby.

Cvičení 3.39

Pro parametr α , pro nějž platí, že $\frac{\alpha}{3} \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$, vyšetřete obor konvergence a součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-3)(\alpha-6) \dots (\alpha-3n+3)}{n!} x^n.$$

Cvičení 3.40

Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n}.$$

Cvičení 3.41

Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

Cvičení 3.42

Ukažte, že

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cvičení 3.43

Užitím vhodných Taylorových řad určete hodnotu limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg}(x) - \sin(x)) - x^3}{x^5}.$$

Cvičení 3.44Pomocí vhodné mocninné řady vypočtěte číslo $\sqrt[4]{700}$ s chybou menší než 10^{-4} .**Cvičení 3.45**

Ověřte, zda platí rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx.$$

Cvičení 3.46Dokažte, že Maclaurinova řada funkce e^{-x^2} nekonverguje na svém oboru konvergence stejnoměrně.**Cvičení 3.47**

Nalezněte součet funkční řady

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$$

na množině $\langle c, \infty \rangle$, kde $c > 0$. Neopomeňte prokázat oprávněnost všech prováděných operací.**Cvičení 3.48**

Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n (4n)!} x^{2n}.$$

Cvičení 3.49

Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{(n-1)!} x^n$$

a jeho definiční obor.

Cvičení 3.50

Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}.$$

Cvičení 3.51

Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

a výsledek maximálně zjednodušte.

Cvičení 3.52

Nalezněte obor konvergence a součet funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n} x(x+x^2)^n.$$

Cvičení 3.53

Pro funkci

$$f(x) = \frac{2}{8x^3 + 4x^2 + 2x + 1}$$

vypočtěte podíl $\frac{f^{(101)}(0)}{f^{(100)}(0)}$.

Cvičení 3.54

Sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!!} x^n.$$

Cvičení 3.55

Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n(n+1)} x^{n+1}$$

a jeho definiční obor. Výsledek maximálně zjednodušte.

Cvičení 3.56

Sestavte mocninnou řadu spojitých funkcí definovaných na množině $\mathbf{R}$ takovou, aby jejím oborem konvergence byl polouzavřený interval $\mathcal{O} = \langle 2, 8 \rangle$.

Cvičení 3.57

Přímou metodou odvoďte tvar Maclaurinovy řady pro funkci $f(x) = \sqrt{4-x}$. Upravte do nejjednoduššího možného tvaru. Poté korektně určete její obor konvergence.

Cvičení 3.58

Nalezněte Taylorovu řadu reprezentující integrál

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+16t^4}} dt$$

a stanovte její obor konvergence. Řadu upravte do tvaru s dvojnými faktoriály.

Kapitola 4

Obyčejné diferenciální rovnice

V této kapitole se budeme věnovat zcela zásadní problematice, jež se vyskytuje ve všech fyzikálních, ekonomických, biologických a dalších disciplínách. Jedná se o řešení rovnic, kdy neznámou není číselná hodnota, nýbrž funkce jedné proměnné. Přitom klíčovou otázkou pro nás nebude pouze nalezení řešení diferenciální rovnice, ale hlavně (a v matematice jde o to především) diskuse prostoru všech řešení dané rovnice. Budeme se tedy také snažit prokázat, že jsme našli všechna řešení, a že tudíž žádné jiné již nalezeno být nemůže.

4.1 Základní pojmy

4.1.1 Úmluva

V celé této kapitole je symbol $\mathbf{C}$ (včetně všech indexovaných variant) vymezen pro libovolnou pevně zvolenou reálnou konstantu a symbol I (opět včetně všech indexovaných variant) pro otevřený interval z množiny $\mathbf{R}$ všech reálných čísel, tj. $I = (a, b)$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

4.1.2 Definice

Nechť $F(t, z_0, z_1, \dots, z_n)$ je reálná funkce $n + 2$ reálných proměnných, která je spojitá vzhledem ke všem proměnným a vzhledem k z_n není konstantní. Nechť je definována na množině $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Potom symbol

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0 \quad (4.1)$$

nazýváme (*obyčejnou*) *diferenciální rovnici n -tého řádu* pro neznámou funkci $y(x)$. Řešením rovnice (4.1) v množině Ω na otevřeném intervalu I nazýváme funkci $y(x)$, pokud má na I všechny derivace do řádu n včetně, pro každé $x \in I$ je $(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \Omega$ a platí rovnost (4.1). Otevřený interval I nazýváme *intervalem řešení diferenciální rovnice*. Je-li dále $F(t, z_0, z_1, \dots, z_n)$ polynom stupně m v proměnných $z_0, z_1, \dots, z_n$, řekneme, že diferenciální rovnice (4.1) je *stupně m* . Diferenciální rovnici prvního stupně nazýváme také *lineární diferenciální rovnici*. Rovnici, která není lineární, nazýváme *nelineární diferenciální rovnici*.

4.1.3 Poznámka

Vyřešit danou diferenciální rovnici tedy znamená určit všechny funkce $y(x) \in C^n(I)$, jež splňují rovnost (4.1), a otevřený interval, na němž uvedené funkce tuto rovnost splňují.

4.1.4 Definice

Je-li funkce $y(x)$ řešením rovnice (4.1) v Ω na intervalu I a $\tilde{y}(x)$ řešením na $\tilde{I}$, kde $I \subsetneq \tilde{I}$, přičemž $y(x) = \tilde{y}(x)$ na I , pak říkáme, že $\tilde{y}(x)$ je *prodloužením* $y(x)$ na interval $\tilde{I}$ a $y(x)$ je *zúžením* $\tilde{y}(x)$ na interval I . Takové řešení, ke kterému v Ω neexistuje prodloužení, nazýváme *maximálním řešením* v Ω .

4.1.5 Příklad

Funkce $y(x) = e^x$ s definičním oborem $(-1, 1)$ je zjevně řešením diferenciální rovnice

$$y' - y = 0.$$

Maximálním řešením této rovnice je ale funkce $y(x) = e^x$ s intervalem řešení $I = \mathbf{R}$. Podotýkáme, že maximálních řešení dané diferenciální rovnice může být více. Zde např. funkce $z(x) = 0$, $u(x) = 4e^x$ pro $x \in \mathbf{R}$ jsou také maximálními řešeními uvedené rovnice.

4.1.6 Definice

Lineární diferenciální rovnici řádu n budeme od této chvíle rozumět rovnicí tvaru

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x), \quad (4.2)$$

kde $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou spojité funkce proměnné x na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$ a $y(x)$ je neznámá funkce. Jestliže $q(x) = 0$, říkáme, že (4.2) je *lineární diferenciální rovnici bez pravé strany* (nebo *s nulovou pravou stranou*). Rovnici

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \quad (4.3)$$

nazýváme *rovnici bez pravé strany příslušnou k diferenciální rovnici (4.2)*. Funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ nazýváme (*funkční*) *koefficienty diferenciální rovnice*. Jsou-li všechny funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ konstantními funkcemi na I , řekneme, že rovnice (4.2), resp. (4.3) jsou *s konstantními koefficienty*.

4.1.7 Poznámka

V literatuře se někdy diferenciální rovnice bez pravé strany nazývá homogenní rovnicí a rovnice s pravou stranou rovnicí nehomogenní. My se této terminologii z důvodu křížení pojmů (viz dále) raději vyhneme.

4.1.8 Definice

Nechť $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou funkce spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Pro libovolnou funkci $y(x)$, která má na I vlastní derivace do řádu n , položme

$$\widehat{L}(y(x)) = y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x).$$

Pak zobrazení $\widehat{L} : C^n(I) \mapsto C(I)$ nazýváme (*obyčejným*) *diferenciálním operátorem řádu n* příslušným k rovnicím (4.2) a (4.3). Funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ se nazývají *funkčními koefficienty* operátoru $\widehat{L}$. Jsou-li všechny funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ konstantními funkcemi na I , řekneme, že $\widehat{L}$ je *operátorem s konstantními koefficienty*.

4.1.9 Poznámka

Užijeme-li nyní symboliku zavedenou v předešlé definici, lze rovnici (4.2) zapsat ve zformalizovaném tvaru

$$\widehat{L}(y(x)) = q(x). \quad (4.4)$$

Řešit diferenciální rovnici (4.4) pak de facto znamená nalézt v množině $C^n(I)$ (tedy v definičním oboru diferenciálního operátoru $\widehat{L}$) takové funkce, které operátor $\widehat{L}(y(x))$ zobrazuje na funkci $q(x)$.

4.1.10 Věta

Diferenciální operátor $\widehat{L}$ je lineární na množině $\text{Dom}(\widehat{L}) = C^n(I)$.

Důkaz:

- nechť $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$
- nechť $y(x)$ je funkce třídy C^n na I a $k \in \mathbf{R}$
- chceme ukázat, že $\widehat{L}(k \cdot y(x)) = k \cdot \widehat{L}(y(x))$
- k tomu užijeme snadné vlastnosti derivace, a sice $\frac{d^m}{dx^m}(k \cdot y(x)) = k \cdot y^{(m)}(x)$
- pak ale $\widehat{L}(k \cdot y(x)) = k \cdot y^{(n)}(x) + k \cdot p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + k \cdot p_0(x)y(x) = k \cdot \widehat{L}(y(x))$
- odtud plyne, že $k \cdot y(x) \in C^n(I)$

- nechť dále $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou funkce třídy $C^n(I)$
- chceme ukázat, že $\widehat{L}(y_1(x) + y_2(x)) = \widehat{L}(y_1(x)) + \widehat{L}(y_2(x))$
- užijeme proto další vlastnosti derivace, a sice

$$\frac{d^m}{dx^m}(y_1(x) + y_2(x)) = y_1^{(m)}(x) + y_2^{(m)}(x)$$

- pak ale

$$\begin{aligned} \widehat{L}(y_1(x) + y_2(x)) &= y_1^{(n)}(x) + y_2^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + p_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \\ &+ p_1(x)y_1'(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_1(x) + p_0(x)y_2(x) = \widehat{L}(y_1(x)) + \widehat{L}(y_2(x)) \end{aligned}$$

- odtud plyne, že $y_1(x) + y_2(x) \in C^n(I)$, což zakončuje důkaz

4.1.11 Definice

Nechť $\widehat{L}$ je diferenciální operátor řádu $n \in \mathbb{N}$ působící na definičním oboru $C^n(I)$. Pak definujeme

$$\Omega_0 := \{y(x) \in \text{Dom}(\widehat{L}) : \widehat{L}(y(x)) = 0\}.$$

Je-li $q(x) \in C(I)$ libovolná funkce spojitá na I , pak definujeme

$$\Omega_q := \{y(x) \in \text{Dom}(\widehat{L}) : \widehat{L}(y(x)) = q(x)\}.$$

4.1.12 Věta

Množina Ω_0 je vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbf{R}$, a reprezentuje tedy podprostor vektorového prostoru $C^n(I)$. Množina Ω_q je lineární varietou.

Důkaz:

- množina Ω_0 všech funkcí, které vyhovují rovnici $\widehat{L}(y(x)) = 0$, de facto představuje tzv. jádro operátoru $\widehat{L}$
- jak je známo ze základních partií lineární algebry, tvoří jádro operátoru vždy vektorový prostor, a Ω_q je tudíž lineární varietou, tedy prostorem, který vznikl "posunutím" vektorového prostoru Ω_0 o tzv. partikulární řešení, které je v případě diferenciálních rovnic reprezentováno jistou nenulovou funkcí $y_p(x)$
- rozdíl dvou funkcí z Ω_q tedy vždy padne do Ω_0
- o platnosti tvrzení se lze však snadno přesvědčit také přímo užitím vlastností operátoru $\widehat{L}$

4.1.13 Poznámka

Předešlá věta představuje jeden z elementárních (ale zásadních) poznatků teorie diferenciálních rovnic. Řešení diferenciálních rovnic $\widehat{L}(y(x)) = 0$ a $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ lze tedy symbolicky vyjádřit takto. Ve vektorovém prostoru $C^n(I)$ hledáme podprostor Ω_0 , jehož všechny prvky (v tomto případě jsou to funkce) zobrazuje operátor $\widehat{L}$ na ryze nulovou funkci $o(x) = 0$ na I . Analogicky, řešíme-li rovnici $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$, hledáme lineární varietu Ω_q , jejíž všechny prvky zobrazuje operátor $\widehat{L}$ na funkci $q(x)$. Z teorie navíc víme, že jistě existuje funkce (tzv. partikulární řešení) $y_p(x)$ tak, že $\Omega_q = \Omega_0 + y_p(x)$. Rozsáhlost obou prostorů je navíc určena dimenzionalitou prostoru Ω_0 . Pro určení dimenze Ω_0 je ale nezbytné zjistit bázi tohoto prostoru. Další text ukáže, jakými prostředky se báze v Ω_0 hledají. Označíme-li $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ lineárně nezávislá řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ a budou-li všechny funkce z Ω_0 lineárními kombinacemi funkcí $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$, bude uvedený soubor funkcí reprezentovat bázi v Ω_0 a bude také možno prokázat, že $\Omega_0 = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)]_\lambda$ a $\dim(\Omega_0) = m$. Pak bude také platit, že

$$\Omega_q = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)]_\lambda + y_p(x).$$

Upozorňujeme ale důrazně, že předešlá věta je vyslovena pouze pro lineární diferenciální rovnici. Pro nelineární rovnice nic podobného neplatí.

4.1.14 Věta

Nechť $u(x)$ je jedno řešení rovnice (4.2). Pak všechna řešení rovnice (4.2) jsou právě všechny funkce $y(x)$ dané rovností

$$y(x) = z(x) + u(x),$$

kde za $z(x)$ klademe všechna řešení rovnice (4.3).

Důkaz:

- První implikace:

- nechť $\widehat{L}(u(x)) = q(x)$ a $\widehat{L}(z(x)) = 0$
- z linearitý operátoru $\widehat{L}$ plyne, že $\widehat{L}(y(x)) = \widehat{L}(z(x)) + \widehat{L}(u(x)) = q(x)$

- Druhá implikace:

- dokážeme, že rovnice (4.2) nemá jiné řešení než tvaru $y(x) = z(x) + u(x)$
- předpokládejme pro spor, že existují dvě řešení $y_1(x)$ a $y_2(x)$ taková, že $\widehat{L}(y_1(x)) = q(x)$ a $\widehat{L}(y_2(x)) = q(x)$, a neexistuje žádná funkce $z(x)$, pro niž by platilo $\widehat{L}(z(x)) = 0$ a $y_2(x) = y_1(x) + z(x)$
- vidíme ale, že $\widehat{L}(y_2(x) - y_1(x)) = 0$
- odtud je jasné, že $z(x) := y_2(x) - y_1(x)$ musí být řešením rovnice (4.3)

4.1.15 Poznámka

Bývá zvykem zapisovat řešení rovnice (4.2) v pořadí $y(x) = z(x) + u(x)$, kde $z(x)$ jsou všechna řešení příslušné rovnice (4.3) a $u(x)$ jedno řešení rovnice (4.2). Řešení $u(x)$ se nazývá řešením *partikulárním*.

4.1.16 Poznámka

Nechť $C(a, b)$ je vektorový prostor spojitých funkcí na intervalu (a, b) definovaný nad tělesem $\mathbf{R}$. Budou-li dvě funkce (vektory) $f(x), g(x) \in C(a, b)$ lineárně závislé, bude to znamenat, že existuje číslo $C \in \mathbf{R}$ tak, že rovnost $f(x) = Cg(x)$ platí pro všechna $x \in (a, b)$. Podobně: bude-li soubor funkcí $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in C(a, b)$ lineárně závislý, bude existovat netriviální vektor konstant $(C_1, C_2, \dots, C_n) \neq \vec{0}$ takový, že rovnost

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x) = 0$$

platí pro všechna $x \in (a, b)$.

4.2 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Nejjednodušší diferenciální rovnicí je lineární rovnice prvního řádu. Její řešení je velice jednoduché a v podstatě sestává z výpočtu dvou neurčitých integrálů.

4.2.1 Věta

Nechť $p(x), q(x)$ jsou spojitě funkce na intervalu I . Nechť pro funkce $P(x), S(x)$ platí na intervalu I rovnosti $P'(x) = p(x)$ a $S'(x) = q(x) e^{P(x)}$. Pak všechna řešení rovnice

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \tag{4.5}$$

jsou dána předpisem

$$y(x) = e^{-P(x)}(S(x) + C). \tag{4.6}$$

Důkaz:

- Odvození:

- rovnici (4.5) vynásobíme faktorem $e^{P(x)}$, tj.

$$y'(x) e^{P(x)} + p(x)y(x) e^{P(x)} = q(x) e^{P(x)}$$

- levá strana představuje derivaci součinu $y(x) e^{P(x)}$, a protože $S'(x) = q(x) e^{P(x)}$, platí dále

$$y(x) e^{P(x)} = S(x) + C$$

- řešení uvedené rovnice mají tedy tvar $y(x) = e^{-P(x)}(S(x) + C)$

- Jednoznačnost:

- dokazujeme sporem
- nechť tedy funkce $z(x)$ řeší rovnici (4.5), ale přitom není tvaru $e^{-P(x)}(S(x) + C)$
- tedy

$$z'(x) + p(x)z(x) = q(x) \quad (4.7)$$

- nechť $y(x) = e^{-P(x)}(S(x) + C)$
- podle první části důkazu tedy $y(x)$ řeší zkoumanou rovnici, tj.

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (4.8)$$

- odečteme nyní rovnice (4.7) a (4.8)
- pak $(z'(x) - y'(x)) + p(x)(z(x) - y(x)) = 0$
- tuto rovnici vynásobíme faktorem $e^{P(x)}$
- rovnice pak přechází do tvaru

$$\left[(z(x) - y(x)) e^{P(x)} \right]' = 0$$

- odtud

$$z(x) = y(x) + \tilde{C} e^{-P(x)} = e^{-P(x)}(S(x) + C) + \tilde{C} e^{-P(x)} = e^{-P(x)}(S(x) + D)$$

- to je ale spor s předpokladem, čímž je prokázáno, že rovnice (4.5) nemá žádná jiná řešení než ta tvaru (4.6)

4.2.2 Příklad

Řešme rovnici $y' - 2xy = 2x$ na množině $\Omega = \mathbf{R}^3$. Vypočteme $P(x) = \int p(x) dx = -x^2$ (postačí jedna z primitivních funkcí), celou rovnici vynásobíme faktorem $e^{P(x)} = e^{-x^2}$ a získáme

$$y' e^{-x^2} - 2xy e^{-x^2} = 2x e^{-x^2}.$$

Tato rovnice je ekvivalentní rovnici

$$(y \cdot e^{-x^2})' = (-e^{-x^2} + C)'$$

Odtud již získáme maximální řešení $y(x) = C e^{x^2} - 1$, kde $I = \mathbf{R}$.

4.2.3 Definice

Funkce $e^{P(x)}$ z věty 4.2.1 se nazývá *integračním faktorem* rovnice (4.5).

4.2.4 Poznámka

Pojem integrační faktor má také obecnější užití. Viz např. příklad 4.3.18 nebo kniha [14].

4.2.5 Věta

Nechť $p(x)$ je funkce spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Nechť $v(x)$ je jedno nenulové řešení rovnice

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \quad (4.9)$$

Pak všechna řešení rovnice (4.9) jsou právě funkce $y(x) = C v(x)$, tj. pro každé řešení rovnice (4.9) platí $y(x) \in [v(x)]_\lambda$.

Důkaz:

- užijeme větu 4.2.1 a položíme v ní $q(x) = 0$
- odtud $S(x) = C_1$
- řešení je tudíž tvaru $y(x) = e^{-P(x)}(C_1 + C_2) = C_3 e^{-P(x)}$
- tak vypadají podle 4.2.1 všechna řešení rovnice (4.9)
- $v(x)$ je jedno z nich, a tedy $v(x) = C_4 e^{-P(x)}$ ($C_4 \neq 0$)
- pro všechna řešení tedy platí

$$y(x) = \frac{C_3}{C_4} C_4 e^{-P(x)} = \frac{C_3}{C_4} v(x) = C v(x)$$

4.2.6 Důsledek

Všetchna řešení rovnice (4.9) tvoří jednorozměrný vektorový prostor nad $\mathbf{R}$, tj. jádro lineárního operátoru $\widehat{L} = \frac{d}{dx} + p(x)$ prvního řádu má dimenzi jedna. To tedy značí, že uvažujeme-li rovnici (4.9), platí $\Omega_0 = [e^{P(x)}]_\lambda$, kde $P'(x) = p(x)$.

4.2.7 Poznámka

Rovnici

$$y^{(k+1)}(x) + p(x)y^{(k)}(x) = q(x)$$

lze převést na lineární rovnici prvního řádu substitucí $z(x) := y^{(k)}(x)$. Potom původní rovnice přejde na tvar $z'(x) + p(x)z(x) = q(x)$, který již snadno pomocí věty 4.2.1 vyřešíme. Dále pak provedeme k integrací k získání řešení celé úlohy.

4.2.8 Příklad

Hledejme maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy'' + 8x^5 e^{x^2} = (1 + 2x^2)y',$$

vyhovující podmínkám $y(1) = e$ a $y'(1) = 2e$. Zavedeme novou funkci $z(x) = y'(x)$, čímž triviálně snížíme řád rovnice. Obdržíme tak lineární diferenciální rovnici

$$z' - \left(\frac{1}{x} + 2x\right)z = -8x^4 e^{x^2}.$$

Její integracním faktorem je výraz $x^{-1}e^{-x^2}$. Je-li jím rovnice násobena, získáváme rovnici

$$\left(z(x) \cdot \frac{1}{x} e^{-x^2}\right)' = -8x^3.$$

Odtud

$$z(x) \cdot \frac{1}{x} e^{-x^2} = -2x^4 + C,$$

a tedy

$$z(x) = C x e^{x^2} - 2x^5 e^{x^2}.$$

Pak ale

$$y(x) = \int z(x) dx = D + \frac{C}{2} e^{x^2} + e^{x^2}(-x^4 + 2x^2 - 2).$$

Konstanty $\tilde{C}$ a C určíme z podmínek $y(1) = e$ a $y'(1) = 2e$. Odtud $D = 0$ a $C = 4$. Hledaným maximálním řešením je tudíž funkce

$$y(x) = x^2 e^{x^2} (2 - x^2), \quad x \in \mathbf{R}.$$

4.3 Nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

Složitějšími případy diferenciálních rovnic prvního řádu jsou rovnice nelineární. Ty je nutno řešit v závislosti na tom, jakého jsou typu. Seznámíme se nyní podrobněji s metodami řešení některých z nich.

4.3.1 Definice

Nechť $p(x), q(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I a necht' $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Potom rovnici tvaru

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^\alpha(x) \quad (4.10)$$

nazveme *Bernoulliho diferenciální rovnici*.

4.3.2 Poznámka

Bernoulliho diferenciální rovnici řešíme tak, že celou rovnici vynásobíme faktorem $(1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)$. Tím dostáváme

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) + p(x)(1 - \alpha)y^{1-\alpha}(x) = (1 - \alpha)q(x).$$

Poté zavedeme novou funkci $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, čímž obdržíme lineární diferenciální rovnici

$$z'(x) + p(x)(1 - \alpha)z(x) = (1 - \alpha)q(x),$$

neboť $z'(x) = (1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$. Dále řešíme standardně, tedy metodou integračního faktoru. Zde pouze podotýkáme, že pro $\alpha > 0$ je funkce $y(x) = 0$ řešením každé Bernoulliho rovnice.

4.3.3 Poznámka

Budeme se nyní zabývat hledáním řešení diferenciální rovnice

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0, \quad (4.11)$$

kde $f(x, y)$ a $g(x, y)$ jsou spojité funkce dvou proměnných.

4.3.4 Definice

Nechť $f(x, y)$ a $g(x, y)$ jsou spojité funkce dvou proměnných. Řešením diferenciální rovnice (4.11) rozumíme každou funkci $y = \varphi(x)$, resp. $x = \psi(y)$, definovanou na otevřeném intervalu I , pro kterou platí

$$f(x, \varphi(x)) + g(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad \text{respektive} \quad f(\psi(y), y)\frac{d\psi}{dy} + g(\psi(y), y) = 0.$$

4.3.5 Poznámka

Při řešení diferenciálních rovnic tvaru (4.11) uijeme s výhodou teorie implicitních funkcí. Ačkoliv se tato problematika probírá až v pokročilejších partiích studia matematické analýzy, nebude pravděpodobně obtížné nahlédnout do následujících úvah. Vezměme diferencovatelnou funkci $H(x, y)$ dvou proměnných a zkoumejme rovnost $H(x, y) = C$. Množinou všech bodů v $\mathbf{R}^2$, jež splňují takovou rovnost, je jistá křivka, která může být v příznivém případě chápána jako graf tzv. *implicitní funkce* $y(x)$. Informace o vlastnostech funkce $y(x)$ jsou tudíž zakódovány v řešení rovnice $H(x, y) = C$. Derivací rovnosti $H(x, y) = C$ podle x (s ohledem na fakt, že y je funkcí proměnné x , tj. $y = \varphi(x)$) pak podle věty 1.2.7 ve skriptech [16] dostáváme

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)y' = 0. \quad (4.12)$$

Jde o rovnici zjevně připomínající definiční tvar (4.11). Pokud tedy položíme v rovnici (4.11) $f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$ a $g(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$, mají rovnice (4.11) a (4.12) tentýž tvar, a tedy rovnost $H(x, y) = C$ vyjadřuje vztah mezi proměnnými x, y , a může být tudíž použita k nalezení řešení diferenciální rovnice (4.11). Jakým způsobem lze výše zjištěný poznatek konkrétně zužitkovat při řešení rovnic tvaru (4.11) bude zřejmé z následujícího textu.

4.3.6 Definice

Nechť je dána diferenciální rovnice tvaru (4.11). Jestliže existuje funkce $H(x, y)$ taková, že

$$f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \quad (4.13)$$

a zároveň

$$g(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \quad (4.14)$$

nazýváme rovnost

$$H(x, y) = C \quad (4.15)$$

formálním řešením (řešením v implicitním tvaru) rovnice (4.11). Lze-li z formálního řešení (4.15) vyjádřit y jako funkci x nebo x jako funkci y , hovoříme v obou případech o *explicitním vyjádření řešení* diferenciální rovnice (4.11).

4.3.7 Poznámka

Pokud tedy (podle poznámky 4.3.5) uspořádaná dvojice $(x, y) = (x, \varphi(x))$ řeší algebraickou rovnici $H(x, y) = C$ na $I \times \varphi(I)$, pak funkce $y = \varphi(x)$ řeší diferenciální rovnici (4.11) na I . Podle pravidel o derivaci funkce dvou proměnných totiž platí

$$\frac{d}{dx} H(x, \varphi(x)) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) + g(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0.$$

Podobně, řeší-li uspořádaná dvojice $(x, y) = (\psi(y), y)$ rovnici $H(x, y) = C$ na $\psi(J) \times J$, pak funkce $x = \psi(y)$ řeší rovnici (4.11) na J .

4.3.8 Definice

Diferenciální rovnici se *separovanými proměnnými* nazýváme rovnici tvaru

$$f(x) + g(y) y' = 0, \quad (4.16)$$

kde $f(x), g(y)$ jsou funkce spojité v intervalech $I_1 \subset \mathbf{R}$, resp. $I_2 \subset \mathbf{R}$.

4.3.9 Věta

Nechť $f(x), g(y)$ jsou funkce spojité v intervalech $I_1 \subset \mathbf{R}$, resp. $I_2 \subset \mathbf{R}$. Nechť $F(x), G(y)$ jsou libovolné, ale pevně zvolené primitivní funkce k funkcím $f(x)$ na I_1 , resp. $g(y)$ na I_2 . Pak je-li $y = \varphi(x)$, resp. $x = \psi(y)$ řešením rovnice (4.16), existuje jistě $C \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechny body z intervalu řešení rovnice (4.16) platí $F(x) + G(y) = C$.

Důkaz:

- dokážeme např. pro $y = \varphi(x)$, pro $x = \psi(y)$ je důkaz analogický
- nechť tedy $y = \varphi(x)$ je řešení rovnice (4.16) na I
- pak $f(x) + g(\varphi(x)) \varphi'(x) = 0$
- odtud $F'(x) + (G \circ \varphi)'(x) = 0$, což je ekvivalentní rovnosti $(F + G \circ \varphi)'(x) = 0$
- tedy existuje $C \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in I$ platí $F(x) + G(\varphi(x)) = F(x) + G(y) = C$

4.3.10 Poznámka

Tedy rovnice $H(x, y) = F(x) + G(y) = C$ je formálním řešením (řešením v implicitním tvaru) diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

4.3.11 Poznámka

Uvažme také, že diferenciální rovnice $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$, která lze snadno převést na rovnici se separovanými proměnnými, má konstantní řešení $y(x) = C$, kde pro C platí $g(C) = 0$.

4.3.12 Příklad

Příklad 4.2.2 lze řešit také jako rovnici se separovanými proměnnými převedením na formální tvar

$$-2x + \frac{1}{1+y}y' = 0.$$

Nalezneme-li primitivní funkce $F(x) = -x^2$ a $G(y) = \ln|1+y|$, získáváme řešení tvaru $y(x) = Ce^{x^2} - 1$, kde $I = \mathbf{R}$.

4.3.13 Definice

Exaktní diferenciální rovnici nazýváme rovnici tvaru (4.11), kde $f(x, y)$ a $g(x, y)$ jsou spojité funkce dvou proměnných na otevřené množině $M \subset \mathbf{R}^2$, které mají na M spojité parciální derivace vyhovující rovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y). \quad (4.17)$$

4.3.14 Věta

Nechť $f(x, y)$, $g(x, y)$ jsou funkce spojité na otevřené množině $M \subset \mathbf{R}^2$ a necht' mají v M spojité parciální derivace splňující rovnost (4.17). Necht' je pevně zvolena uspořádaná dvojice $(x_0, y_0) \in M$. Pak rovnice

$$\int_{x_0}^x f(s, y) ds + \int_{y_0}^y g(x_0, t) dt = 0$$

je formálním řešením exaktní diferenciální rovnice (4.11), a to takovým, že příslušné explicitní řešení prochází bodem (x_0, y_0) .

Důkaz:

- ukážeme, že funkce

$$H(x, y) = \int_{x_0}^x f(s, y) ds + \int_{y_0}^y g(x_0, t) dt \quad (4.18)$$

splňuje rovnost z definice 4.3.6

- nejprve ale snadno prokážeme, že příslušné explicitní řešení prochází bodem (x_0, y_0)
- pro důkaz tohoto postačí ukázat, že platí rovnost $H(x_0, y_0) = 0$, což je ale patrné z tvaru funkce $H(x, y)$
- přejdeme nyní k důkazu rovností (4.13) a (4.14), jejichž splnění pak zaručí fakt, že rovnice $H(x, y) = C$ bude odpovídajícím formálním řešením
- podotýkáme, že v této formulaci věty je $C = 0$
- jelikož výraz $\int_{y_0}^y g(x_0, t) dt$ nezávisí na x , platí $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$
- parciální derivace $H(x, y)$ podle y je nepatrně komplikovanější
- při jejím výpočtu uijeme větu o záměně derivace podle parametru y (viz věta 4.4.6 ve skriptech [16]) a integrálu podle proměnné s
- odtud

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, y) ds + g(x_0, y)$$

- následně pak ze vztahu (4.17) vyplývá, že

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial g}{\partial s}(s, y) ds + g(x_0, y) = [g(s, y)]_{x_0}^x + g(x_0, y) = g(x, y)$$

- tím je důkaz proveden

4.3.15 Poznámka

Na základě tvrzení předešlé věty bývá exaktní diferenciální rovnice často nazývána též *diferenciální rovnicí ve tvaru totálního diferenciálu*. Dodáváme, že také rovnice

$$\int_{x_0}^x f(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y g(x, t) dt = 0 \quad (4.19)$$

je formálním řešením exaktní diferenciální rovnice (4.11) a navíc rovnice

$$\int_0^x f(s, y) ds + \int_0^y g(x_0, t) dt = C, \quad \text{resp.} \quad \int_0^x f(s, y_0) ds + \int_0^y g(x, t) dt = D \quad (4.20)$$

reprezentují obecná formální řešení rovnice (4.11).

4.3.16 Poznámka

Pro zvědavější čtenáře nabídneme v této poznámce odvození vztahu (4.18). Aby rovnice $H(x, y) = C$ představovala formální řešení exaktní diferenciální rovnice (4.11), měly by být podle definice 4.3.6 splněny vztahy (4.13) a (4.14). Vyjdeme-li z prvního z nich, dostáváme

$$H(x, y) = \int_{\alpha}^x f(s, y) ds + C(y),$$

kde první integrál představuje primitivní funkci k funkci $f(x, y)$ vzhledem k první proměnné a druhý člen (jakási obecněji pojatá integrační konstanta) zohledňuje skutečnost, že partiální derivací funkce $C(y)$ podle proměnné x bude v každém případě nula. Ve výše uvedeném vztahu zbyvá vyčíslit právě hodnotu této integrační konstanty. K tomu užijeme druhý vztah (4.14). Derivací poslední rovnosti podle proměnné y nyní dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^x f(s, y) ds + \frac{dC(y)}{dy} = \int_{\alpha}^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, y) ds + \frac{dC(y)}{dy} = \int_{\alpha}^x \frac{\partial g}{\partial s}(s, y) ds + \frac{dC(y)}{dy} = \\ &= [g(s, y)]_{\alpha}^x + \frac{dC(y)}{dy} = g(x, y) - g(\alpha, y) + \frac{dC(y)}{dy}. \end{aligned}$$

Má-li se podle (4.14) tato pravá strana rovnat výrazu $g(x, y)$, musí nutně platit $\frac{dC(y)}{dy} = g(\alpha, y)$. Tedy

$$C(y) = \int_{\beta}^y g(\alpha, t) dt.$$

Odtud

$$H(x, y) = \int_{\alpha}^x f(s, y) ds + \int_{\beta}^y g(\alpha, t) dt.$$

Má-li platit rovnost $H(x_0, y_0) = 0$, je třeba volit $\alpha = x_0$ a $\beta = y_0$.

4.3.17 Příklad

Řešme diferenciální rovnici

$$y'x^2 + 2x(y + e^x) + x^2e^x = 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že jde o exaktní diferenciální rovnici. Jak vidno, je $f(x, y) = 2x(y + e^x) + x^2e^x$ a $g(x, y) = x^2$, a proto

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x.$$

Podmínka exaktnosti (4.17) je tedy splněna, a tudíž rovnost

$$H(x, y) = \int_0^x f(s, 0) ds + \int_0^y g(x, t) dt = C,$$

kde jsme položili $x_0 = y_0 = 0$, představuje formální řešení zadané rovnice. Povšimněte si, že bylo užito ekvivalentního tvaru (4.20) funkce $H(x, y)$. Pak ale

$$H(x, y) = \int_0^x (2se^s + s^2e^s) ds + \int_0^y x^2 dt = [s^2e^s]_0^x + yx^2 = x^2e^x + yx^2 = C.$$

Tato rovnice představuje řešení zadané rovnice v implicitním tvaru. Explicitní tvar ale získáme velice snadno:

$$y(x) = \frac{c}{x^2} - e^x, \quad I = \begin{cases} (0, +\infty) & \dots \quad c \neq 0, \\ \mathbf{R} & \dots \quad c = 0. \end{cases}$$

Druhou alternativou pro definiční obor je pochopitelně otevřený interval $I = (-\infty, 0)$.

4.3.18 Poznámka

V některých případech lze předešlá metoda užít i pro diferenciální rovnice, které exaktní sice nejsou, ale může pro ně být nalezen tzv. *integrační faktor druhého druhu*, který, je-li jím rovnice násobena, převede zadanou rovnici na rovnici exaktní. Integrační faktor druhého druhu má nejčastěji podobu funkce proměnné x nebo funkce proměnné y . Jak lze tyto faktory nalézt si ukážeme v následujícím příkladě.

4.3.19 Příklad

Pokusme se řešit diferenciální rovnici

$$y' = \frac{4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y}}{x^3e^y - xe^{2y}}. \quad (4.21)$$

Ve standardizovaném tvaru má tato rovnice tuto podobu:

$$(4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y}) + (xe^{2y} - x^3e^y)y' = 0.$$

Označíme-li $f(x, y) = 4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y}$ a $g(x, y) = xe^{2y} - x^3e^y$, platí

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x^2e^y + 4e^{2y}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = e^{2y} - 3x^2e^y.$$

Rovnice tedy exaktní není. Avšak po vynásobení čitatele a jmenovatele integračním faktorem $\mu(x)$, jak uvidíme, již exaktní bude. Nalezneme nejprve tuto funkci. Zkoumejme tedy diferenciální rovnici

$$(4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y})\mu(x) + (xe^{2y} - x^3e^y)\mu(x)y' = 0.$$

Budeme hledat podmínku pro $\mu(x)$, aby výše uvedená rovnice byla rovnicí exaktní. Označíme-li $\tilde{f}(x, y) = (4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y})\mu(x)$ a $\tilde{g}(x, y) = (xe^{2y} - x^3e^y)\mu(x)$, platí

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = (-6x^2e^y + 4e^{2y})\mu(x), \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = (e^{2y} - 3x^2e^y)\mu(x) + (xe^{2y} - x^3e^y)\mu'(x).$$

Srovnání těchto parciálních derivací vede k rovnostem

$$(3e^{2y} - 3x^2e^y)\mu(x) = (xe^{2y} - x^3e^y)\mu'(x)$$

$$\frac{3e^y(e^y - x^2)}{xe^y(e^y - x^2)}\mu(x) = \mu'(x).$$

Tím jsme obdrželi lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$\mu' - \frac{3}{x}\mu = 0$$

řešitelnou např. separací proměnných. Výsledkem řešení je funkce $\mu(x) = c x^3$. Rozšíříme-li tedy zlomek v rovnici (4.21) jednotkou tvaru $\frac{x^3}{x^3}$, přejde tato rovnice na rovnici exaktní. Pak tedy $\tilde{f}(x, y) = 4x^7 - 6x^5e^y + 2x^3e^{2y}$ a $\tilde{g}(x, y) = x^4e^{2y} - x^6e^y$. Sestavme tedy příslušné formální řešení. Snadno

$$H(x, y) = \int_0^x (4s^7 - 6s^5e^y + 2s^3e^{2y}) ds + \int_0^y 0 dt = \frac{1}{2}x^8 - x^6e^y + \frac{1}{2}x^4e^{2y}.$$

Rovnice

$$x^4e^{2y} - 2x^6e^y + x^8 = x^4(e^y - x^2)^2 = c$$

je tedy formálním řešením zadané rovnice. Proto má explicitní řešení tvar

$$y(x) = \ln\left(\frac{D}{x^2} + x^2\right), \quad I = (0, \infty).$$

Definiční obor řešení by ale měl být rozebrán podrobněji. Uvedená množina totiž není jediným možným intervalem řešení. Diskuzi ponecháme čtenáři.

4.3.20 Definice

Řekneme, že funkce dvou proměnných $f(x, y)$ definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}^2$ je *homogenní* funkcí stupně $\alpha \in \mathbf{R}$, jestliže pro každé $(x, y) \in M$ a všechna $t > 0$ platí:

- $(tx, ty) \in M$,
- $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

4.3.21 Poznámka

Příkladem homogenní funkce je např. funkce

$$f(x, y) = y^2x + 2x^2y + \frac{y^5}{x^2}$$

definovaná na množině $M = (0 + \infty) \times \mathbf{R}$, neboť

$$f(tx, ty) = (ty)^2tx + 2(tx)^2ty + \frac{(ty)^5}{(tx)^2} = t^3 \left(y^2x + 2x^2y + \frac{y^5}{x^2} \right) = t^3 f(x, y).$$

Jedná se tedy o homogenní funkci stupně tři.

4.3.22 Definice

Homogenní diferenciální rovnici nazýváme rovnici (4.11), kde $f(x, y)$ i $g(x, y)$ jsou na otevřené množině $M \subset \mathbf{R}^2$ spojitě a zároveň homogenní téhož stupně.

4.3.23 Lemma

Homogenní diferenciální rovnice (4.11) má na intervalu $I = (-\infty, 0)$, resp. $I = (0, \infty)$ lineární řešení tvaru $y(x) = Cx$ pro všechny reálné konstanty C takové, že $f(-1, -C) + g(-1, -C)C = 0$, resp. $f(1, C) + g(1, C)C = 0$.

4.3.24 Poznámka

Zatímco předešlé lemma představuje způsob hledání lineárního řešení homogenní diferenciální rovnice, bude věta následující hledat řešení obecná. V podstatě lze říci, že substituce $y(x) = x \cdot u(x)$ převede každou homogenní diferenciální rovnici na rovnici se separovanými proměnnými, jejíž řešení bylo již probráno.

4.3.25 Věta

K homogenní diferenciální rovnici (4.11) existuje na intervalu $x \in (-\infty, 0)$, resp. na intervalu $x \in (0, \infty)$ diferenciální rovnice se separovanými proměnnými x a u taková, že funkce $u = u(x)$ je řešením této rovnice právě tehdy, když funkce

$$y(x) = u(x) \cdot x$$

je řešením homogenní diferenciální rovnice (4.11).

Důkaz:

- důkaz provedme např. pro x z intervalu $(0, \infty)$
- nechť tedy $y(x) = u(x) \cdot x$ je řešením rovnice $f(x, y) + g(x, y)y'(x) = 0$
- vidíme, že $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$
- po dosazení dostaneme $f(x, u(x) \cdot x) + g(x, u(x) \cdot x)(u'(x) \cdot x + u(x)) = 0$
- $f(x, y)$ i $g(x, y)$ jsou podle předpokladu věty homogenní téhož stupně α a předchozí vztah tedy vede k rovnostem

$$x^\alpha f(1, u) + x^\alpha u g(1, u) + x^{\alpha+1} u' g(1, u) = 0$$

$$f(1, u) + u g(1, u) + u' x g(1, u) = 0$$

- zde již snadno odseparujeme

$$\frac{1}{x} + \frac{g(1, u)}{f(1, u) + u \cdot g(1, u)} \frac{du}{dx} = 0$$

- tím je prokázána existence uváděné rovnice se separovanými proměnnými x, u

4.3.26 Poznámka

Dalším typem diferenciálních rovnic jsou rovnice typu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right), \quad (4.22)$$

kde pro reálné koeficienty a_1, a_2, b_1, b_2 platí vztah

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.23)$$

Tyto rovnice jsou homogenními rovnicemi (neboť příslušné funkce jsou homogenní nultého stupně), a proto je řešíme substitucí $y(x) = x \cdot u(x)$. Pokud $a_1b_2 = a_2b_1$, je čítec vztahu (4.22) násobkem jmenovatele, a rovnice je tudíž řešitelná substitucí $z(x) = a_2x + b_2y$.

4.3.27 Příklad

Nalezneme formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Jedná o homogenní diferenciální rovnici, jak je diskutováno výše. Navíc

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Budeme hledat nejprve lineární řešení tvaru $y = Cx$. Taková řešení ale neexistují, neboť rovnice $C(1-C) = 1+C$ nemá řešení pro žádné reálné C . Pro nalezení obecného řešení uijeme tedy substituci $y(x) = x \cdot u(x)$. Pak

$$(u'x + u)(x - ux) = x + ux,$$

což lze pro $x \neq 0$ zjednodušit do tvaru

$$\frac{1-u}{1+u^2} u' = \frac{1}{x}.$$

Odtud

$$\int \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{2} \frac{2u}{1+u^2} \right) du = \int \frac{1}{x} dx,$$

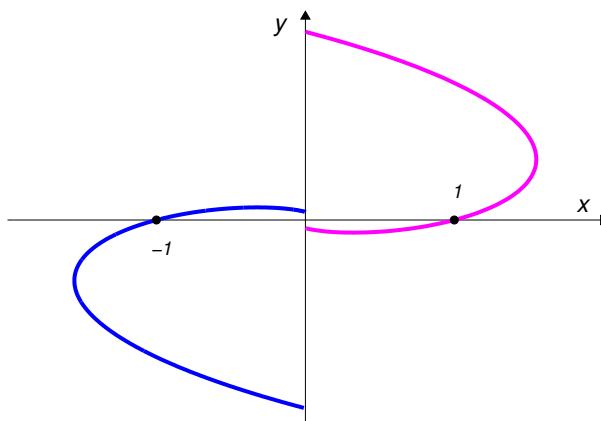
potažmo

$$\operatorname{arctg}(u) = \ln(|x|\sqrt{1+u^2}) + C.$$

Formální řešení (řešení v implicitním tvaru) má tedy podobu

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = C. \quad (4.24)$$

Tato rovnice sice zadává implicitně funkci $y = y(x)$, ale explicitní řešení z této rovnosti získat nelze. Metody pro práci s implicitními funkcemi budou probírány ve vyšších partiích matematické analýzy (viz skripta [16]).

**Obrázek 4.15**

Vyobrazení křivky (4.24) pro volbu $C = 1$. K vykreslení byly užity polární souřadnice ϱ, φ zavedené definičními vztahy $x = \varrho \cos(\varphi)$ a $y = \varrho \sin(\varphi)$. Jejich aplikací přejde rovnice (4.24) do tvaru $\varrho = e^\varphi$, kde volíme $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, resp. $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Uvedenou křivkou je tzv. *exponenciální spirála*.

4.3.28 Poznámka

Dalším typem diferenciálních rovnic jsou rovnice typu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (4.25)$$

kde pro reálné koeficienty $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ platí vztah (4.23). Tyto rovnice sice nejsou homogenními rovnicemi, ale mohou na ně být převedeny. Za podmínky (4.23) upravíme zkoumanou rovnici na předchozí typ (4.22) zavedením nové nezávisle proměnné ξ a nové funkce $\eta(\xi)$. Ty definujeme vztahy $x = \xi + h$ a $y = \eta + k$, kde čísla h, k jsou kořeny soustavy rovnic

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0, \quad a_2h + b_2k + c_2 = 0.$$

Po této substituci dostáváme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right),$$

neboť z formální aplikace věty o derivaci složené funkce plyne, že

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\eta + k) = \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Poté užijeme substituci $\eta(\xi) = \xi \cdot u(\xi)$. Není-li splněna podmínka (4.23), zavádíme substituci $z(x) := a_2x + b_2y(x)$ a dále řešíme např. separací proměnných, lze-li použít, nebo některou z předešlých metod.

4.3.29 Příklad

Nalezneme maximální řešení diferenciální rovnice $2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0$. Nejprve hledíme čísla h a k , pro něž by mělo platit $-2h + 4k - 6 = 0$ a $h + k - 3 = 0$. Snadno vypočteme, že $(h, k) = (1, 2)$. Původní rovnice bude tedy převedena substitucí $x = \xi + 1$, $y = \eta + 2$ na homogenní rovnici

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-2\xi + 4\eta}{\xi + \eta}. \quad (4.26)$$

Hledíme nejprve její lineární řešení tvaru $\eta = C\xi$. Rovnice $C^2 - 3C + 2 = 0$ má dvě řešení. Tím jsou nalezena dvě lineární řešení rovnice (4.26), a sice $\eta_1(\xi) = 2\xi$ a $\eta_2(\xi) = \xi$. Převedeno do původních proměnných tak máme

$$y_1(x) = 2x, \quad \text{Dom}(y_1) = \mathbf{R},$$

$$y_2(x) = x + 1, \quad \text{Dom}(y_2) = \mathbf{R}.$$

Dále užijeme (pro získání obecných řešení) substituci $\eta(\xi) = \xi \cdot z(\xi)$, odkud pak

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \xi + z.$$

Po dosazení a následné separaci odtud vychází

$$\frac{1+z}{(z-2)(z-1)} dz = -\frac{1}{\xi} d\xi$$

$$\left(\frac{-2}{z-1} + \frac{3}{z-2} \right) dz = -\frac{1}{\xi} d\xi$$

$$(z-2)^3 = \frac{C}{\xi} (z-1)^2$$

$$\left(\frac{\eta}{\xi} - 2 \right)^3 = \frac{C}{\xi} \left(\frac{\eta}{\xi} - 1 \right)^2$$

$$(\eta - 2\xi)^3 = C(\eta - \xi)^2.$$

Formální řešení naší úlohy má tedy tvar

$$(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2.$$

4.3.30 Příklad

Rovnice

$$y' = \frac{y - x - 2}{y - x + 3}$$

je také předešlého typu, ovšem neplňuje podmínku (4.23). Proto zavedeme substituci $z(x) := y(x) - x$. Odtud $z' = y' - 1$ a dále $z' + 1 = \frac{z-2}{z+3}$. Rovnici lze převést na rovnici se separovanými proměnnými $(z+3)z' = -5$. Odtud již snadno získáme formální řešení tvaru $z^2 + 6z = -10x + C$, resp. $y^2 - 2xy + x^2 + 4x + 6y = C$, odkud lze získat explicitní řešení

$$y_{1,2}(x) = x - 3 \pm \sqrt{D - 10x}, \quad I = \left(-\infty, \frac{D}{10} \right).$$

4.3.31 Příklad

Řešme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = \frac{4x+8}{y-1}.$$

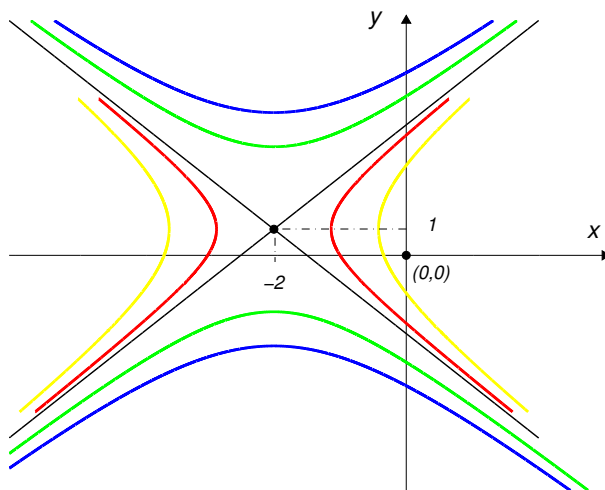
Jedná se opět o typ (4.25), pouze má jednodušší formu. Rovnice $4k+8=0$, $1-h=0$ mají řešení $(k, h) = (-2, 1)$, a proto užijeme transformaci $x = \xi - 2$, $y = \eta + 1$. Ta převádí zadanou rovnici na jednoduchou homogenní rovnici

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 4\frac{\xi}{\eta}.$$

Její lineární řešení $\eta = C\xi$ jsou všechna taková, jež vyhovují algebraické rovnici $C^2 = 4$. Jedná se tedy o dvě funkce $\eta = 2\xi$ a $\eta = -2\xi$, což vede (převáděno do původních proměnných) na řešení

$$y_1(x) = 2x + 5, \quad y_2(x) = -2x - 3, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Tato lineární řešení jsou vyobrazena černou barvou na obrázku níže.



Obrázek 4.16

Grafy řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{4x+8}{y-1}$. Černě jsou vyobrazena lineární řešení a barevně řešení hyperbolická. Přitom modrá, zelená, žlutá a červená barva odpovídají řešením (4.28) pro C rovno po řadě hodnotám $C = -20$, $C = -10$, $C = 10$ a $C = 3$.

Přistupme k hledání řešení nelineárních. Do rovnice

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 4 \frac{\xi}{\eta} \quad (4.27)$$

zavedeme novou funkci $z = z(\xi)$ vztahem $\eta(\xi) = \xi \cdot z(\xi)$. Dosazením získáme rovnici

$$\frac{dz}{d\xi} \xi + z = \frac{4}{z},$$

jež vede na rovnici se separovanými proměnnými

$$\frac{z}{4 - z^2} z' = \frac{1}{\xi}.$$

Odtud

$$-\frac{1}{2} \ln|4 - z^2| = \ln|\xi|,$$

respektive

$$|4 - z^2| = \frac{C}{\xi^2}.$$

Formálním řešením rovnice (4.27) je tedy rovnost $4\xi^2 - \eta^2 = C$. Tedy formální řešení celé úlohy má tvar

$$(x+2)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = \frac{C}{4}. \quad (4.28)$$

Jedná se tedy o nerovnoosou hyperbolu s poloosami závislými na integrační konstantě C . Přitom druhá poloosa má vůči první poloose dvojnásobnou velikost. Některá z explicitních řešení jsou vyobrazena barevně na obrázku výše. Za povšimnutí stojí fakt, že pro $C = 0$ mohou být z formálního řešení (4.28) odvozena také obě lineární řešení, která navíc představují asymptoty všech explicitních řešení.

4.3.32 Poznámka

Na závěr tohoto oddílu ještě shrňme základní rozdíl mezi lineárními a nelineárními diferenciálními rovnicemi. Uvažme dva jejich zástupce. Zatímco lineární rovnice $y' - 2xy = 2x$ má řešení $y(x) = Ce^{x^2} - 1$, má nelineární rovnice $y' - 2xy^2 = 2x$ řešení $y(x) = \tan(C + x^2)$. Jak je patrné, pouze lineární rovnice mají řešení tvaru $y(x) \in [y_1(x)]_\lambda + y_p(x)$, kde symbol $[y_1(x)]_\lambda$ reprezentuje lineární obal (v tomto případě lineární obal jednoprvkové množiny), tj. všechny násobky funkce $y_1(x)$, pro niž $\hat{L}(y_1(x)) = 0$ a zároveň $y_1(x) \neq 0$.

4.4 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Přejdeme nyní ke studiu diferenciálních rovnic vyšších řádů. Jak bude ale zanedlouho jasné, řešení rovnic prvního řádu probraná v předešlé sekci budou představovat jednu ze základních procedur vedoucích k nalezení řešení rovnic řádů vyšších. Zároveň ukážeme, že některá tvrzení z oddílu 4.2 bude možno v tomto oddíle výhodně zobecnit.

4.4.1 Poznámka

Nechť jsou funkce $p_0(x), p_1(x), q(x)$ spojitými funkcemi zadanými na otevřeném intervalu I . Nechť je dána lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x). \quad (4.29)$$

Nechť $v(x)$ je na I řešením rovnice

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \quad (4.30)$$

a pro všechna $x \in I$ platí $v(x) \neq 0$. Ukážeme, že za daných předpokladů lze vhodnou substitucí snížit řád rovnice (4.29) z druhého na první. To provedeme tak, že do rovnice (4.29) zavedeme novou funkci $z(x)$, a sice definičním předpisem

$$z(x) := \frac{y(x)}{v(x)}.$$

Pak ale

$$y'(x) = z'(x)v(x) + z(x)v'(x)$$

a také

$$y''(x) = z''(x)v(x) + 2z'(x)v'(x) + z(x)v''(x).$$

Dosadíme-li nyní tyto výrazy do vztahu (4.29), dostáváme rovnici

$$z''(x)v(x) + z'(x)(2v'(x) + p_1(x)v(x)) + z(x)(v''(x) + p_1(x)v'(x) + p_0(x)v(x)) = q(x).$$

Užijeme-li nyní předpokladu, že $v''(x) + p_1(x)v'(x) + p_0(x)v(x) = 0$, vychází odtud

$$z''(x) + z'(x) \left(2 \frac{v'(x)}{v(x)} + p_1(x) \right) = \frac{q(x)}{v(x)}.$$

Po substituci $w(x) = z'(x)$ pak obdržíme lineární diferenciální rovnici

$$w'(x) + w(x) \left(2 \frac{v'(x)}{v(x)} + p_1(x) \right) = \frac{q(x)}{v(x)}$$

prvního řádu řešitelnou metodou integračního faktoru. Výsledkem tedy bude funkce tvaru

$$w(x) = C_1 f(x) + f_p(x).$$

Odtud

$$z(x) = C_1 \int f(x) dx + C_2 + \int f_p(x) dx,$$

odkud

$$y(x) = C_1 v(x) \int f(x) dx + C_2 v(x) + v(x) \int f_p(x) dx. \quad (4.31)$$

Shrnutí: dvě funkce

$$v(x), \quad v(x) \int f(x) dx$$

generují bázi dvojrozměrného prostoru všech řešení rovnice (4.30) a funkce $v(x) \int f_p(x) dx$ představuje partikulární řešení rovnice (4.29). Doporučujeme čtenáři, aby prokázal, že funkce (4.31) jsou skutečně lineárně nezávislé.

4.4.2 Příklad

Řešme diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0 \quad (4.32)$$

užitím faktu, že funkce $v(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ je jedním z jejích řešení. Dle předešlé poznámky zavedeme substituci

$$y(x) = \frac{z(x) \cdot \sin(x)}{x},$$

jež generuje následující vztahy pro derivace.

$$y' = z' \frac{\sin(x)}{x} + z \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$y'' = z'' \frac{\sin(x)}{x} + 2z' \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} + z \frac{-x^3 \sin(x) - 2x^2 \cos(x) + 2x \sin(x)}{x^4}$$

Dosaďme je do zkoumané rovnice. Výsledkem je rovnice

$$z'' \frac{\sin(x)}{x} + z' \frac{2 \cos(x)}{x} = 0,$$

u které substitucí $w = z'$ triviálně snížíme řád. Máme $w' + 2w \cotg(x) = 0$. Integračním faktorem této rovnice je $\sin^2(x)$. Pak

$$(w \cdot \sin^2(x))' = C',$$

a tedy

$$w(x) = \frac{C}{\sin^2(x)},$$

odkud

$$z(x) = \int w(x) dx = C_1 \cotg(x) + C_2,$$

potažmo

$$y(x) = C_1 \frac{\cos(x)}{x} + C_2 \frac{\sin(x)}{x}, \quad I = \mathbf{R}^+.$$

To je tedy hledané řešení rovnice (4.32). Povšimněme si, že všechna řešení dané rovnice tvoří dvojrozměrný vektorový prostor, jehož bází je uspořádaný soubor $(\cos(x)/x, \sin(x)/x)$, a tedy

$$\Omega_0 = \left[\frac{\cos(x)}{x}, \frac{\sin(x)}{x} \right]_\lambda.$$

4.4.3 Poznámka

Výsledek předešlého příkladu nás vede k domněnce, že všechna řešení lineární diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ řádu n tvoří lineární vektorový prostor dimenze n . Toto pravdivé tvrzení bude dokázáno v dalším textu. Nejprve ale vyslovíme obecnou větu o snížení řádu diferenciální rovnice.

4.4.4 Definice

Řekneme, že diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ *připouští triviální snížení řádu*, pokud je její nultý koeficient $p_0(x)$ nulovou funkcí na I .

4.4.5 Věta – snížení řádu diferenciální rovnice

Nechť jsou dány funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$, jež jsou spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Nechť je funkce $v(x)$ řešením diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \quad (4.33)$$

na intervalu I a navíc pro všechna $x \in I$ platí, že $v(x) \neq 0$. Pak substituce $y(x) = z(x) \cdot v(x)$ převede diferenciální rovnici

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x). \quad (4.34)$$

na rovnici, která připouští triviální snížení řádu.

Důkaz:

- nechť tedy $v(x)$ je nenulové řešení rovnice s nulovou pravou stranou, tj.

$$\widehat{L}(v(x)) = v^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)v^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)v'(x) + p_0(x)v(x) = 0$$

- do rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ zavedeme nyní novou funkci $z(x)$ prostřednictvím předpisu $y(x) = z(x) \cdot v(x)$
- pro k -tou derivaci funkce $y(x)$ pak tedy podle Leibnizova pravidla o derivování součinu platí

$$y^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} z^{(i)} v^{(k-i)}$$

- provedme nyní dosazení

$$\begin{aligned} \widehat{L}(z(x) \cdot v(x)) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^{(i)} v^{(n-i)} + p_{n-1}(x) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-i}{i} z^{(i)} v^{(n-i-1)} + \\ &+ p_{n-2}(x) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} z^{(i)} v^{(n-i-2)} + \dots + p_1(x)(z'v + zv') + p_0(x)zv = q(x) \end{aligned}$$

- na tuto rovnici nyní nahlédneme jako na diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x)$
- hledejme v předešlém zápise koeficient před absolutním členem $z(x) = z^{(0)}(x)$
- jak je patrné, jedná se o součet

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} v^{(n)} + p_{n-1}(x) \binom{n-1}{0} v^{(n-1)} + p_{n-2}(x) \binom{n-2}{0} v^{(n-2)} + \dots + p_1(x)v' + p_0(x)v &= \\ = v^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)v^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)v'(x) + p_0(x)v(x) &= \widehat{L}(v) = 0 \end{aligned}$$

- tedy absolutní člen zkoumané rovnice

$$\wp_n(x)z^{(n)}(x) + \wp_{n-1}(x)z^{(n-1)}(x) + \dots + \wp_1(x)z'(x) + \wp_0(x)z(x) = q(x)$$

je nulový, tj. $\wp_0(x) = 0$

- bude proto možno snížit její řád minimálně o jedna
- zkoumejme nyní další koeficienty $\wp_i(x)$ rovnice $\widehat{L}(z) = q(x)$
- snadno $\wp_n(x) = v^{(0)}(x) = v(x)$
- a obecně pak

$$\begin{aligned} \wp_m(x) &= \binom{n}{m} v^{(n-m)} + p_{n-1}(x) \binom{n-1}{m} v^{(n-1-m)} + \\ &+ p_{n-2}(x) \binom{n-2}{m} v^{(n-2-m)} + \dots + p_{m+1}(x) \binom{m+1}{m} v^{(m+1-m)} + p_m(x) \binom{m}{m} v^{(m-m)} \end{aligned}$$

- tedy

$$\wp_m(x) = \binom{n}{m} v^{(n-m)} + p_{n-1}(x) \binom{n-1}{m} v^{(n-1-m)} + p_{n-2}(x) \binom{n-2}{m} v^{(n-2-m)} + \dots + m p_{m+1}(x)v' + p_m(x)v$$

- tím jsme obdrželi diferenciální rovnici

$$\widehat{L}_\bullet(z(x)) = z^{(n)}(x) + \frac{\wp_{n-1}(x)}{v(x)} z^{(n-1)}(x) + \frac{\wp_{n-2}(x)}{v(x)} z^{(n-2)}(x) + \dots + \frac{\wp_1(x)}{v(x)} z'(x) = \frac{q(x)}{v(x)},$$

která připouští triviální snížení řádu

- substitucí $w(x) := z'(x)$ nyní snadno snížíme řád minimálně o jedna
- pak tedy získáme rovnici řádu $n - 1$ tvaru

$$\widehat{L}_{\bullet\bullet}(w(x)) = w^{(n-1)}(x) + \frac{\wp_{n-1}(x)}{v(x)}w^{(n-2)}(x) + \frac{\wp_{n-2}(x)}{v(x)}w^{(n-3)}(x) + \dots + \frac{\wp_1(x)}{v(x)}w(x) = \frac{q(x)}{v(x)}$$

- jsou-li $w(x)$ všechna její řešení, jsou potom funkce $y(x) = v(x) \int w(x) dx$ všechna řešení rovnice (4.34)

4.4.6 Poznámka

Předešlou větu lze shrnout následovně: Znalost jednoho nenulového řešení příslušné lineární diferenciální rovnice bez pravé strany umožňuje snížit řád původní rovnice minimálně o jedna.

4.4.7 Příklad

Řešme diferenciální rovnici

$$x^2 y'' - 5xy' + 8y = 16 \quad (4.35)$$

užitím faktu, že funkce $v(x) = x^2$ je řešením rovnice

$$x^2 y'' - 5xy' + 8y = 0. \quad (4.36)$$

Dle věty 4.4.5 zavedeme do zadané rovnice novou funkci $z(x)$ předpisem $y(x) = z(x) \cdot x^2$. Odtud $y' = z'x^2 + 2xz$ a $y'' = z''x^2 + 4xz' + 2z$. Po dosazení se původní rovnice redukuje do tvaru $z''x^4 - x^3z' = 16$. Po zavedení substituce $w(x) = z'(x)$ dojde k formálnímu snížení řádu. Lineární diferenciální rovnici

$$w' - \frac{w}{x} = \frac{16}{x^4}$$

prvního řádu standardně vynásobíme integračním faktorem x^{-1} a získáváme tak rovnost

$$\left(w(x) \cdot \frac{1}{x} \right)' = \frac{16}{x^5},$$

která vede k řešení $w(x) = \tilde{C}x - 4x^{-3}$. Dále

$$z(x) = \int w(x) dx = C_1 x^2 + C_2 + \frac{2}{x^2},$$

odkud již získáme úplné řešení úlohy, a sice $y(x) = C_1 x^4 + C_2 x^2 + 2$, kde $I = \mathbf{R}$. Toto řešení může být také zapsáno ve tvaru

$$y(x) \in [x^4, x^2]_{\lambda} + 2,$$

ze kterého je patrné, že prostor Ω_0 všech řešení rovnice (4.36) je dvoudimenzionální a že jeho bázi je uspořádaný soubor (x^4, x^2) . Funkce $y(x) = 2$ pak představuje partikulární řešení rovnice (4.35), tedy $\Omega_q = [x^4, x^2]_{\lambda} + 2$.

4.4.8 Poznámka

Typickými praktickými zástupci diferenciálních rovnic jsou pohybové rovnice vzešlé z úloh newtonovské mechaniky. Druhý Newtonův zákon totiž reprezentuje diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci $y(t)$ mapující časový vývoj polohy y sledovaného tělesa. Dobrým příkladem může být rovnice pro tlumené kmitání, jež je tvaru

$$my''(t) = -ky(t) - \kappa y'(t),$$

kterou lze elementární úpravou převést do konzolidovaného tvaru $y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega^2 y(t) = 0$. To je tvar formálně naplňující definici 4.1.6. Taková rovnice může mít nekonečně mnoho řešení, ale z fyzikální podstaty problému nás vždy zajímá to řešení, které vychází z počátečního stavu systému. Tento počáteční stav je zcela přirozeně popsán podmínkami pro polohu a rychlost v čase $t = 0$. Z matematického hlediska jsou proto tyto podmínky popsány rovnostmi $y(0) = y_0$ a $y'(0) = v_0$. Tím je pro danou obyčejnou diferenciální rovnici definována specifická úloha zabývající se hledáním těch řešení, které vyhovují daným podmínkám. Přirozené zobecnění takových úloh je zavedeno v následující definici.

4.4.9 Definice

Nechť jsou na intervalu I zadány diferenciální operátor $\widehat{L}$ řádu n , spojitá funkce $q(x)$, bod $x_0 \in I$ a reálná čísla $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$. Pak *Cauchyovou úlohou* pro diferenciální rovnici budeme rozumět hledání řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ vyhovujícího n podmínkám

$$y^{(k)}(x_0) = d_k, \quad k \in \overline{n-1}. \quad (4.37)$$

Podmínky tvaru (4.37) nazýváme *Cauchyovými počátečními podmínkami*.

4.4.10 Poznámka

Jedním z významných výsledků teorie o diferenciálních rovnicích je na první pohled překvapující fakt, že hledáme-li řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ takové, že ve vybraném bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ platí

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad (4.38)$$

existuje pouze jediné takové řešení, a sice řešení nulové, tj. nulová funkce $y(x) = 0$. Toto tvrzení nyní korektně vyslovíme a dokážeme. Bude totiž výchozím bodem dalších úvah.

4.4.11 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ jsou spojitě na I . Nechť $y(x)$ je takovým řešením rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$, že pro pevně zvolené $x_0 \in I$ platí (4.38). Pak $y(x) = 0$ pro každé $x \in I$.

Důkaz:

- nechť $H = \{x \in I : x > x_0 \wedge y(x) \neq 0\}$
- předpokládejme, že $H \neq \emptyset$ a ukažme, jak dojít ke sporu
- První část:
 - vidíme, že H je jistě zdola omezená, má tedy infimum, pro které platí $\xi := \inf(H) \geq x_0$
 - bude-li $\xi = x_0$, pak snadno

$$y(\xi) = y'(\xi) = \dots = y^{(n-1)}(\xi) = 0$$
 - bude-li $\xi > x_0$, potom jistě platí:

$$(\forall x \in (x_0, \xi)) : y(x) = 0$$
 - ze spojitosti rovněž plyne, že $y(\xi) = 0$, a tedy také $y'_-(\xi) = 0$
 - poněvadž ale víme, že ve všech bodech existují vlastní derivace (oboustranné), pak jistě platí, že $y'(\xi) = 0$
 - stejnou úvahou dostáváme:

$$(\forall k \in \mathbf{N})(k < n) : y^{(k)}(\xi) = 0$$
 - z rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ pak přímo vychází, že také $y^{(n)}(\xi) = 0$
 - tím jsme tedy prokázali, že v infimu množiny H jsou všechny derivace (včetně nejvyšší) nulové
- Druhá část:
 - zvolme nyní $x_2 \in I$ takové, že $x_2 > \xi$ a $x_2 \in H$ (tedy $y(x_2) \neq 0$)
 - z definice lineární diferenciální rovnice víme, že všechny funkce $p_i(x)$ jsou na I spojitě, jsou tedy spojitě i na intervalu $\langle \xi, x_2 \rangle$
 - proto jistě existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ a všechna $x \in \langle \xi, x_2 \rangle$ platí $|p_i(x)| \leq K$
 - zvolme nyní $\delta > 0$ takové, aby $\xi + \delta < x_2$, a přitom aby

$$\sum_{i=1}^n \delta^i < \frac{1}{K} \quad (4.39)$$

- víme dále, že funkce $y^{(n)}(x)$ je na I spojitá, neboť je součtem součinů spojitých funkcí

- proto také nabývá na uzavřeném intervalu $\langle \xi, \xi + \delta \rangle$ svého maxima
- čili existuje $x_3 \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ takové, že

$$|y^{(n)}(x_3)| = \max \left\{ |y^{(n)}(x)| : x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle \right\} \quad (4.40)$$

- položme $\sigma := |y^{(n)}(x_3)|$
- jestliže $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$, pak podle Lagrangeovy věty o přírůstku 1.3.15 existuje mezi bodem ξ a bodem $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ číslo μ takové, že

$$y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(\xi) = y^{(n)}(\mu) \cdot (x - \xi)$$

- tedy

$$|y^{(n-1)}(x)| = |y^{(n-1)}(x) - \overbrace{y^{(n-1)}(\xi)}^{=0}| = |y^{(n)}(\mu)| \cdot |x - \xi| \leq \sigma \cdot \delta$$

- analogicky tedy pro všechna $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ platí

$$|y^{(n-2)}(x)| \leq \delta^2 \sigma, |y^{(n-3)}(x)| \leq \delta^3 \sigma, \dots, |y^{(n-k)}(x)| \leq \delta^k \sigma, \dots, |y(x)| \leq \delta^n \sigma$$

- z rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ a posledně prokázaných nerovností tudíž pro všechna $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ plyne, že

$$|y^{(n)}(x)| = \left| - \sum_{m=0}^{n-1} p_m(x) y^{(m)}(x) \right| \leq \sum_{m=0}^{n-1} |p_m(x)| \cdot |y^{(m)}(x)| \leq K\sigma \sum_{m=0}^{n-1} \delta^{n-m} = K\sigma \sum_{k=1}^n \delta^k \leq \sigma \quad (4.41)$$

- položíme-li v rovnosti (4.41) $x = x_3$, obdržíme nerovnost $\sigma \leq \sigma$, kterou lze splnit pouze tehdy, je-li $\sigma = 0$, což je ale spor s faktem (4.40)
- a proto musí být množina H nutně prázdná

• Diskuse:

- analogicky by se postupovalo pro $H = \{x \in I : x < x_0 \wedge y(x) \neq 0\}$
- důležité je si uvědomit, že zásadní předpokladem je fakt, že I je interval
- pokud by např. množina I byla disjunktním sjednocením dvou intervalů, důkaz bychom neprovedli

4.4.12 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou spojité na intervalu I . Nechť dále $d_0, d_1, \dots, d_{n-1} \in \mathbf{R}$ a $x_0 \in I$. Pak existuje nejvýše jedno řešení $v(x)$ rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ takové, že pro každé $i \in \widehat{n-1}$ platí

$$v^{(i)}(x_0) = d_i. \quad (4.42)$$

Důkaz:

- předpokládejme, že existují dvě různá řešení $v(x)$ a $w(x)$ splňující podmínku (4.42)
- definujme funkci $z(x) := v(x) - w(x)$
- odtud $\widehat{L}(z(x)) = \widehat{L}(v(x) - w(x)) = \widehat{L}(v(x)) - \widehat{L}(w(x)) = q(x) - q(x) = 0$
- zároveň také pro každé $i \in \widehat{n-1}$ platí $z^{(i)}(x_0) = d_i - d_i = 0$
- podle věty 4.4.11 je tedy funkce $z(x)$ nulovou funkcí, což značí, že $v(x) = w(x)$
- a to je spor s předpokladem

4.4.13 Definice

Nechť funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají v množině $M \subset \mathbf{R}$ všechny derivace až do řádu $n - 1$ včetně. Pak matici definovanou vztahem

$$\mathbb{W}_{f_1, f_2, \dots, f_n}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

nazýváme *Wronského matici* a její determinant $W_{f_1, f_2, \dots, f_n}(x) = \det(\mathbb{W}_{f_1, f_2, \dots, f_n})$ *Wronského determinantem* (wronskiánem) funkcí $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ na množině M .

4.4.14 Příklad

Vypočtěme wronskián systému funkcí $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k\}$. Sestavme tedy příslušný determinant. Je jím

$$W_{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{k-1} & x^k \\ 0 & 1 & 2x & \dots & (k-1)x^{k-2} & kx^{k-1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (k-1)(k-2)x^{k-3} & k(k-1)x^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k-1)! & k!x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k! \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^k i!$$

4.4.15 Věta

Nechť funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají v množině $M \subset \mathbf{R}$ derivace až do řádu $n - 1$ včetně a jsou lineárně závislé na množině M . Potom pro všechna $x \in M$ platí: $W_{f_1, f_2, \dots, f_n}(x) = 0$.

Důkaz:

- funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ jsou lineárně závislé, tedy podle poznámky 4.1.16 existují reálná čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ (ne všechna nulová) tak, že platí $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$
- a tedy také pro všechna $k \in \widehat{n-1}$ a všechna $x \in M$ platí $c_1 f_1^{(k)}(x) + c_2 f_2^{(k)}(x) + \dots + c_n f_n^{(k)}(x) = 0$
- sloupce determinantu matice (4.43) jsou tudíž lineárně závislé, z čehož plyne, že pro všechna $x \in M$ platí

$$W_{f_1, f_2, \dots, f_n}(x) = 0$$

4.4.16 Důsledek

Nechť funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají v množině $M \subset \mathbf{R}$ derivace až do řádu $n - 1$ včetně. Pokud existuje $x_0 \in M$ takové, že $W_{f_1, f_2, \dots, f_n}(x_0) \neq 0$, pak $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ jsou na M lineárně nezávislé.

4.4.17 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ jsou spojité na intervalu I . Nechť $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Pak pro každé $x \in I$ platí nerovnost $W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x) \neq 0$.

Důkaz:

- pro spor předpokládejme, že existuje $x_0 \in I$ takové, že $W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x_0) = 0$
- pro $x = x_0$ jsou tudíž sloupce Wronského matice $\mathbb{W}_{y_1, y_2, \dots, y_n}$ lineárně závislé, a tedy existují čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$, z nichž alespoň jedno je nenulové, tak, že pro každé $k \in \widehat{n-1}$ platí $\sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0$
- položíme $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$, pak $\widehat{L}(y(x)) = 0$ na I a $y^{(k)}(x_0) = 0$ pro každé k
- z věty 4.4.11 plyne, že $y(x) = 0$ na celém I , což je spor s lineární nezávislostí funkcí $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ na otevřeném intervalu I

4.4.18 Poznámka

Všimněme si, že funkce $y_1(x) = x$ a $y_2(x) = \ln(x)$ jsou zcela zjevně lineárně nezávislé, přesto ale existuje bod $x_0 = e$, v němž je příslušný wronskián nulový, tj.

$$W_{y_1, y_2}(e) = \begin{vmatrix} x & \ln(x) \\ 1 & x^{-1} \end{vmatrix} (e) = 1 - \ln(x) \Big|_{x=e} = 0.$$

Z předchozí věty tedy plyne, že obě funkce nemohou být na intervalu $\mathbf{R}^+$ řešením žádné lineární diferenciální rovnice druhého řádu $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$.

4.4.19 Komentář

Jednou z nejzásadnějších otázek celé teorie diferenciálních rovnic je otázka existence řešení každé lineární diferenciální rovnice tvaru (4.3). Pro příslušný důkaz je účelné nahradit rovnici (4.3) soustavou n diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= \wp_{11}(x) y_1 + \wp_{12}(x) y_2 + \dots + \wp_{1n}(x) y_n \\ y_2' &= \wp_{21}(x) y_1 + \wp_{22}(x) y_2 + \dots + \wp_{2n}(x) y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= \wp_{n1}(x) y_1 + \wp_{n2}(x) y_2 + \dots + \wp_{nn}(x) y_n. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Soustava (4.44) a rovnice (4.3) jsou svázány vztahy

$$y_1(x) := y(x), \quad y_2(x) := \frac{dy_1}{dx}, \quad y_3(x) := \frac{dy_2}{dx}, \dots, \quad y_n(x) := \frac{dy_{n-1}}{dx},$$

tj.

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad y_3(x) = y''(x), \dots, \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x), \quad y_n'(x) = y^{(n)}(x).$$

Diskutovat existenci řešení rovnice (4.3) tedy znamená garantovat řešení každé soustavy tvaru (4.44).

4.4.20 Věta – existenční věta pro soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

Nechť pro všechny indexy $i, j \in \hat{n}$ jsou funkce $\wp_{ij}(x)$ spojitými funkcemi na otevřeném intervalu I . Nechť $x_0 \in I$ a $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbf{R}^n$. Pak soustava (4.44) má na I řešení $\vec{y}(x)$ vyhovující podmínce $\vec{y}(x_0) = \vec{\sigma}$.

Důkaz:

- úloha nalézt řešení soustavy rovnic (4.44) s počáteční podmínkou $\vec{y}(x_0) = \vec{\sigma}$ v Cauchyově tvaru (viz definice 4.4.9) je ekvivalentní s úlohou nalézt vektor funkcí $\vec{y}(x)$ s definičním oborem I tak, aby

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{x_0}^x \left(\sum_{j=1}^n \wp_{1j}(t) y_j(t) \right) dt + \sigma_1 \\ y_2(x) &= \int_{x_0}^x \left(\sum_{j=1}^n \wp_{2j}(t) y_j(t) \right) dt + \sigma_2 \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \int_{x_0}^x \left(\sum_{j=1}^n \wp_{nj}(t) y_j(t) \right) dt + \sigma_n \end{aligned} \tag{4.45}$$

- tuto úlohu řešíme tzv. *metodou postupných aproximací*, tj. konstruujeme posloupnost funkcí

$$\vec{y}^{(\ell)}(x) = (y_1^{(\ell)}(x), y_2^{(\ell)}(x), \dots, y_n^{(\ell)}(x))^T$$

tak, že $\vec{y}^{(\ell)}(x) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \vec{y}(x)$, kde $\vec{y}(x)$ je hledané řešení soustavy (4.45) na I

- takovou posloupnost definujeme rekurentně předpisem

$$\vec{y}^{(0)}(x) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^\top, \quad y_i^{(\ell)}(x) = \int_{x_0}^x \sum_{j=1}^n \wp_{ij}(t) y_j^{(\ell-1)}(t) dt + \sigma_i \quad (4.46)$$

- nyní dokážeme, že na každém uzavřeném intervalu $J \subset I$, pro nějž $x_0 \in J$, konverguje posloupnost $(\vec{y}^{(\ell)}(x))_{\ell=0}^\infty$ stejnoměrně k funkci $\vec{y}(x)$, která úlohu (4.45) řeší
- označme délku intervalu J symbolem L
- označme $Y := \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, \dots, |\sigma_n|\}$
- dále ze spojitosti funkcí $\wp_{ij}(x)$ na kompaktním intervalu J víme, že existuje $K \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $i, j \in \hat{n}$ a všechna $x \in J$ platí nerovnost $|\wp_{ij}(x)| \leq K$
- ze vztahu (4.46) vyplývá, že pro každé $i \in \hat{n}$ platí:

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}(x)| = |y_i^{(1)}(x) - \sigma_i| \leq nKY|x - x_0|$$

- analogicky pro každé $i \in \hat{n}$ (jak lze dokázat matematickou indukcí) platí:

$$|y_i^{(\ell+1)}(x) - y_i^{(\ell)}(x)| \leq nY \frac{n^\ell K^{\ell+1} |x - x_0|^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \leq Y \frac{n^{\ell+1} K^{\ell+1} L^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \quad (4.47)$$

- pro $i \in \hat{n}$ nyní označme

$$y_i(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} y_i^{(\ell)}(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[y_i^{(0)}(x) + \sum_{k=0}^{\ell-1} (y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}(x)) \right] = \sigma_i + \sum_{k=0}^{\infty} (y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}(x))$$

- uvedená limita skutečně existuje, neboť platí vztah (4.47), který garantuje, že konvergentní číselná řada

$$Y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{\ell+1} K^{\ell+1} L^{\ell+1}}{(\ell+1)!} = Y (e^{nKL} - 1)$$

je majorantní řadou k řadě $\sum_{k=0}^{\infty} (y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}(x))$

- podle Weierstrassova kritéria 2.2.14 navíc konverguje zkoumaná řada na J stejnoměrně
- tudíž i pravá strana ve vztahu (4.46) konverguje, a platí tedy (po záměně limity a integrálu)

$$y_i(x) = \int_{x_0}^x \sum_{j=1}^n \wp_{ij}(t) y_j(t) dt + \sigma_i, \quad (i \in \hat{n}),$$

což prokazuje fakt, že takto zkonstruovaný vektor $\vec{y}(x)$ řeší soustavu (4.45) na J

- protože každé $x \in I$ leží v některém uzavřeném intervalu $J \subset I$, je $\vec{y}(x)$ řešením soustavy (4.45) na celém I

4.4.21 Poznámka

Následující text se bude zabývat dvěma fundamentálními otázkami celé teorie diferenciálních rovnic. A sice, kolik existuje lineárně nezávislých řešení dané rovnice a kolik řešení má Cauchyova úloha pro rovnici s nulovou pravou stranou. Vzhledem k tomu, že předešlá věta 4.4.20 prokázala řešení každé takové úlohy, je přirozené se ptát, kolik takových řešení existuje.

4.4.22 Věta – základní věta teorie diferenciálních rovnic

Vektorový prostor všech řešení diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ řádu n má dimenzi n , tj. $\dim(\Omega_0) = n$.

Důkaz:

- podle existenční věty 4.4.20 lze ke každé n -tici podmínek $y_k(x_0) = \sigma_k$ ($k \in \hat{n}$) nalézt řešení soustavy (4.44)
- to tedy značí, že po přeznačení

$$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), y_3(x) = y''(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x), y'_n(x) = y^{(n)}(x),$$

lze řešit každou Cauchyovu úlohu 4.4.9 s podmínkami $y^{(k)}(x_0) = d_k$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$

- formálně navíc: $\sigma_k = d_{k-1}$
- zvolme nyní n řešení Cauchyovy úlohy 4.4.9 takových, že první z nich má vektor počátečních podmínek (stanovených v bodě $x_0 \in I$) rovný $(1, 0, 0, \dots, 0)$, druhý rovný $(0, 1, 0, \dots, 0)$, třetí $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, atd.
- označme tato řešení $z_m(x)$, $m = 1, 2, \dots, n$ a ukažme, že jsou lineárně nezávislá
- protože Wronského determinant těchto funkcí vyčíslený v bodě $x = x_0$ má hodnotu jedna (neboť Wronského matice je jednotkovou maticí), jsou podle důsledku 4.4.16 funkce $z_m(x)$, kde $m = 1, \dots, n$, lineárně nezávislé
- zbývá ukázat, že přidáme-li do lineárně nezávislého souboru funkcí $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ další funkci $w(x)$, pro kterou také platí, že $\widehat{L}(w(x)) = 0$, pak je takto vzniklý soubor lineárně závislý
- pro funkci $w(x)$ označme $\beta_i = w^{(i)}(x_0)$ a ukažme, že $w(x)$ lze nakombinovat z funkcí souboru $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$
- hledejme tedy konstanty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ tak, že $\sum_{m=1}^n c_m z_m(x) = w(x)$
- protože odtud plyne, že $w^{(i)}(x) = \sum_{m=1}^n c_m z_m^{(i)}(x)$, lze celé řešení s výhodou (po dosazení $x = x_0$) převést do tvaru soustavy

$$\begin{pmatrix} z_1(x_0) & z_2(x_0) & \dots & z_{n-1}(x_0) & z_n(x_0) \\ z'_1(x_0) & z'_2(x_0) & \dots & z'_{n-1}(x_0) & z'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)}(x_0) & z_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_{n-1}^{(n-1)}(x_0) & z_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

pro neznámé $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$

- její determinant je ale totožný s wronskiánem $W_{z_1, z_2, \dots, z_n}(x_0)$, o němž již víme, že není nulový
- proto má uvedená soustava řešení, a $w(x)$ je tedy skutečně lineární kombinací funkcí $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$
- uzavíráme proto, že $\dim(\Omega_0) = n$

4.4.23 Definice

Každá množina n lineárně nezávislých řešení $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$, jež podle věty 4.4.22 generuje bázi vektorového prostoru Ω_0 všech řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$, se nazývá *fundamentálním systémem* řešení diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$, resp. $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$.

4.4.24 Věta – o jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

Nechť je dán operátor $\widehat{L}$ a funkce $q(x) \in C(I)$. Nechť je množina $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentálním systémem rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Nechť jsou pevně zvoleny bod $x_0 \in I$ a čísla $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ takové, že pro něj platí počáteční podmínky (4.37).

Důkaz:

- vezmeme tedy $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ a $x_0, d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ dle předpokladů věty

- z věty 4.4.17 víme, že

$$W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x_0) \neq 0 \quad (4.48)$$

- označme $y_p(x)$ libovolné partikulární řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ (viz věta 4.1.14)
- požadované řešení $y(x)$ rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ vyhovující podmínkám (4.37) budeme hledat ve tvaru prvku lineární variety Ω_q , tj. ve tvaru lineární kombinace funkcí $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, k níž je připočteno dané partikulární řešení
- předpokládáme tedy, že

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x), \quad (4.49)$$

kde c_i jsou dosud neznámé reálné konstanty

- jejich hodnoty se pokusíme vypočítat z podmínek (4.37)
- získáme tím soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) + y_p(x_0) &= d_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) + y_p'(x_0) &= d_1 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y_p^{(n-1)}(x_0) &= d_{n-1} \end{aligned} \quad (4.50)$$

pro neznámé $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$

- tato soustava může být přepsána do maticového zápisu

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_{n-1}(x_0) & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_{n-1}'(x_0) & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 - y_p(x_0) \\ d_1 - y_p'(x_0) \\ \vdots \\ d_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

- povšimněme si, že determinantem soustavy je právě wronskián (4.48)
- z lineární algebry víme, že je-li tento determinant nenulový (a v našem případě je, jak vidno z podmínky (4.48)), pak má tato soustava právě jedno řešení
- tedy existují čísla $c_i \in \mathbf{R}$ ($i \in \widehat{n}$) tak, že soustava (4.50) je splněna
- tedy řešení (4.49) vyhovuje podmínkám $y^{(i)}(x_0) = d_i$ a navíc se skutečně jedná o řešení zkoumané rovnice, neboť

$$\widehat{L}(y(x)) = c_1 \widehat{L}(y_1(x)) + c_2 \widehat{L}(y_2(x)) + \dots + c_n \widehat{L}(y_n(x)) + \widehat{L}(y_p(x)) = q(x)$$

- to, že nalezené řešení je jedinečné, vyplývá z tvrzení 4.4.12

4.4.25 Poznámka

Ukažme nyní, proč se výraz e^{ix} definuje jako

$$e^{ix} := \cos(x) + i \sin(x). \quad (4.51)$$

Snadno nahlédneme, že $(e^{ix})' = i e^{ix}$ a $(e^{ix})'' = -e^{ix}$. Je tedy patrné, že funkce $v(x) = e^{ix}$ je řešením diferenciální rovnice $y''(x) + y(x) = 0$. Rovněž ale funkce $y_1(x) = \sin(x)$ a $y_2(x) = \cos(x)$ jsou dvě nezávislá řešení téže rovnice, neboť pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí

$$W_{\cos(x), \sin(x)}(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0.$$

Tyto funkce tedy tvoří fundamentální systém (tento musí mít pouze a právě dva prvky), a proto musí být funkce $v(x)$ lineární kombinací obou funkcí z fundamentálního systému zkoumané rovnice. Tedy

$$e^{ix} = a \cos(x) + b \sin(x),$$

kde a a b jsou dosud neznámé konstanty. Jejich hodnoty ale snadno vypočteme z počátečních podmínek $v(0) = 1$ a $v'(0) = i$. Odtud $a = 1$ a $b = i$. A platí tedy vztah (4.51), jenž bývá nazýván *Eulerovým vzorcem*.

4.4.26 Věta – o metodě variace konstant

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I . Nechť množina

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

je fundamentálním systémem rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Jestliže pro funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ platí n rovností

$$\sum_{j=1}^n f_j(x) y_j^{(i)}(x) = 0$$

pro $i \in \widehat{n-2}$ a

$$\sum_{j=1}^n f_j(x) y_j^{(n-1)}(x) = q(x)$$

a funkce $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ jsou po řadě primitivní k funkcím $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ v intervalu I , pak funkce $Y(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x) y_j(x)$ je řešením rovnice

$$\widehat{L}(Y(x)) = q(x). \quad (4.52)$$

Důkaz:

- víme, že funkce $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ jsou za daných předpokladů všemi řešeními rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$
- snahou je hledat řešení rovnice (4.52) v podobném tvaru, a sice ve tvaru $\sum_{j=1}^n F_j(x) y_j(x)$, ve kterém jsou tzv. *variovány* konstanty (změněny na funkce)
- přitom $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ jsou dosud neznámé funkce (pro jejich určení je třeba stanovit n výše citovaných podmínek)
- provedeme nyní první derivaci funkce $Y(x)$:

$$Y'(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x) y_j'(x) + \sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j(x),$$

v níž položíme výraz $\sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j(x)$ roven nule (tím jsme obdrželi první podmínku)

- analogicky dále:

$$Y''(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x) y_j''(x) + \sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j'(x),$$

kde klademe $\sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j'(x) = 0$ (to představuje druhou podmínku)

- až

$$Y^{(n-1)}(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x) y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j^{(n-2)}(x),$$

kde položíme $\sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j^{(n-2)}(x) = 0$

- pro n -tou derivaci

$$Y^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x) y_j^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j^{(n-1)}(x)$$

pak položíme výraz $F_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + F_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + F_n'(x) y_n^{(n-1)}(x)$ roven pravé straně rovnice (4.52)

- tím je zaručeno, že

$$\widehat{L}(Y(x)) = \sum_{j=1}^n F_j(x) \widehat{L}(y_j(x)) + \sum_{j=1}^n F_j'(x) y_j^{(n-1)}(x) = q(x)$$

- pro konkrétní tvar řešení pak dostáváme n podmínek:

$$\begin{aligned} f_1(x)y_1(x) + f_2(x)y_2(x) + \dots + f_n(x)y_n(x) &= 0 \\ f_1(x)y_1'(x) + f_2(x)y_2'(x) + \dots + f_n(x)y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ f_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + f_2(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots + f_n(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ f_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + f_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + f_n(x)y_n^{(n-1)}(x) &= q(x) \end{aligned}$$

- tato soustava může být přepsána do maticového zápisu

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

- povšimněme si, že determinatem soustavy je právě wronskián fundamentálního systému
- ten je ale zřejmě pro všechna $x \in I$ nenulový
- z lineární algebry odtud vyplývá, že soustava (4.53) pro neznámé $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ je vždy řešitelná
- funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ jsou navíc spojitě na I , a tedy k nim jistě existují funkce primitivní
- tím je věta dokázána

4.4.27 Poznámka

Z důkazu předešlé věty vyplývá postup při hledání řešení rovnice (4.52). Označme nejprve wronskián fundamentálního systému takto:

$$\Delta(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soustavu (4.53) pro neznámé funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ budeme řešit Cramerovým pravidlem. Označme pro tento účel

$$\Delta_1(x) := \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ 0 & y_2'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ q(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

první dílčí determinant. Tento vznikl záměnou prvního sloupku ve wronskiánu za sloupcový vektor pravé strany rovnice (4.53). Dále podobně

$$\Delta_2(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & \dots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & 0 & \dots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & 0 & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & q(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

pro druhý dílčí determinant a tak dále. Nakonec

$$\Delta_n(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & 0 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & q(x) \end{vmatrix}.$$

Pak hledané funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají tvar

$$f_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}$$

a jsou navíc spojité. Nechť $F_i(x) = \int f_i(x) dx + C_i$ jsou primitivní funkce k funkcím $f_i(x)$. Pak hledaným řešením rovnice (4.52) je funkce

$$Y(x) = F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x) + \dots + F_n(x)y_n(x).$$

4.4.28 Příklad

Znovu se navracíme k řešení příkladu 4.2.2. Tentokrát jej budeme řešit metodou variace konstant. Nejprve tedy vyřešíme rovnici $y' - 2xy = 0$. Po snadné separaci dostáváme řešení rovnice s nulovou pravou stranou ve tvaru $y(x) = C e^{x^2}$. Řešení rovnice $\widehat{L}(Y(x)) = 2x$ předpokládáme podle věty 4.4.26 ve tvaru $Y(x) := F(x) e^{x^2}$. Pro $f(x) := F'(x)$ pak (podle návodu demonstrovaného v minulé poznámce) má platit:

$$f(x) e^{x^2} = 2x.$$

Odsud $f(x) = 2x e^{-x^2}$ a následně $F(x) = -e^{-x^2} + C$. Uzavíráme tedy, že kompletní řešení zadané rovnice je opět tvaru

$$Y(x) = C e^{x^2} - 1, \quad I = \mathbf{R}.$$

4.4.29 Příklad

Nalezneme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 6x e^{2x},$$

víme-li, že fundamentálním systémem zadané rovnice je množina

$$F_S = \{e^{2x}, x e^{2x}\}. \quad (4.54)$$

Funkce e^{2x} , $x e^{2x}$ řeší příslušnou rovnici bez pravé strany a pro jejich wronskián platí

$$W_{e^{2x}, x e^{2x}} = \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} \neq 0.$$

Tím byla mimo jiné provedena kontrola, že množina (4.54) skutečně fundamentálním systémem je. Metodou variace konstant hledáme řešení tvaru

$$y(x) = F_1(x) e^{2x} + F_2(x) x e^{2x}.$$

Užijeme zautomatizovaný postup podrobně probraný v poznámce 4.4.27. Podle něj

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{2x} \\ 6x e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = -6x^2 e^{4x}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 6x e^{2x} \end{vmatrix} = 6x e^{4x}.$$

Proto

$$f_1(x) = \frac{\Delta_1}{W} = -6x^2, \quad f_2(x) = \frac{\Delta_2}{W} = 6x.$$

Pro příslušné primitivní funkce pak snadno

$$F_1(x) = -2x^3 + C_1, \quad F_2(x) = 3x^2 + C_2,$$

odkud pak získáváme finální řešení tvaru

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^3 e^{2x}, \quad I = \mathbf{R}.$$

4.4.30 Věta – o superpozici

Nechť jsou dány spojité funkce $q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x)$. Nechť množina $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ je fundamentálním systémem lineární diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Nechť dále funkce $y_{p_1}(x), y_{p_2}(x), \dots, y_{p_k}(x)$ jsou po řadě partikulárními řešeními rovnic $\widehat{L}(y(x)) = q_i(x)$, kde $i \in \widehat{k}$. Pak úplným řešením diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = \sum_{i=1}^k q_i(x)$ je funkce

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(x) + \sum_{i=1}^k y_{p_i}(x).$$

Důkaz:

- snadno ukážeme, že z linearity operátoru $\widehat{L}$ vyplývá

$$\widehat{L}(y(x)) = \sum_{j=1}^n c_j \widehat{L}(y_j(x)) + \sum_{i=1}^k \widehat{L}(y_{p_i}(x)) = \sum_{i=1}^k \widehat{L}(y_{p_i}(x)) = \sum_{i=1}^k q_i(x)$$

4.5 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Ze všech dostupných lineárních diferenciálních rovnic budeme nyní podrobněji zkoumat rovnice s konstantními koeficienty. Jedná se o nejfrekventovanější typy diferenciálních rovnic a také o typy poměrně snadno řešitelné. Seznámíme se proto nyní s metodami jejich řešení.

4.5.1 Definice

Lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty (řádu n) rozumíme rovnici tvaru

$$\widehat{L}(y(x)) = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = q(x), \quad (4.55)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, $a_n = 1$ a $q(x)$ je spojitá funkce.

4.5.2 Poznámka

Pokusme se hledat některá řešení diferenciální rovnice (4.55) s pravou stranou $q(x) = 0$. Pro tento záměr budeme uvažovat funkce tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$. Snadno nahlédneme, že $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, a tedy po dosazení do (4.55) a krácení výrazem $e^{\lambda x}$ dostaneme

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (4.56)$$

Je-li tedy některé λ řešením této rovnice, pak funkce $y(x) = e^{\lambda x}$ je řešením (4.55). Zároveň ale není tato úvaha vyčerpávající, neboť pro diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0$$

má algebraická rovnice (4.56) pouze jediný kořen $\lambda = 1$. Z obecné teorie (viz základní věta teorie diferenciálních rovnic 4.4.22) ale vyplývá, že kromě funkce $y(x) = e^{\lambda x} = e^x$ musí být ve fundamentálním systému zkoumané rovnice ještě jedna funkce. Předešlá metoda ji ale nenachází. Proto bude nutné zkoumat řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty podrobněji.

4.5.3 Definice

Nechť je zadána lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (4.55). Polynom

$$\ell(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (4.57)$$

nazýváme *charakteristickým polynomem* diferenciální rovnice (4.55). Rovnici $\ell(\lambda) = 0$ nazýváme *charakteristickou rovnicí*

4.5.4 Věta

Nechť je zadána lineární diferenciální rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (4.58)$$

s konstantními koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$. Nechť nula je k –násobným kořenem jejího charakteristického polynomu. Pak lineární obal

$$[1, x, x^2, \dots, x^{k-2}, x^{k-1}]_\lambda$$

tvorí k –dimenzionální podprostor vektorového prostoru Ω_0 všech řešení rovnice (4.58).

Důkaz:

- označme $\ell(\lambda)$ charakteristický polynom rovnice (4.58)
- je-li nula k –násobným kořenem $\ell(\lambda)$, pak tedy

$$\ell(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_{k+1} \lambda^{k+1} + a_k \lambda^k,$$

čili $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{k-2} = a_{k-1} = 0$

- rovnice (4.58) má tedy podobu

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{k+1} y^{(k+1)}(x) + a_k y^{(k)}(x) = 0 \quad (4.59)$$

- proto všechny funkce $1, x, x^2, \dots, x^{k-2}, x^{k-1}$ rovnici (4.59) řeší
- nyní zbývá dokázat, že uvedené funkce jsou lineárně nezávislé
- podle věty 4.4.15 stačí dokázat, že příslušný wronskián není nulový, což ale bylo prokázáno v příkladě 4.4.14

4.5.5 Poznámka

Dokázané tvrzení nyní zobecníme pro případ, kdy k –násobným kořenem charakteristického polynomu $\ell(\lambda)$ diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ bude komplexní číslo $\alpha \in \mathbb{C}$.

4.5.6 Věta

Nechť je zadána lineární diferenciální rovnice (4.58) s konstantními koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$. Nechť číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je k –násobným kořenem jejího charakteristického polynomu. Pak lineární obal

$$[e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{k-2} e^{\alpha x}, x^{k-1} e^{\alpha x}]_\lambda$$

tvorí k –dimenzionální podprostor vektorového prostoru Ω_0 všech řešení rovnice (4.58).

Důkaz:

- k důkazu použijeme tvrzení předešlé věty
- do rovnice

$$\widehat{L}(y(x)) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = 0 \quad (4.60)$$

zavedeme novou funkci $z(x)$ předpisem

$$y(x) = z(x) e^{\alpha x} \quad (4.61)$$

- z Leibnizovy formule pro derivaci součinu dostáváme

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i e^{\alpha x} z^{(k-i)}(x).$$

- to po dosazení do rovnice (4.60) a krácení výrazem $e^{\alpha x}$ vede na rovnici

$$\widehat{L}_\bullet(z(x)) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_k \alpha^i z^{(k-i)}(x) = 0 \quad (4.62)$$

- charakteristický polynom této rovnice má tedy tvar

$$\wp(\mu) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_k \alpha^i \mu^{k-i}$$

- pokud se ho pokusíme upravit, zjišťujeme, že platí

$$\wp(\mu) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_k \alpha^i \mu^{k-i} = \sum_{k=0}^n a_k (\alpha + \mu)^k$$

- je-li tedy $\ell(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$ charakteristický polynom rovnice (4.60), platí mezi těmito dvěma polynomy jednoduchý vztah $\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu)$, tj. $\lambda = \alpha + \mu$
- dle předpokladu věty je ale komplexní číslo α k -násobným kořenem polynomu $\ell(\lambda)$
- to značí, že $\ell(\lambda) = a_n (\lambda - \alpha)^k (\lambda - \beta)^{k_\beta} (\lambda - \gamma)^{k_\gamma} \dots$, kde čísla $\alpha, \beta, \gamma \dots$ jsou různé komplexní kořeny charakteristického polynomu $\ell(\lambda)$ s násobnostmi po řadě k, k_β, k_γ atd.
- pak ale $\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu) = a_n \mu^k [\mu - (\beta - \alpha)]^{k_\beta} [\mu - (\gamma - \alpha)]^{k_\gamma} \dots$
- tedy nula je k -násobným kořenem polynomu $\wp(\mu)$, což umožňuje užít větu 4.5.4
- podle ní funkce $z_1(x) = 1, z_2(x) = x, z_3(x) = x^2, \dots, z_k(x) = x^{k-1}$ řeší rovnici (4.62) a navíc lineární obal

$$[1, x, x^2, \dots, x^{k-2}, x^{k-1}]_\lambda$$

tvoří k -dimenzionální podprostor vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.62)

- ze substitučního vztahu (4.61) pak ale vyplývá, že funkce $y_1(x) = e^{\alpha x}, y_2(x) = x e^{\alpha x}, y_3(x) = x^2 e^{\alpha x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1} e^{\alpha x}$ řeší rovnici (4.60) a navíc lineární obal

$$[e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{k-2} e^{\alpha x}, x^{k-1} e^{\alpha x}]_\lambda$$

tvoří k -dimenzionální podprostor vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.61)

- tím je důkaz dokončen

4.5.7 Lemma

Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ jsou navzájem různá komplexní čísla, $r \in \mathbb{N}$ a $\wp_1(x), \wp_2(x), \dots, \wp_r(x)$ jsou polynomy. Nechť pro každé $x \in I$ platí

$$\sum_{j=1}^r \wp_j(x) e^{\alpha_j x} = 0.$$

Potom pro každé $x \in I$ platí sada rovností $\wp_1(x) = \wp_2(x) = \dots = \wp_r(x) = 0$.

Důkaz:

- důkaz provedeme matematickou indukcí podle r
- pro $r = 1$ plyne z rovnosti $\wp_1(x) e^{\alpha_1 x} = 0$ rovnost $\wp_1(x) = 0$ pro všechna x
- předpokládejme, že platí implikace

$$\sum_{j=1}^{r-1} \wp_j(x) e^{\alpha_j x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \wp_1(x) = \wp_2(x) = \dots = \wp_{r-1}(x) = 0$$

- vyjdeme z rovnosti $\sum_{j=1}^r \wp_j(x) e^{\alpha_j x} = 0$, která vede na $\sum_{j=1}^{r-1} \wp_j(x) e^{\alpha_j x} + \wp_r(x) e^{\alpha_r x} = 0$
- odtud pro všechna $x \in I$ platí $\wp_r(x) = 0$, a to jsme měli dokázat

4.5.8 Důsledek

Nechť $r \in \mathbb{N}$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}$. Pak funkce

$$\begin{aligned} &e^{\alpha_1 x}, x e^{\alpha_1 x}, x^2 e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x}, \\ &e^{\alpha_2 x}, x e^{\alpha_2 x}, x^2 e^{\alpha_2 x}, \dots, x^{k_2-1} e^{\alpha_2 x}, \\ &\vdots \\ &e^{\alpha_r x}, x e^{\alpha_r x}, x^2 e^{\alpha_r x}, \dots, x^{k_r-1} e^{\alpha_r x} \end{aligned} \quad (4.63)$$

jsou na každém otevřeném intervalu lineárně nezávislé.

4.5.9 Věta

Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ s konstantními koeficienty. Nechť jejich násobnosti jsou po řadě $k_1, k_2, \dots, k_r$. Pak fundamentálním systémem této rovnice je systém funkcí (4.63).

Důkaz:

- jde o přímý důsledek věty 4.5.6 a důsledku 4.5.8

4.5.10 Příklad

Řešme diferenciální rovnici $y'' - y = 0$ s nulovou pravou stranou. Jedná se zcela zjevně o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristický polynom $\ell(\lambda) = \lambda^2 - 1$ má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$. Proto má zkoumaná rovnice (podle věty 4.5.9) fundamentální systém $\{e^x, e^{-x}\}$, a jejím úplným řešením jsou tudíž funkce $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Stejně tvrzení lze vyjádřit rovností $\Omega_0 = [e^x, e^{-x}]_\lambda$.

4.5.11 Příklad

Zkoumejme diferenciální rovnici

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 36. \quad (4.64)$$

Řešme nejprve tuto rovnici jako rovnici bez pravé strany. Její charakteristický polynom

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18$$

má kořeny $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobný kořen $\lambda_{2,3} = -3$. Proto má zkoumaná rovnice (podle věty 4.5.9) fundamentální systém

$$\{e^{2x}, e^{-3x}, x e^{-3x}\},$$

a řešení rovnice bez pravé strany jsou tedy funkce tvaru

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x}.$$

Pro řešení rovnice s pravou stranou lze jistě užít metodu variace konstant. Ta je ale v tomto případě příliš zdlouhavá v porovnání s následující úvahou. Víme totiž podle věty 4.1.14, že k nalezení úplného řešení postačí nalézt jediné partikulární řešení rovnice (4.64). To lze ovšem snadno, neboť je jím konstantní funkce $y_p(x) = -2$. Uzavíráme tedy, že maximálním řešením rovnice (4.64) je systém funkcí $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

4.5.12 Poznámka

Rovnice $y^{(4)} - y = 0$ má vzhledem k tomu, že kořeny jejího charakteristického polynomu jsou čísla $\{-1, 1, i, -i\}$, fundamentální systém (jeden z možných)

$$F_S = \{e^x, e^{-x}, e^{ix}, e^{-ix}\} = \{e^x, e^{-x}, \cos(x) + i \sin(x), \cos(x) - i \sin(x)\}.$$

Z teorie polynomů ale víme, že pokud je kořenem polynomu číslo $\alpha = a + ib$, potom je kořenem také číslo $\alpha^* = a - ib$ komplexně sdružené k α . Namísto funkcí $e^{\alpha x}, e^{\alpha^* x}$ budeme do fundamentálního systému vždy zahrnovat jejich reálné a imaginární části

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx).$$

Tím dostaneme jiný fundamentální systém téže rovnice, ve kterém ale nebudou vystupovat komplexní čísla. Uzavíráme, že rovnice $y^{(4)} - y = 0$ má nově fundamentální systém tvaru $F_S = \{e^x, e^{-x}, \sin(x), \cos(x)\}$.

4.5.13 Poznámka

Jelikož nalezení fundamentálního systému diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je beze zbytku probráno, přistupme nyní k řešení těchto rovnic s nenulovými pravými stranami. Jak bylo diskutováno v příkladě 4.5.11, lze v těchto případech vždy užít metodu variace konstant (viz věta 4.4.26) podrobně ilustrovanou v poznámce 4.4.27 nebo teoretickou větu 4.1.14, je-li snadné uhodnout některé z partikulárních řešení. Za určitých okolností bude ale možno řešit rovnici

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = q(x)$$

elegantněji. Taková situace nastane v případě, že pravá strana bude vyjádřena v jednom z následujících tvarů:

- $q(x) = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom,
- $q(x) = P(x) e^{\alpha x}$, kde $P(x)$ je polynom,
- $q(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, kde $P(x)$ je polynom,
- $q(x) = P(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, kde $P(x)$ je polynom.

Přistupme tedy nyní k hledání příslušných partikulárních řešení.

4.5.14 Věta

Nechť $P(x)$ je polynom stupně $r \in \mathbf{N}$, koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ z definice 4.5.1 jsou reálná čísla a $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. Pak existuje polynom stupně r , který je řešením diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = P(x)$ s konstantními koeficienty.

Důkaz:

- nechť $P(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \dots + b_1 x + b_0$ a $b_r \neq 0$
- hledáme řešení diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = P(x)$ ve tvaru $y(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \dots + c_1 x + c_0$
- vidíme, že

$$\begin{aligned} y'(x) &= r c_r x^{r-1} + \dots + c_1 \\ y''(x) &= r(r-1) c_r x^{r-2} + \dots + 2c_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- z rovnosti $\widehat{L}(y(x)) = P(x)$ po porovnání koeficientů u stejných mocnin x pak dostáváme

$$\begin{aligned} a_0 c_r &= b_r \\ a_0 c_{r-1} + a_1 r c_r &= b_{r-1} \\ &\vdots \\ a_0 c_0 + a_1 c_1 + 2c_2 a_2 + \dots + r(r-1) \dots (r-n+1) a_r c_r &= b_0 \end{aligned}$$

- jde o $r+1$ rovnic pro $r+1$ neznámých $c_0, c_1, \dots, c_r$
- protože $a_0 \neq 0$ a soustava je v trojúhelníkovém tvaru, je její řešitelnost zřejmá
- jelikož $a_0 \neq 0$ a $b_r \neq 0$, plyne z rovnosti $a_0 c_r = b_r$, že $y(x)$ je tedy skutečně polynomem stupně r

4.5.15 Věta

Nechť $P(x)$ je polynom stupně $r \in \mathbf{N}_0$ a dále $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, kde $a_k \neq 0$ a $a_n \neq 0$. Pak existuje polynom $Q(x)$ stupně r tak, že funkce $y(x) = x^k Q(x)$ je řešením diferenciální rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_k y^{(k)}(x) = P(x). \quad (4.65)$$

Důkaz:

- u této rovnice lze substitucí $w(x) = y^{(k)}(x)$ triviálně snížit řád

- po substituci má rovnice tvar

$$a_n w^{(n-k)}(x) + a_{n-1} w^{(n-k-1)}(x) + \dots + a_k w(x) = P(x) \quad (4.66)$$

- jelikož $a_k \neq 0$, jsou pro rovnici (4.66) splněny předpoklady předešlé věty
- proto polynom $R(x)$ stupně r je partikulárním řešením rovnice (4.66)
- tedy funkce

$$\wp(x) = \int \int \dots \int R(x) (dx)^k$$

je partikulárním řešením rovnice (4.65)

- těchto k integrací polynomu $R(x)$ vede k tomu, že $\wp(x)$ je rovněž polynom a jeho stupeň je $\deg(\wp) = r + k$
- tedy existují koeficienty $b_0, b_1, \dots, b_{r+k}$ takové, že $b_{r+k} \neq 0$ a navíc

$$\wp(x) = b_{r+k} x^{r+k} + b_{r+k-1} x^{r+k-1} + b_{r+k-2} x^{r+k-2} + \dots + b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

- přitom k posledních členů tohoto polynomu je vzhledem k platnosti věty 4.5.4 součástí fundamentálního systému zkoumané rovnice, a nemusí tudíž být zahrnuto do tvaru partikulárního řešení
- proto lze za partikulární řešení považovat polynom

$$\begin{aligned} & b_{r+k} x^{r+k} + b_{r+k-1} x^{r+k-1} + b_{r+k-2} x^{r+k-2} + \dots + b_k x^k = \\ & = x^k (b_{r+k} x^r + b_{r+k-1} x^{r-1} + b_{r+k-2} x^{r-2} + \dots + b_k) = x^k Q(x), \end{aligned}$$

kde $\deg(Q) = r$

4.5.16 Věta

Nechť $P(x)$ je polynom stupně $r \in \mathbf{N}_0$ a číslo $\alpha \in \mathbf{C}$ je k -násobným kořenem charakteristického polynomu rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = P(x) e^{\alpha x}, \quad (4.67)$$

kde $k \in \mathbf{N}_0$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$. Pak existuje polynom $Q(x)$ stupně r takový, že funkce

$$y(x) = x^k Q(x) e^{\alpha x}$$

je partikulárním řešením diferenciální rovnice (4.67).

Důkaz:

- zajímá nás řešení diferenciální rovnice

$$\widehat{L}(y(x)) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = P(x) e^{\alpha x} \quad (4.68)$$

- do této rovnice (4.68) zavedeme novou funkci $z(x)$ předpisem

$$y(x) = z(x) e^{\alpha x} \quad (4.69)$$

- z Leibnizovy formule pro derivaci součinu dostáváme

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i e^{\alpha x} z^{(k-i)}(x)$$

- to po dosazení do rovnice (4.68) a krácení výrazem $e^{\alpha x}$ vede na rovnici

$$\widehat{L}_\bullet(z(x)) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_k \alpha^i z^{(k-i)}(x) = P(x) \quad (4.70)$$

- charakteristický polynom této rovnice má tedy tvar

$$\wp(\mu) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_k \alpha^i \mu^{k-i} = \sum_{k=0}^n a_k (\alpha + \mu)^k$$

- je-li tedy $\ell(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$ charakteristický polynom rovnice (4.68), platí mezi těmito dvěma polynomy jednoduchý vztah $\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu)$, tj. $\lambda = \alpha + \mu$
- dle předpokladu věty je ale komplexní číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ k -násobným kořenem polynomu $\ell(\lambda)$
- to značí, že $\ell(\lambda) = a_n (\lambda - \alpha)^k (\lambda - \beta)^{k_\beta} (\lambda - \gamma)^{k_\gamma} \dots$, kde čísla $\alpha, \beta, \gamma \dots$ jsou různé komplexní kořeny charakteristického polynomu $\ell(\lambda)$ s násobnostmi po řadě k, k_β, k_γ atd.
- pak ale $\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu) = a_n \mu^k [\mu - (\beta - \alpha)]^{k_\beta} [\mu - (\gamma - \alpha)]^{k_\gamma} \dots$
- tedy nula je k -násobným kořenem polynomu $\wp(\mu)$, což umožňuje užít předešlou větu 4.5.15
- podle ní je partikulárním řešením rovnice (4.70) funkce $z_p(x) = x^k Q(x)$, kde $\deg(Q) = r$
- ze substituční rovnosti (4.69) ihned vyplývá, že funkce $y_p(x) = x^k Q(x) e^{\alpha x}$ je partikulárním řešením rovnice (4.68)

4.5.17 Věta

Nechť $P_1(x), P_2(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše $r \in \mathbb{N}_0$ a komplexní číslo $\beta + i\gamma$ je k -násobným kořenem charakteristického polynomu rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = e^{\beta x} (P_1(x) \cos(\gamma x) + P_2(x) \sin(\gamma x)), \quad (4.71)$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Pak existují polynomy $Q_1(x)$ a $Q_2(x)$ stupně nejvýše r takové, že funkce

$$y(x) = x^k e^{\beta x} (Q_1(x) \cos(\gamma x) + Q_2(x) \sin(\gamma x))$$

je partikulárním řešením diferenciální rovnice (4.71).

Důkaz:

- tvrzení této věty snadno převedeme na větu předešlou
- vzhledem k platnosti exponenciálně-goniometrických rovností

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

které je možno snadno odvodit z Eulerova vzorce uvedeného v příkladě 4.4.25, lze rovnici (4.71) přepsat do tvaru

$$\widehat{L}(y(x)) = e^{\beta + i\gamma} \left(\frac{P_1(x)}{2} + \frac{P_2(x)}{2i} \right) + e^{\beta - i\gamma} \left(\frac{P_1(x)}{2} - \frac{P_2(x)}{2i} \right)$$

- pravá strana (resp. oba její sčítance) jsou nyní tvaru (4.67)
- navíc čísla $\beta + i\gamma$ a $\beta - i\gamma$ mají zcela jistě v charakteristickém polynomu totožnou násobnost
- polynomy $\frac{P_1(x)}{2} + \frac{P_2(x)}{2i}$ a $\frac{P_1(x)}{2} - \frac{P_2(x)}{2i}$ mají stupeň nejvýše r
- tvrzení věty tudíž skutečně vyplývá z věty 4.5.16 a z principu superpozice 4.4.30

4.5.18 Příklad

Budeme hledat obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = -8e^x \quad (4.72)$$

užitím předešlých vět o speciálních tvarech partikulárních řešení. Pro srovnání ale nejprve úlohu vyřešíme metodou variace konstant. Rovnice

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \quad (4.73)$$

má dvojnásobný kořen $\lambda = 1$ a jednonásobný kořen $\lambda = 2$. Proto je příslušným fundamentálním systémem množina

$$F_S = \{e^x, xe^x, e^{2x}\}.$$

Wronskián tohoto systému má hodnotu

$$W_{e^x, xe^x, e^{2x}} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (1+x)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (2+x)e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}.$$

Pro metodu variace konstant vypočteme dílčí determinanty

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{2x} \\ 0 & (1+x)e^x & 2e^{2x} \\ -8e^x & (2+x)e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = (8-8x)e^{4x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{2x} \\ e^x & 0 & 2e^{2x} \\ e^x & -8e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 8e^{4x},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & (1+x)e^x & 0 \\ e^x & (2+x)e^x & -8e^x \end{vmatrix} = -8e^{3x}.$$

Tedy hledané derivace $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ variačních koeficientů mají po řadě hodnoty

$$f_1(x) = 8-8x, \quad f_2(x) = 8, \quad f_3(x) = -8e^{-x}.$$

Samotné variační koeficienty pak obdržíme poměrně snadnými integracemi

$$F_1(x) = 8x - 4x^2 + C_1, \quad F_2(x) = 8x + C_2, \quad F_3(x) = 8e^{-x} + C_3.$$

Hledaným řešením je tudíž systém funkcí

$$y(x) = (8x - 4x^2 + C_1)e^x + (8x + C_2)xe^x + (8e^{-x} + C_3)e^{2x} = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{2x} + 16xe^x + 4x^2e^x,$$

kde ale člen $16xe^x$ může být ze zápisu vypuštěn, neboť je již obsažen v lineárním obalu $[e^x, xe^x, e^{2x}]_\lambda$. Proto je maximálním řešením této úlohy systém funkcí

$$y(x) \in [e^x, xe^x, e^{2x}]_\lambda + 4x^2e^x, \quad I = \mathbf{R}. \quad (4.74)$$

Přístupme nyní k druhému způsobu řešení. Řešíme tedy rovnici $\widehat{L}(y(x)) = -8e^x$. Nejprve je třeba si uvědomit, že číslo $\alpha = 1$ je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu (viz rovnice (4.73)). Proto bude podle tvrzení věty 4.5.16 předpokládat řešení ve tvaru $y_p(x) = ax^2e^x$. Zbývá tedy určit hodnotu neznámé konstanty $a \in \mathbf{R}$. Její nalezení ale může být provedeno přímým dosazením do rovnice (4.72). Jelikož

$$y'_p(x) = a(2x + x^2)e^x, \quad y''_p(x) = a(2 + 4x + x^2)e^x, \quad y'''_p(x) = a(6 + 6x + x^2)e^x,$$

snadno lze odsud vypočíst, že $a = 4$. Partikulárním řešením je tak funkce $y_p(x) = 4x^2e^x$, což potvrzuje správnost výsledku (4.74). Tím je demonstrována značná výhodnost druhé metody oproti variaci konstant.

4.5.19 Definice

Eulerovou diferenciální rovnici se středem v bodě $c \in \mathbf{R}$ nazýváme rovnici tvaru

$$a_n(x-c)^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x-c)^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x-c)y'(x) + a_0 y(x) = q(x),$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ ($a_n \neq 0$) a $q(x)$ je spojitá funkce.

4.5.20 Poznámka

Pro Eulerovu rovnici se středem v bodě c lze užít substituci $\xi = x - c$ k převedení na Eulerovu diferenciální rovnici se středem v bodě nula. Jelikož $\frac{d\xi}{dx} = 1$, plyne odtud, že

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi}.$$

Proto je navržená substituce triviálně proveditelná a de facto spočívá pouze v náhradě všech členů $x - c$ písmenem ξ a všech derivací podle x derivacemi podle ξ .

4.5.21 Poznámka

Eulerovu diferenciální rovnici se středem v bodě nula lze na intervalu $I = (0, \infty)$, resp. $I = (-\infty, 0)$ převést na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty záměnou nezávisle proměnné x za nezávisle proměnnou t prostřednictvím vztahů $x = e^t$, resp. $x = -e^t$. Na intervalu $I = (0, \infty)$ tedy budeme provádět substituci $y(x) = y(e^t)$, kde $t = \ln(x)$. Z tohoto substitučního schématu lze užitím věty o derivaci složené funkce snadno odvodit, že

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \dot{y} \frac{1}{x} \\ y''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\dot{y} \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{y}) \frac{dt}{dx} \frac{1}{x} + \dot{y} \left(\frac{1}{x} \right)' = \ddot{y} \frac{1}{x^2} - \dot{y} \frac{1}{x^2} \\ y'''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\ddot{y} \frac{1}{x^2} - \dot{y} \frac{1}{x^2} \right) = \frac{2}{x^3} \dot{y} - \frac{2}{x^3} \ddot{y} - \frac{1}{x^3} \ddot{y} + \frac{1}{x^3} \dot{y} = \frac{1}{x^3} \dot{y} - \frac{3}{x^3} \ddot{y} + \frac{2}{x^3} \dot{y}. \end{aligned}$$

Tedy $xy' = \dot{y}$, $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$, $x^3 y''' = \ddot{y} - 3\dot{y} + 2\ddot{y}$, a rovnice

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = q(x)$$

je tím převedena na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

4.5.22 Poznámka

Pokusme se nyní demonstrovat užitečnost metody superpozice (viz lemma 4.4.30) na rovnici

$$y'' + y = 2x + e^x. \quad (4.75)$$

Fundamentálním systémem rovnice $y'' + y = 0$ je množina $\{\cos(x), \sin(x)\}$. Partikulárním řešením rovnice $y'' + y = 2x$ je, jak lze velice jednoduše vypočítat, funkce $y_{p1} = 2x$, zatímco partikulární řešení rovnice $y'' + y = e^x$ budeme očekávat ve tvaru $y_{p2} = a e^x$. Snadno pak dopočteme, že $a = 1/2$. Podle tvrzení lemmatu 4.4.30 je tudíž úplným řešením rovnice (4.75) funkce

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + 2x + \frac{1}{2} e^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

4.5.23 Příklad

Budeme hledat maximální řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice

$$y''' x^4 - 5y'' x^3 - 8y' x^2 + 8yx = 72,$$

vyhovující podmínkám $y(1) = 2$, $y'(1) = 13$ a $y''(1) = 44$. Vydělíme-li zadanou rovnici proměnnou x , získáme Eulerovu diferenciální rovnici třetího řádu, jež pro $x > 0$ řešíme substitucí $x = e^t$. Ta vede k transformačním vztahům z poznámky 4.5.21. Po dosazení získáme diferenciální rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 8 \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 8y = 72 e^{-t}. \quad (4.76)$$

Jelikož charakteristický polynom této rovnice má tvar $\ell(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 - \lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 8)$, je fundamentálním systémem zmiňované rovnice množina $F_S = \{e^t, e^{-t}, e^{8t}\}$. Pro řešení rovnice se speciální pravou stranou předpokládáme podle věty 4.5.16 partikulární řešení tvaru $y_p(t) = ate^{-t}$. Tento předpoklad vede po dosazení do rovnice (4.76) k hodnotě $a = 4$. Rovnice (4.76) má tedy obecné řešení

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{8t} + 4te^{-t}.$$

Návratem k nezávisle proměnné x získáme

$$y(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3 x^8 + \frac{4}{x} \ln(x).$$

Nalezení řešení vyhovujícího podmínkám $y(1) = 2$, $y'(1) = 13$ a $y''(1) = 44$ vede po dvojnásobném derivování poslední uvedené rovnice na soustavu tří rovnic $C_1 + C_2 + C_3 = 2$, $C_1 - C_2 + 8C_3 = 9$ a $2C_2 + 56C_3 = 56$ pro neznámé C_1, C_2, C_3 . Tuto soustavu řeší trojice $(C_1, C_2, C_3) = (1, 0, 1)$. Hledaný tvar řešení tedy je

$$y(x) = x + x^8 + \frac{4}{x} \ln(x), \quad I = \mathbf{R}^+.$$

4.5.24 Příklad

Hledejme maximální řešení diferenciální rovnice $y'' + xy = 0$, vyhovující podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$. Na zadanou rovnici nelze aplikovat žádnou z účinných metod, proto budeme hledat řešení ve tvaru mocninné řady

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4.77)$$

kde $a_n \in \mathbf{R}$ jsou neznámé koeficienty. Tím se seznámíme s jednou z dalších metod, jak hledat řešení diferenciálních rovnic. Podotýkáme, že řada (4.77) je Taylorovou řadou se středem v bodě nula (v bodě, v němž jsou stanoveny počáteční podmínky). Pak

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n$$

a navíc

$$x \cdot y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Dosadíme nyní do zadané rovnice

$$y'' + xy = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n-1}] x^n = 0.$$

Z této rovnosti je patrné, že nutně $a_2 = 0$ a $a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n-1} = 0$. Odtud

$$a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \wedge \quad a_2 = 0.$$

Odsud mimo jiné plyne, že $a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$. Jelikož $y(0) = 1$, musí být $a_0 = 1$. Pro splnění podmínky $y'(0) = 0$ je nutné, aby $a_1 = 0$. Pak ale $a_4 = a_7 = a_{10} = \dots = 0$. Uzavíráme tedy:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} x^{3n} \quad \wedge \quad a_{i+3} = \frac{-a_i}{(i+3)(i+2)} \quad \wedge \quad a_0 = 1.$$

Obor konvergence vyšetříme např. podílovým kritériem pro $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{3n+3} x^{3n+3}}{a_{3n} x^{3n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^3}{(3n+3)(3n+2)} \right| = 0 < 1.$$

Oborem konvergence nalezeného řešení je tudíž množina $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

4.5.25 Příklad

Teorie diferenciálních rovnic lze zužít také při hledání součtů mocninných řad. Ukážeme si to na poněkud komplikovanějším příkladě. Budeme hledat součet řady

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} x^{2n}. \quad (4.78)$$

Řadu zderivujeme s výsledkem

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

Podobně

$$s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-2)!} x^{2n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^2}{(2m)!} x^{2m}.$$

Tuto druhou derivaci ještě poněkud upravíme

$$s''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2}{(2m)!} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m}{(2m)!} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = s(x) + x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Užijeme-li známých rozvojů (viz 3.2.15)

$$\sinh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

platných v $\mathbf{R}$, získáváme tím diferenciální rovnici

$$s''(x) - s(x) = x \sinh(x) + \cosh(x)$$

pro hledanou funkci $s(x)$. Rovnici bez pravé strany vyřešíme snadno. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má dva kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$, proto je fundamentálním systémem zkoumané rovnice množina $\{e^x, e^{-x}\}$. Rovnici s pravou stranou, zapsanou v upraveném tvaru

$$s''(x) - s(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^x + \frac{1}{2}(1-x)e^{-x},$$

vyřešíme superpozicí. Hledejme tedy nejprve partikulární řešení rovnice

$$s''(x) - s(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^x.$$

Očekáváme ho podle příslušných vět ve tvaru $y_{p_1}(x) = (ax+b)x e^x$. Snadno dopočteme dosazením, že $(a, b) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$. Podobně předpokládáme partikulární řešení rovnice

$$s''(x) - s(x) = \frac{1}{2}(1-x)e^{-x}$$

ve tvaru $y_{p_2}(x) = (ax+b)x e^{-x}$, odkud $(a, b) = (\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$. Superpozicí tedy získáváme obecné řešení

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{8}x(x+1)e^x + \frac{1}{8}x(x-1)e^{-x}.$$

Zbývá již jen určit hodnoty integračních konstant C_1 a C_2 . K jejich stanovení užijeme počáteční podmínky $s(0) = 0$ a $s'(0) = 0$, které vedou k soustavě

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 - C_2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} &= 0. \end{aligned}$$

Snadno $(C_1, C_2) = (0, 0)$. Hledaným součtem řady (4.78) je tedy funkce

$$s(x) = \frac{1}{8}x(x+1)e^x + \frac{1}{8}x(x-1)e^{-x} = \frac{x^2}{4} \cosh(x) + \frac{x}{4} \sinh(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

4.6 Cvičení

V následujících cvičeních bude s předstihem využíváno některých základních poznatků z kapitoly 5, jak je demonstrováno např. v příkladě 5.2.21.

Cvičení 4.1

Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = \frac{3x^2 + 5y^2 - 8xy + 4x - 2y + 1}{4x^2 - 10xy + 2x}.$$

Ukažte, že při vhodné volbě integrační konstanty představuje řešení jistou kuželosečku. Stanovte její normální tvar, hlavní a vedlejší signaturu, správný název a střed, existuje-li.

Cvičení 4.2

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $xy'' = y' - (y')^3$.

Cvičení 4.3

Řešte diferenciální rovnici $xy''' + 3(1 - 2x)y'' + 3(3x - 4)y' + 9y = 9$, víte-li, že funkce $v(x) = \frac{1}{x}$ je jedním z řešení přidružené rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.4

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $2y(x - 1)y' + y^2 = 4x(3x - 2)$, procházející bodem $(x, y) = (1, 2)$.

Cvičení 4.5

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y''(x + 1)^2 + 4y'(x + 1) + 2y = 0$, vyhovující podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$.

Cvičení 4.6

Nalezněte funkci $y(x)$, která splňuje podmínku $y(0) = -1$ a je maximálním řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' - (8x + 2y + 2)^2 = 0.$$

Cvičení 4.7

Na intervalu $I = (1, \infty)$ nalezněte úplné řešení diferenciální rovnice $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, víte-li, že funkce $v(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.8

Nalezněte a diskutujte formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}.$$

Cvičení 4.9

Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu, v jejímž fundamentálním systému jsou funkce e^{-x} , $e^{3x} \cos(2x)$ a jejímž řešením je funkce $4 \sinh(x)$.

Cvičení 4.10

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y'' - 6y' + 10y = 4e^{3x} \cos(x)$, které vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 2$.

Cvičení 4.11

Ukažte, že rovnice se separovanými proměnnými je speciálním případem exaktní diferenciální rovnice. Odvoďte pak na základě tohoto zjištění formální řešení rovnice se separovanými proměnnými aplikací obecného výsledku platného pro exaktní diferenciální rovnici.

Cvičení 4.12

Nalezněte implicitní tvar řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{6x^2 + 5y^2 + 4xy + 8x - 4y - 2}{10xy + 2x^2 - 4x}.$$

Ukažte, že řešením může být i jistá kuželosečka.

Cvičení 4.13

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + 5y = 2e^x \cos(2x)$, které vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 2$.

Cvičení 4.14

Nalezněte implicitní tvar řešení diferenciální rovnice $y - 2x = y'(y - x)$.

Cvičení 4.15

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x^2 y'' - xy' + y = \sqrt{-x}$, které vyhovuje podmínkám $y(-1) = 0$ a $y'(-1) = 0$.

Cvičení 4.16

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 20e^{2x}$.

Cvičení 4.17

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $xy''y' = (y')^2 + x^4$.

Cvičení 4.18

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^2 y'' - xy' + y = \frac{4}{x},$$

vyhovující podmínkám $y(1) = 2$ a $y'(1) = 0$.

Cvičení 4.19

Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice $24x - 8y - 12 + (2y - 6x + 5)y' = 0$, procházející bodem $(x, y) = (9, 29)$.

Cvičení 4.20

Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice $(4x+12)y'' + (y')^3 = 4y'$, vyhovující podmínkám $y(1) = -8$ a $y'(1) = -2$.

Cvičení 4.21

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y'(x + y^2) = y$, procházející bodem $(x, y) = (16, 4)$.

Cvičení 4.22

Pomocí metody variace konstant nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 16e^x.$$

Cvičení 4.23

Sestavte Eulerovu diferenciální rovnici nejnižšího možného řádu s fundamentálním systémem $F_S = \{x^3, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\}$.

Cvičení 4.24

Na množině $\mathbf{R}^+$ řešte diferenciální rovnici

$$x^2 y''' + x(7 - 6x)y'' + 4(3x^2 - 7x - 4)y' + 4(8 + 7x - 2x^2)y = -18xe^{2x}.$$

Využijte skutečnosti, že funkce e^{2x} řeší příslušnou rovnici s nulovou pravou stranou.

Cvičení 4.25

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x - y + 2 + (y - x + 3)y' = 0$. Stanovte, jakou křivku řešení představuje. Načrtněte!

Cvičení 4.26

Řešte rovnici

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Cvičení 4.27

Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{y+4x}{y+2x} + \frac{y}{2x}.$$

Diskutujte, jakou křivku získané řešení představuje, a stanovte její charakteristiky.

Cvičení 4.28

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $4xy'' + (4x + 8)y' + (x + 4)y = 0$, vyhovující podmínkám

- a) $y(1) = \frac{7}{\sqrt{e}}$ a $y'(1) = -\frac{23}{2\sqrt{e}}$,
- b) $y(0) = 4$ a $y'(0) = -2$,

víte-li, že jedním z řešení zadané rovnice je jakási exponenciální funkce.

Cvičení 4.29

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' \sin(x) = 3 \cos(x) (y^{2/3} - y),$$

procházející bodem $(x, y) = (\frac{17}{4}\pi, 27)$.

Cvičení 4.30

Na množině $\mathbf{R}^+$ nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $xy + e^x - xy' = 0$.

Cvičení 4.31

Řešte rovnici $y' = 2x(x^2 + y)$.

Cvičení 4.32

Řešte diferenciální rovnici $y' + y \cos(x) = \sin(x) \cos(x)$.

Cvičení 4.33

Řešte diferenciální rovnici $y' + 4xy = 4x\sqrt{y}$.

Cvičení 4.34

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y' \sin(x) - y = 1 - \cos(x)$, procházející bodem $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Cvičení 4.35

Řešte diferenciální rovnici $2xyy' + 1 + y^2 = 0$.

Cvičení 4.36

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$, vyhovující podmínkám

- a) $(x, y) = (1, 0)$,
- b) $(x, y) = (0, 0)$.

Cvičení 4.37

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{y}{3x + y^2}.$$

Cvičení 4.38

Řešte diferenciální rovnici $(1 + e^x)yy' = e^x$.

Cvičení 4.39

Řešte diferenciální rovnici $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$.

Cvičení 4.40

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y \ln |y| + xy' = 0$, vyhovující podmínce $y(-1) = -e$.

Cvičení 4.41

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $yy' = e^{-y^2} \sin(x)$, procházející bodem $(x, y) = (3\pi, -\sqrt{\ln(4)})$.

Cvičení 4.42

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $2xy + (x^2 - y^2)y' = 0$, procházející bodem $(x, y) = (-2, \sqrt{3})$.

Cvičení 4.43

Řešte diferenciální rovnici $e^{-y} = (2y + xe^{-y})y'$.

Cvičení 4.44

Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Cvičení 4.45

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 3},$$

procházející bodem $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Cvičení 4.46

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0$, procházející bodem

- a) $(x, y) = (2, 3)$,
- b) $(x, y) = (0, 0)$.

Cvičení 4.47

Řešte diferenciální rovnici $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

Cvičení 4.48

Řešte diferenciální rovnici

$$xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cvičení 4.49

Řešte diferenciální rovnici $xy'' + 2y' + xy = 0$, víte-li, že funkce $v(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.50

Řešte diferenciální rovnici $x^2(\ln(x) - 1)y'' - xy' + y = 0$.

Cvičení 4.51

Nalezněte maximální množinu, na níž jsou funkce $\ln(x)$ a x lineárně nezávislé.

Cvičení 4.52

Dokažte, že funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 0$.

Cvičení 4.53

Řešte diferenciální rovnici $(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2$, víte-li, že funkce $v(x) = x$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.54

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2$, víte-li, že fundamentální systém příslušné rovnice bez pravé strany je $\{x, e^x\}$.

Cvičení 4.55

Řešte diferenciální rovnici $y'' + y = \operatorname{tg}(x)$.

Cvičení 4.56

Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$.

Cvičení 4.57

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Cvičení 4.58

Řešte diferenciální rovnice

- a) $y'' + 3y' + 2y = 0$,
- b) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$,
- c) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Cvičení 4.59

Nalezněte fundamentální systémy rovnic

- a) $y^{(5)} - y'' = 0$,
- b) $y^{(6)} + 64y = 0$.

Cvičení 4.60Řešte rovnici $y'' - y = x^3$.**Cvičení 4.61**Řešte rovnici $y''' + 2y'' + y' = 36e^{2x}$.**Cvičení 4.62**Řešte rovnici $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x)$.**Cvičení 4.63**

Řešte diferenciální rovnice

- a) $y'' - 2y' + 10y = e^x + \sin(3x)$,
- b) $y'' - 2y' + 10y = e^x \sin(3x)$.

Cvičení 4.64Řešte rovnici $y^{(4)} - y''' + y'' + 9y' - 10y = 0$.**Cvičení 4.65**

Nalezněte diferenciální rovnici s konstantními koeficienty s nulovou pravou stranou, mající fundamentální systém

- a) $F_S = \{\sin(x), \cos(x), x \sin(x), x \cos(x)\}$,
- b) $F_S = \{\sin(x), \cos(x), x \sin(x), x^2 \sin(x)\}$.

Cvičení 4.66Řešte rovnici $x^2 y'' + xy' + y = x$.**Cvičení 4.67**Nalezněte funkci $y(x)$, která vyhovuje rovnici

$$xy'' - 2\frac{y}{x} = \frac{9}{4\sqrt{-x}}$$

a podmínkám $y(-1) = y'(-1) = 0$.**Cvičení 4.68**

Nalezněte a diskutujte implicitní tvar řešení rovnice

$$y' + \frac{y+1}{x+1} = 0.$$

Cvičení 4.69

Řešte rovnici

$$y'' - 4y' + 4y = (6x + 2)e^{2x}$$

za podmínek $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$.**Cvičení 4.70**

Nalezněte implicitní tvar řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{-3x^2 - y^2 + 12x - 2y + 6}{2xy + 2x}.$$

Ukažte, že řešením může být i jistá kuželosečka. Stanovte její typ a střed, má-li ho.

Cvičení 4.71Řešte pohybovou rovnici pro netlumený řízený oscilátor $m\ddot{x} + kx = \varepsilon \cos(\Omega t)$, kde $m, k, \varepsilon, \Omega$ jsou kladné reálné konstanty a funkce $x(t)$ je funkcí času t . Úlohu řešte pro $\Omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$.**Cvičení 4.72**Řešte předchozí cvičení za podmínky $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.**Cvičení 4.73**Řešte rovnici $y^{(4)} + y''' + 7y'' + 9y' - 18y = 6240 \sin(x) \cos(2x)$.

Cvičení 4.74

Sestavte diferenciální rovnici nejnižšího možného řádu s fundamentálním systémem obsahujícím funkce x a $\ln(x)$.

Cvičení 4.75

Stanovte podmínku pro konstantu $C \in \mathbf{R}$ tak, aby funkce $y(x) = Cx$ byla řešením homogenní diferenciální rovnice.

Cvičení 4.76

Na množině $\mathbf{R}^+$ nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' - 8x^2 y'' - 24xy' + 24y + 72x = 0$.

Cvičení 4.77

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x(1-x)y'' + xy' - y = x(2-x)$, víte-li, že jedním z prvků fundamentálního systému zadané rovnice je jakási lineární funkce.

Cvičení 4.78

Řešte rovnici $y''' + y'' + y' + y = 4xe^{-x}$.

Cvičení 4.79

Řešte diferenciální rovnici

$$x(1-x)^2 y'' - 2y = 36x^2(1-x)^3,$$

víte-li, že funkce $v(x) = \frac{x}{1-x}$ je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.80

Pro $x > 0$ řešte diferenciální rovnici $x^2 y''' = 2y'$.

Cvičení 4.81

Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$$

Cvičení 4.82

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos(x)$.

Cvičení 4.83

Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu s nulovou pravou stranou a fundamentálním systémem $F_S = \{e^{-x} \sin(2x), e^{-x} \cos(2x), 3xe^{-x} \sin(2x), 3xe^{-x} \cos(2x)\}$.

Cvičení 4.84

Nalezněte a diskutujte formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1 - 2x - y}{1 + x + 5y}.$$

Cvičení 4.85

Řešte diferenciální rovnici $y''' - 3y' + 2y = (9x + 1)e^x$.

Cvičení 4.86

Na množině $\mathbf{R}^+$ řešte diferenciální rovnici $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$.

Cvičení 4.87

Na množině $\mathbf{R}^-$ řešte diferenciální rovnici $x^2 y'' - xy' + y = 2x$.

Cvičení 4.88

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y' + xy = xe^{x^2} \sqrt{y}$ tak, aby vyhovovalo podmínce $y(0) = 1$.

Cvičení 4.89

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $e^{-x} y' = y + y^5$ tak, aby vyhovovalo podmínce $y(0) = 1$.

Cvičení 4.90

Určete všechna řešení rovnice $y^{(5)} - 4y^{(4)} - 21y''' + 144(4 + 21x) = 0$.

Cvičení 4.91

Která funkce vyhovuje současně podmínce $y(1) = \frac{1}{2}$ a rovnici $4xyy' + \sqrt{x^4 - 4y^4} = 4y^2$?

Cvičení 4.92

Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

Cvičení 4.93

Hledejte formální řešení diferenciální rovnice $y'(y - x) = y - 2x$.

Cvičení 4.94

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $xy'' = (3 + 4x^4)y' + 16x^7e^{x^4}$.

Cvičení 4.95

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y''' - y'' - 2y' + 8 = 0$.

Cvičení 4.96

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x^2y'' + xy' = (y')^2$.

Cvičení 4.97

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $xy' + 2y = 4x^2e^{x^2} + 2x^2y$, procházející bodem

- a) $(x, y) = (1, 4e)$,
- b) $(x, y) = (0, 0)$.

Cvičení 4.98

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $\sin(x)(y' - x^2) + y \cos(x) = 0$, procházející bodem $(x, y) = (\frac{5\pi}{2}, 0)$.

Cvičení 4.99

Řešte rovnici $x(1 + x^2)y'' - 2y' = -2$.

Cvičení 4.100

Na množině $(-1, 1)$ řešte diferenciální rovnici $(1 - x^2)(y'' + 9x) = xy'$.

Cvičení 4.101

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $(2x + 1)y' = 4x + 2y$, procházející bodem $(x, y) = (-1, 1)$.

Cvičení 4.102

Nalezněte všechna maximální řešení zadané diferenciální rovnice $y''' + y'' - 8y' - 12y + 30e^{-2x} = 0$.

Cvičení 4.103

Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y' \operatorname{tg}(x) = \frac{3}{\cos^3(x)}.$$

Cvičení 4.104

Pro kladná x hledejte řešení diferenciální rovnice $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = -2x$.

Cvičení 4.105

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right).$$

Cvičení 4.106

Řešte rovnici $y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} \operatorname{tg}(x)$.

Cvičení 4.107

Řešte rovnici $y^2 - 2xy + x^2y' = 0$.

Cvičení 4.108

Řešte diferenciální rovnici $x^2 y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 8x^3 e^{2x}$, víte-li, že funkce $v(x) = x$ je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.109

Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu s nulovou pravou stranou, jejímiž řešeními jsou funkce e^{2x} , e^{-2x} , $\sinh(2x)$, $\cosh(2x)$.

Cvičení 4.110

Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice $y''' - 3y' - 2y = 6e^{-x} - 4xe^x$.

Cvičení 4.111

Nalezněte funkci $y(x)$, která protíná osu y a je maximálním řešením diferenciální rovnice $(x-2)^2 y'' - (x-2)y' - 3y = x$.

Cvičení 4.112

Řešte rovnici $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 3\sin(x)$.

Cvičení 4.113

Na množině $\mathbf{R}^+$ řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Cvičení 4.114

Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice $xy' = y(1 - y^2 x^2)$, vyhovující podmínce $(x, y) = (-2, -\frac{1}{2})$.

Cvičení 4.115

Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{2x-3}{x(x-1)}y' = \frac{2x-3}{x(x-1)}.$$

Cvičení 4.116

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x^3 y'' - x^2 y' - 3xy + 16 \ln(-x) = 0$.

Cvičení 4.117

Řešte diferenciální rovnici $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2(x))y = 0$, víte-li, že funkce $\operatorname{tg}(x)$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.118

Pro $x > 0$ řešte diferenciální rovnici

$$x^2 y''' + 2x(3x-2)y'' + 2(6x^2 - 8x + 3)y' + 4(3 - 4x + 2x^2)y = 8xe^{-2x},$$

víte-li, že funkce $v(x) = e^{-2x}$ je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.119

Najděte všechny funkce $y(x)$, které řeší rovnici

$$y'' + y = \frac{2}{\cos^3(x)}$$

a splňují vztahy $y(3\pi) = y'(3\pi) = 0$.

Cvičení 4.120

Za podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ a $y''(0) = 8$ řešte rovnici $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 4e^x$.

Cvičení 4.121

Řešte rovnici $y'' \sin^2(x) = 2y$. Nápoděda: Rovnici řeší např. funkce $\cotg(x)$.

Cvičení 4.122

Řešte diferenciální rovnici $x^3 y''' - 6x^2 y'' + x(18 - x^2)y' + 2(x^2 - 12)y = 12x^5 e^{2x}$, víte-li, že funkce x^2 je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.123

Řešte rovnici $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ s dodatečnou podmínkou $y(1) = \frac{1}{2}$.

Cvičení 4.124

Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu s nulovou pravou stranou, jejímž řešením je funkce $y(x) = 8xe^x \sin(3x)$.

Cvičení 4.125

Sestavte lineární diferenciální rovnici nejnižšího možného řádu, jejímž fundamentálním systémem je množina $F_S = \{xe^x, xe^{-x}\}$.

Cvičení 4.126

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x^2 y''' = 18x^2 + 2y'$.

Cvičení 4.127

Řešte rovnici $y' \sin(x) - y = 1 - \cos(x)$ s podmínkou $(x, y) = (\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$.

Cvičení 4.128

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $y''(x+1)^2 + 4y'(x+1) + 2y = 0$, vyhovující podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$. Ujistěte se, že funkce $\frac{x}{(x+1)^2}$ zadanou rovnici řeší.

Cvičení 4.129

Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, jež vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Cvičení 4.130

Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice $y'' - xy' - 2y = 0$, jež vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Cvičení 4.131

Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice $xy'' + 2y' - xy = 0$, jež vyhovuje podmínce $y(0) = 1$.

Cvičení 4.132

Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice $xy'' - xy' - y = 0$, jež vyhovuje podmínce $y'(0) = 1$.

Cvičení 4.133

Metodou řad nalezněte fundamentální systém diferenciální rovnice $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$.

Cvičení 4.134

Dokažte větu 4.4.30.

Cvičení 4.135

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{7y - 8x - 7}{-2y + 13x + 2}.$$

Cvičení 4.136

Sestavte diferenciální rovnici, jejíž množina všech řešení je tvaru $[e^{2x}, xe^{2x}, e^{-x}]_{\lambda} + x$.

Cvičení 4.137

Pro diferenciální rovnici $y^{(4)} + 7y''' - y'' - 87y' = \varphi(x)$ stanovte příslušný fundamentální systém. Rozhodněte poté, v jakém optimálním tvaru budete předpokládat partikulární řešení, má-li pravá strana tvar:

- a) $\varphi(x) = 12xe^{-5x}$
- b) $\varphi(x) = 12x$
- c) $\varphi(x) = 12xe^{3x}$
- d) $\varphi(x) = 12xe^{-5x} \cos(2x)$
- e) $\varphi(x) = 12x \cos(2x)$.

Cvičení 4.138

Dokažte lemma 4.4.30 o superpozici.

Kapitola 5

Kvadratické formy a kvadratické plochy

5.1 Bilineární a kvadratické formy

Těžištěm našeho zájmu bude nyní speciální typ zobrazení z vektorového prostoru $\mathcal{V}_r = \mathbf{R}^r$ dimenze $r \in \mathbf{N}$ do tělesa $\mathbf{R}$. Zobrazení budeme nazývat kvadratickou formou a odhalíme u něj celou řadu zajímavých obecných vlastností. Poznatky z tohoto oddílu užijeme jednak v oddíle následujícím při studiu kvadratických ploch – nadstavbě známého pojmu kuželo-sečka, ale rovněž při vyšetřování extrémů funkce více proměnných v dalších partiích matematické analýzy (viz například skriptu [16]).

5.1.1 Poznámka

Nechť je dána čtvercová matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$. *Hlavním minorem řádu $k \in \hat{r}$ matice $\mathbb{A}$ (k -tým hlavním minorem)* rozumíme determinant Δ_k matice $(a_{ij})_{i,j=1}^k$. Matici $\mathbb{B}$ reálných čísel nazveme *symetrickou*, platí-li rovnost $\mathbb{B} = \mathbb{B}^\top$, tj. platí-li rovnost $b_{ij} = b_{ji}$ pro všechna $i, j \in \hat{r}$. Matici $\mathbb{C}$ reálných čísel nazýváme *unitární*, platí-li pro ni rovnost $\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}^\top = \mathbb{I}$. Matici $\mathbb{D}$ reálných čísel nazýváme *normální*, platí-li pro ni rovnost $\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}^\top = \mathbb{C}^\top \cdot \mathbb{C}$. Každá unitární matice je tedy normální a zároveň regulární.

5.1.2 Definice

(Symetrickou) *bilineární formou* v $\mathbf{R}^r$ nazýváme zobrazení $qq(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ definované předpisem

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i,j=1}^r a_{ij} x_i y_j, \quad (5.1)$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbf{R}$ ($i, j \in \hat{r}$) a alespoň jedno z čísel a_{ij} je nenulové. Symetrickou matici $\mathbb{A}$ řádu r vytvořenou z koeficientů a_{ij} nazýváme *maticí bilineární formy* a její hodnotu $h(\mathbb{A})$ *hodnotí bilineární formy*. Řekneme, že bilineární forma (5.1) je *regulární*, resp. *singulární* je-li matice $\mathbb{A}$ regulární, resp. singulární. Řekneme, že bilineární forma (5.1) je v *diagonálním tvaru*, je-li matice $\mathbb{A}$ v diagonálním tvaru.

5.1.3 Poznámka

Bilineární formu můžeme snadno vyjádřit pomocí maticového zápisu

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_r) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}.$$

5.1.4 Poznámka

Kromě pojmu bilineární forma se často zavádí také obecnější pojem, a sice hermitovská sesquilineární forma. Korektní zavedení provedeme v následující definici, avšak v dalším textu budeme nadále pracovat pouze s bilineárními (a posléze i kvadratickými) formami.

5.1.5 Definice

Nechť je dána *hermitovská* komplexní matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$, tj. komplexní matice vyhovující rovnosti $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\sharp$, kde symbol $\mathbb{A}^\sharp$ definujeme předpisem $\mathbb{A}^\sharp = (\mathbb{A}^*)^\top$. *Hermitovskou sesquilineární formou* v $\mathbf{C}^r$ nazýváme zobrazení $qq(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^r \mapsto \mathbf{C}$ definované předpisem $qq(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{y}^*$.

5.1.6 Definice

Kvadratickou formou rozumíme takové zobrazení $q(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$, k němuž existuje bilineární forma $qq(\vec{x}, \vec{y})$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ platí rovnost

$$q(\vec{x}) := qq(\vec{x}, \vec{x}). \quad (5.2)$$

Kvadratickou formu $q(\vec{x})$ a bilineární formu $qq(\vec{x}, \vec{y})$ z rovnosti (5.2) budeme nazývat *vzájemně přidruženými*. *Matici kvadratické formy* a *hodnot kvadratické formy* pak definujeme jako matici, resp. hodnotu přidružené bilineární formy. Řekneme, že kvadratická forma (5.2) je *regulární*, resp. *singulární*, je-li přidružená bilineární forma regulární, resp. singularní. Řekneme, že kvadratická forma (5.2) je v *diagonálním tvaru*, je-li přidružená bilineární forma v diagonální tvaru.

5.1.7 Příklad

Příkladem kvadratické formy ve třídímním prostoru $\mathbf{R}^3$ je forma $q(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 14x_2x_3 - 11x_3^2$. Převáděna do maticového zápisu má tato forma tvar

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Přidružená bilineární forma má proto tvar $qq(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 7x_2y_3 + 7x_3y_2 - 11x_3y_3$.

5.1.8 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathbf{R}^r$. Zobrazení z $\mathbf{R}^r$ do $\mathbf{R}^r$ zavedené předpisem

$$y_i = \sum_{j=1}^r r_{ij} x_j$$

pro $i \in \widehat{r}$ nazýváme *lineárním zobrazením* ve $\mathbf{R}^r$. Matice $\mathbb{R} = (r_{ij})_{i,j=1}^r$ se pak nazývá *maticí lineárního zobrazení*. Zavedené zobrazení (shrnuté stručným zápisem $\vec{y} = \mathbb{R}\vec{x}$) nazveme *regulárním*, resp. *singulárním*, je-li matice $\mathbb{R}$ regulární, resp. singularní.

5.1.9 Definice

Řekneme, že lineární zobrazení $\vec{y} = \mathbb{R}\vec{x}$ je *ortonormální*, jestliže pro každé dva indexy $i, j \in \widehat{r}$ platí $\sum_{k=1}^r r_{ki} r_{kj} = \delta_{ij}$.

5.1.10 Příklad

Nechť $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je pevně zvolený úhel. Pak zobrazení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

představuje otočení o úhel φ ve dvoudímním prostoru. Toto zobrazení je ortonormální, neboť

$$(\cos(\varphi), -\sin(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = 0$$

a také

$$(\cos(\varphi), -\sin(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} = (\sin(\varphi), \cos(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = 1.$$

5.1.11 Příklad

Podobně jako v předešlém příkladě je také otočení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

kolem osy x_3 ve třídímenzionálním prostoru rovněž ortonormálním zobrazením. Ověření příslušných rovností je ponecháno čtenáři jako cvičení.

5.1.12 Poznámka

Je-li zobrazení z definice 5.1.8 regulární, existuje k němu inverzní lineární zobrazení

$$x_i = \sum_{j=1}^r p_{ij} y_j \quad (i \in \hat{r}),$$

jehož matice $\mathbb{P}$ je inverzní k matici $\mathbb{R}$, tj. $\mathbb{P} = \mathbb{R}^{-1}$.

5.1.13 Věta

Lineární substitucí $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ přejde kvadratická forma $q(\vec{x}) := \sum_{i,j=1}^r a_{ij} x_i x_j$ s maticí $\mathbb{A}$ ve formu $\tilde{q}(\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^r b_{ij} y_i y_j$ se symetrickou maticí $\mathbb{B} = \mathbb{R}^T \mathbb{A} \mathbb{R}$.

Důkaz:

- nechť $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x}$ a $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$
- dosadíme-li $\tilde{q}(\vec{y}) = (\mathbb{R}\vec{y})^T \mathbb{A} (\mathbb{R}\vec{y}) = (\vec{y}^T \mathbb{R}^T) \mathbb{A} \mathbb{R} \vec{y} = \vec{y}^T (\mathbb{R}^T \mathbb{A} \mathbb{R}) \vec{y}$, je skutečně $\mathbb{B} = \mathbb{R}^T \mathbb{A} \mathbb{R}$
- matice $\mathbb{B}$ je symetrická, což plyne z vlastností maticového násobení $\mathbb{R}^T \mathbb{A} \mathbb{R}$, kde $\mathbb{A}$ je symetrická matice

5.1.14 Poznámka

Na tomto místě raději připomínáme, že číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazýváme *vlastním číslem* matice $\mathbb{A}$, existuje-li nenulový vektor $\vec{x}_\lambda$ tak, že

$$\mathbb{A} \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda.$$

Každý takový vektor pak nazýváme *vlastním vektorem* příslušným vlastnímu číslu λ . Přitom každá matice $\mathbb{A}$ řádu r má právě r (ne nutně různých) vlastních čísel, jež mohou být vypočteny z rovnice

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0.$$

Tato rovnice je totiž algebraickou rovnicí, kde na levé straně stojí reálný polynom stupně r . Z algebry víme, že každý takový polynom má právě r kořenů a že je-li číslo $a + ib$ jeho kořenem, pak také komplexně sdružené číslo $a - ib$ je jeho kořenem. Dále je známo, že je-li matice $\mathbb{A}$ symetrická, pak jsou všechna její vlastní čísla reálná. Tak tomu bude tedy i u zkoumaných kvadratických forem, neboť jejich matice jsou z definice symetrické. Pro vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ matice $\mathbb{A}$ také platí známý vztah

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{k=1}^r \lambda_k.$$

5.1.15 Definice

Nechť je dána r –dimenzionální bilineární, popř. kvadratická forma s maticí $\mathbb{A}$, jež má hodnotu rovnou číslu $s \in \hat{r}$. Nechť jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ uspořádána následovně. Pro $i \in \hat{r} \setminus \hat{s}$ nechť $\lambda_i = 0$ a pro $i \in \hat{s}$ nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$. Pak vektor

$$\vec{\sigma}(q) \equiv \vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

budeme nazývat (*uspořádaným*) *vektorovým spektrem* bilineární/kvadratické formy, resp. matice A .

5.1.16 Definice

Nechť je dána matice $\mathbb{A}$. Nechť $\vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ je její vektorové spektrum. Pak matici $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ budeme nazývat *kanonickou maticí* přidruženou k matici $\mathbb{A}$.

5.1.17 Poznámka

Hlavní snahou této sekce bude převádět libovolné kvadratické formy z obecných tvarů na tvary diagonální, které jsou snáze interpretovatelné. Přitom, jak uvidíme, klasifikace kvadratických forem podle diagonálních tvarů (přesněji normálních tvarů) bude zásadní při studiu kvadratických ploch v další sekci. Výchozí větou pro zmiňovanou klasifikaci bude tzv. zákon setrvačnosti kvadratických forem, který právě vyslovíme.

5.1.18 Věta – zákon setrvačnosti kvadratických forem

Ke každé kvadratické formě $q(x_1, x_2, \dots, x_r)$ s maticí $\mathbb{A}$ existuje regulární zobrazení $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$, jež tuto formu převede na tvar

$$\tilde{q}(y_1, y_2, \dots, y_r) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 = \vec{y}^T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vec{y}, \quad (5.3)$$

kde $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ je vektorové spektrum matice $\mathbb{A}$. Přitom uvedené zobrazení je ortonormální, tj. sloupce matice $\mathbb{R}$ tvoří ortonormální soubor.

Důkaz:

- nechť jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ kumulována do vektorového spektra $\vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$
- podle jisté algebraické věty existuje unitární matice $\mathbb{R}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{R}^T \mathbb{D} \mathbb{R}$, kde $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ je tzv. kanonická matice příslušná matici $\mathbb{A}$
- dále $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} = \vec{x}^T \mathbb{R}^T \mathbb{D} \mathbb{R} \vec{x} = (\mathbb{R}\vec{x})^T \mathbb{D} \mathbb{R} \vec{x}$
- označme nyní $\vec{y} := \mathbb{R}\vec{x}$
- pak tedy

$$q(\vec{x}) = \tilde{q}(\vec{y}) = \vec{y}^T \mathbb{D} \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$$

- jelikož $\mathbb{R}$ je unitární matice, jsou sloupce matice $\mathbb{R}$ vzájemně ortonormální

5.1.19 Věta – o normalizovatelnosti kvadratických forem

Kvadratickou formu $q(x_1, x_2, \dots, x_r)$ hodnotí h lze vždy převést regulární substitucí $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ ve formu

$$q(y_1, y_2, \dots, y_r) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{s_1}^2 - y_{s_1+1}^2 - \dots - y_{s_1+s_2}^2, \quad (5.4)$$

kde $h = s_1 + s_2$.

Důkaz:

- nechť je tedy dána kvadratická forma $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x}$ s maticí $\mathbb{A}$
- vzhledem k tomu, že $\mathbb{A}$ je symetrická, jsou všechna její vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ reálná
- nechť jsou navíc uspořádána do vektorového spektra $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$
- tedy $s_1 + s_2 = h$, a $r - h$ vlastních čísel je proto nulových
- vyjdeme ze zákona setrvačnosti kvadratických forem 5.1.18

- podle něj lze formu $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x}$ převést regulární transformací $\vec{x} = \mathbb{Q} \vec{z}$ na tvar

$$\tilde{q}(z_1, z_2, \dots, z_r) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_r z_r^2$$

- nyní zavedme další transformaci $\vec{z} = \mathbb{P} \vec{y}$, kde

$$\mathbb{P} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{s_1}}}, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s_1+1}}}, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s_1+2}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_h}}, 1, 1, \dots, 1 \right)$$

je diagonální matice s uvedenými prvky na hlavní diagonále

- takové zobrazení je regulárním zobrazením, neboť pro příslušný determinant platí

$$\det(\mathbb{P}) = \prod_{k=1}^{s_1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \prod_{k=s_1+1}^h \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \cdot \prod_{k=h}^r 1 > 0$$

- je-li matice $\mathbb{A}$ regulární, tj. $h = r$, pak navíc $\det(\mathbb{P}) = |\det(\mathbb{A})|^{-1/2}$
- jak zobrazení $\vec{x} = \mathbb{Q} \vec{z}$, tak také zobrazení $\vec{z} = \mathbb{P} \vec{y}$ jsou regulární, a proto tedy $\vec{x} = \mathbb{Q}(\mathbb{P} \vec{y}) = (\mathbb{Q} \cdot \mathbb{P}) \vec{y}$ je hledaným zobrazením a navíc regulárním, neboť $\det(\mathbb{Q} \cdot \mathbb{P}) = \det(\mathbb{Q}) \det(\mathbb{P}) \neq 0$
- hledanou maticí $\mathbb{R}$ je proto matice $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{P}$

5.1.20 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$. Tvar (5.3), resp. (5.4) pak nazýváme *kanonickým*, resp. *normálním* tvarem kvadratické formy.

5.1.21 Lemma

Uspořádaná trojice $(s_1, s_2, r - h)$ z věty 5.1.19 je pro pevně zvolenou kvadratickou formu určena jednoznačně.

5.1.22 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$. Uspořádanou trojici $(s_1, s_2, r - h)$ z věty 5.1.19 nazýváme *signaturou* kvadratické formy a značíme ji $\text{sg}(q)$. Čísla s_1 , resp. s_2 , resp. $r - h$ nazýváme po řadě *kladným*, *záporným* a *nulovým indexem setrvačnosti* kvadratické formy.

5.1.23 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *pozitivně definitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme $q(\vec{x}) \triangleright 0$, jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) platí ostrá nerovnost $q(\vec{x}) > 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *negativně definitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme $q(\vec{x}) \triangleleft 0$, jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) platí ostrá nerovnost $q(\vec{x}) < 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *pozitivně semidefinitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme $q(\vec{x}) \trianglerighteq 0$, jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ platí neostrá nerovnost $q(\vec{x}) \geq 0$ a existuje $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) takové, že $q(\vec{x}) = 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *negativně semidefinitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme $q(\vec{x}) \trianglelefteq 0$, jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ platí neostrá nerovnost $q(\vec{x}) \leq 0$ a existuje $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) takové, že $q(\vec{x}) = 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *indefinitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme $q(\vec{x}) \triangleleft \triangleright 0$, jestliže existují $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^r$ taková, že $q(\vec{x}) < 0$ a $q(\vec{y}) > 0$.

5.1.24 Věta

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je pozitivně definitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy kladná.

Důkaz:

- věta je vyslovena jako ekvivalence, proto budeme dokazovat dvě implikace

- První implikace:

– necht' je tedy forma $q(\vec{x})$ pozitivně definitní, tj. $q(\vec{x}) \triangleright 0$

- necht' $\lambda \in \mathbf{R}$ je vlastní číslo její matice $\mathbb{A}$, tj. $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, kde $\vec{x}$ není nulový vektor
- odsud vyplývá $\vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}^T \vec{x}$, a tedy $q(\vec{x}) = \lambda \vec{x}^T \vec{x}$ a následně

$$\lambda = \frac{q(\vec{x})}{\vec{x}^T \vec{x}} = \frac{q(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} > 0$$

- tato nerovnost vyplývá jednak z faktu, že pro nenulové $\vec{x}$ je $q(\vec{x}) > 0$, ale také ze skutečnosti, že velikost $\|\vec{x}\|$ (říkejme jí raději euklidovská norma - viz následující kapitola) nenulového vektoru není nikdy nulová

• Druhá implikace:

- necht' jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ kumulována do vektorového spektra $\vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$
- podle jisté algebraické věty existuje unitární matice $\mathbb{U}$ (tedy ortogonální) tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}^T \mathbb{D} \mathbb{U}$, kde $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ je tzv. kanonická matice příslušná matici $\mathbb{A}$
- dále $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} = \vec{x}^T \mathbb{U}^T \mathbb{D} \mathbb{U} \vec{x} = (\mathbb{U}\vec{x})^T \mathbb{D} \mathbb{U} \vec{x}$
- označme nyní $\vec{y} := \mathbb{U}\vec{x}$
- jelikož $\mathbb{U}$ je ortogonální matice (a tedy regulární), je vektor $\vec{y}$ rovněž nenulový (tedy až na triviální případ, kdy $\vec{x} = \vec{0}$)
- pak tedy

$$q(\vec{x}) = \vec{y}^T \mathbb{D} \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 > 0$$

- poslední nerovnost je důsledkem skutečnosti, že vlastní čísla jsou z předpokladů kladná a alespoň jedno y_i není nulové

5.1.25 Věta

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy nezáporná a alespoň jedno z nich je nulové.

Důkaz:

- důkaz je obměnou předešlého důkazu (pouze všechny ostré nerovnosti jsou nahrazeny neostrými)

5.1.26 Věta

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je negativně definitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy záporná.

Důkaz:

- postačí si uvědomit skutečnost, že je-li kvadratická forma $q(\vec{x})$ negativně definitní, je forma $-q(\vec{x})$ pozitivně definitní
- tvrzení pak beze zbytku plyne z věty 5.1.24

5.1.27 Důsledek

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je negativně semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy nekladná a alespoň jedno z nich je nulové. Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je indefinitní právě tehdy, když existují alespoň dvě vlastní čísla matice formy, z nichž jedno je kladné a jedno je záporné.

5.1.28 Věta

Nechť $q(\vec{x})$ je kvadratická forma v $\mathbf{R}^r$ hodnotí h a signatury $\text{sg}(q) = (s_1, s_2, r - h)$.

1. Forma $q(\vec{x})$ je pozitivně, resp. negativně definitní v $\mathbf{R}^r$ právě tehdy, když $h = r = s_1$, resp. $h = r = s_2$.
2. Forma $q(\vec{x})$ je pozitivně, resp. negativně semidefinitní v $\mathbf{R}^r$ právě tehdy, když $h < r$ a $s_1 = h$, resp. $h < r$ a $s_2 = h$.
3. Forma $q(\vec{x})$ je indefinitní v $\mathbf{R}^r$ právě tehdy, když $s_1 s_2 \neq 0$.

Důkaz:

- je přímým důsledkem předešlých vět

5.1.29 Věta – Sylvesterovo kritérium

Nechť $q(\vec{x})$ je kvadratická forma v $\mathbf{R}^r$ s maticí $\mathbb{A}$ a hlavními minory Δ_i , kde $i \in \hat{r}$. Pak $q(\vec{x})$ je pozitivně definitní právě tehdy, když pro všechna $i \in \hat{r}$ je $\Delta_i > 0$. Forma $q(\vec{x})$ je negativně definitní právě tehdy, když pro všechna $i \in \hat{r}$ je $(-1)^i \Delta_i > 0$.

Důkaz:

- dokážeme nejprve první část tvrzení
- to je vysloveno jako ekvivalence, proto budeme dokazovat dvě implikace
- První implikace:
 - nechť je tedy kvadratická forma $q(\vec{x}) = x^T \mathbb{A} x$ pozitivně definitní
 - ukážeme, že za tohoto předpokladu je matice

$$\mathbb{A}_k := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní

- nechť je tedy $(y_1, y_2, \dots, y_k)^T$ nenulový vektor
- potom platí

$$(y_1, y_2, \dots, y_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

- znaménko nerovnosti plyne z definice pozitivní definitnosti kvadratických forem

- matice $\mathbb{A}_k$ je tedy pozitivně definitní, a proto má všechna vlastní čísla $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ kladná, z čehož vyplývá, že pro všechna $k \in \hat{r}$ platí

$$\Delta_k = \det(\mathbb{A}_k) = \prod_{i=1}^k \mu_i > 0$$

- Druhá implikace:

- předpokládejme, že pro všechna $k \in \hat{r}$ platí $\det(\mathbb{A}_k) > 0$
- matematickou indukcí dokážeme, že kvadratická forma $q(\vec{x}) = x^T \mathbb{A} \vec{x}$ je pozitivně definitní, tj. že matice $\mathbb{A} = \mathbb{A}_n$ je pozitivně definitní
- pro $k = 1$ je zřejmé, že $\mathbb{A}_1$ je pozitivně definitní
- indukčním předpokladem tedy bude pozitivní definitnost matice $\mathbb{A}_{n-1}$
- označme

$$d_n = \frac{\det(\mathbb{A}_n)}{\det(\mathbb{A}_{n-1})}$$

- dále označme $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ vektor, který řeší soustavu $\mathbb{A}_n \vec{z} = (0, 0, \dots, 0, d_n)^T$
- z Cramerova pravidla vyplývá rovnost $z_n = 1$
- proto pro $i \in \widehat{n-1}$ platí vztahy $a_{in} = a_{ni} = -a_{i1}z_1 - a_{i2}z_2 - \dots - a_{i,n-1}z_{n-1}$
- a dále $a_{nn} = d_n - a_{n1}z_1 - a_{n2}z_2 - \dots - a_{n,n-1}z_{n-1}$
- označme

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -z_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- označme dále

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

- nyní lze rutinním výpočtem ověřit, že platí vztah $\mathbb{A}_n = \mathbb{R}^T \mathbb{D} \mathbb{R}$
- nechť $\vec{x}$ je libovolný nenulový vektor
- označme $\vec{y} = \mathbb{R} \vec{x}$
- protože matice $\mathbb{R}$ je regulární, je také vektor $\vec{y}$ nenulový
- označme ještě $\vec{y}_\bullet = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})^T$
- pak jednoduchými úpravami dostáváme sérii rovností

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} = \vec{x}^T \mathbb{R}^T \mathbb{D} \mathbb{R} \vec{x} = (\mathbb{R} \vec{x})^T \mathbb{D} \mathbb{R} \vec{x} = \vec{y}^T \mathbb{D} \vec{y} = \vec{y}_\bullet^T \mathbb{A}_{n-1} \vec{y}_\bullet + d_n y_n^2 > 0$$

- oba poslední sčítance jsou nezáporné, protože matice $\mathbb{A}_{n-1}$ je z indukčního předpokladu pozitivně definitní a číslo d_n je kladné
- ostrá nerovnost vyplývá z faktu, že je-li $\vec{y}$ nenulový vektor, je buď $y_n \neq 0$ nebo $\vec{y}_\bullet \neq \vec{0}$

- tvrzení Sylvesterova kritéria o negativní definitnosti vyplývá z faktu, že je-li kvadratická forma $q(\vec{x})$ negativně definitní, je forma $-q(\vec{x})$ pozitivně definitní

5.1.30 Poznámka

Kromě typů definitností z definice 5.1.23 budeme také rozlišovat typy *excentricity* kvadratických forem. Ty zavedeme v následující definici a s výhodou je využijeme při pozdější klasifikaci kvadratických ploch.

5.1.31 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ a nechť $\text{sg}(q) = (s_1, s_2, s_3)$ je její signatura. Řekneme, že kvadratická forma $q(\vec{x})$ je *eliptická*, resp. *hyperbolická*, resp. *parabolická* v prostoru $\mathbf{R}^r$, jestliže $s_1 = r$ nebo $s_2 = r$, resp. $s_1 s_2 \neq 0$ a $s_3 = 0$, resp. $s_3 \neq 0$.

5.1.32 Definice

Nechť jsou dány vektory $\vec{u}, \vec{v}$ z vektorového prostoru $\mathbf{R}^r$ a kvadratická forma $q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$. Pak řekneme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou *q-ortogonální*, jestliže $qq(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, kde $qq(\vec{x}, \vec{y})$ je bilineární forma přidružená ke kvadratické formě $q(\vec{x})$.

5.1.33 Definice

Bázi $\mathcal{B}_P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r)$ vektorového prostoru $\mathbf{R}^r$ nazýváme *polární bázi* odvozenou od kvadratické formy $q(\vec{x})$, zkráceně: *polární bázi kvadratické formy $q(\vec{x})$* , jestliže pro každá $i, j \in \hat{r}$ zároveň platí:

1. $qq(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$, pokud $i \neq j$,
2. $q(\vec{u}_i) \in \{0, +1, -1\}$,

kde $qq(\vec{x}, \vec{y})$ je bilineární forma přidružená ke kvadratické formě $q(\vec{x})$.

5.1.34 Příklad

Například pro kvadratickou formu $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ je polární bázi množina

$$\mathcal{B}_P = ((1, 0, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top, (0, 0, 1)^\top).$$

Ale pozor! Není jedinou polární bázi. Pokusíme se nalézt další. Hledejme například polární bázi obsahující zvolený vektor

$$\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^\top,$$

pro který platí $q(\vec{u}) = 1$. Hledejme tedy druhý vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$. Ten by měl splňovat společně s vektorem $\vec{u}$ podmínku *q-ortogonalitu*, tj.

$$qq(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 + v_2) = 0.$$

Dále by mělo platit $q(\vec{v}) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Jelikož máme k dispozici pouze dvě podmínky pro tři neznámé v_1, v_2, v_3 , lze jednu z nich volit. Zvolme například $v_1 = 0$. Pak ale z podmínky *q-ortogonalitu* vychází, že $v_2 = 0$. *q-normalizační* podmínka $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ pak vede k určení $v_3 = 1$. Tedy $\vec{v} = (0, 0, 1)^\top$. Hledejme třetí vektor $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^\top$. Ten by měl splňovat dvě podmínky *q-ortogonalitu*, konkrétně

$$qq(\vec{u}, \vec{w}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(w_1 + w_2) = 0,$$

$$qq(\vec{v}, \vec{w}) = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = w_3 = 0.$$

Proto $w_3 = 0$ a $w_2 = -w_1$. Podmínka q -ortonormality $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ vede k rovnosti $2w_1^2 = 1$, odkud vychází, že $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pak tedy

$$\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T.$$

Hledanou nestandardní polární bázi je tudíž soubor

$$\mathcal{B}'_P = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T, (0, 0, 1)^T, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T \right).$$

5.1.35 Poznámka

Pro určení normálního tvaru zadané kvadratické formy, pro určení její signatury a příslušné polární báze je používána tzv. *Babylónská redukce*, někdy nazývaná též *Lagrangeovým algoritmem*. Tato procedura spočívá v převedení kvadratické formy v prostoru $\mathbf{R}^r$ na maximálně r čtverců. Při této redukci na čtverce je ale třeba mít na zřeteli, aby v každém nově vytvořeném čtverci byly vždy obsaženy všechny sčítance obsahující vybranou proměnnou. Tedy např. první čtverec by měl být zkonstruován tak, aby se ve zbylém výrazu již nevyskytovala proměnná x_1 . Proto bude mít první čtverec obecně r sčítanců, druhý $r - 1$ atd. Poslední čtverec Lagrangeova algoritmu pak bude představován pouze jistým násobkem kvadrátu x_r^2 poslední proměnné. Lépe lze proceduru pochopit na konkrétním příkladě. Zkoumejme proto kvadratickou formu

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1x_3.$$

Doplnění na čtverce pak probíhá následovně

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (2x_3)^2.$$

Tedy normální tvar zadané formy má podobu $\tilde{q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, kde $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - 2x_3$ a $y_3 = 2x_3$. Signaturou zadané kvadratické formy je pak trojice $\text{sg}(q) = (2, 1, 0)$. Zkoumaná forma je proto regulární, indefinitní a hyperbolická. Pro inverzní transformaci platí maticový vztah

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé sloupce matice přechodu, jak se přesvědčíme později, představují vektory polární báze. Tedy

$$\mathcal{B}_P = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \equiv \left\{ (1, 0, 0)^T, (1, 1, 0)^T, \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)^T \right\}.$$

Snadno ověříme, že se skutečně o polární bázi jedná, neboť jsou splněny jak q -normalizační podmínky $q(\vec{u}_1) = 1$, $q(\vec{u}_2) = -1$, $q(\vec{u}_3) = 1$, tak také podmínky q -ortogonalit $qq(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = qq(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = qq(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0$.

5.1.36 Věta

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$ v prostoru $\mathbf{R}^r$ a její polární báze $\mathcal{B}_P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r)$. Pak regulární lineární zobrazení $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{y}$ zadané rovnostmi $x_k = u_{1k}y_1 + u_{2k}y_2 + u_{3k}y_3 + \dots + u_{rk}y_r$ převádí formu $q(\vec{x})$ na normální tvar.

Důkaz:

- z vektorů polární báze $\mathcal{B}_P$ sestavme matici

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & \dots & u_{r1} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & \dots & u_{r2} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \dots & u_{r3} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u_{1r} & u_{2r} & u_{3r} & \dots & u_{rr} \end{pmatrix}$$

- zobrazení $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{y}$ zavedeme do kvadratické formy
- pak tedy $q(\vec{x}) = \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{x} = (\mathbb{B}\vec{y})^\top \mathbb{A} (\mathbb{B}\vec{y}) = \vec{y}^\top (\mathbb{B}^\top \mathbb{A} \mathbb{B}) \vec{y}$
- zkoumejme nyní matici

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^\top \mathbb{A} \mathbb{B} &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^\top \\ \vec{u}_2^\top \\ \vec{u}_3^\top \\ \vdots \\ \vec{u}_r^\top \end{pmatrix} \mathbb{A}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r) = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^\top \\ \vec{u}_2^\top \\ \vec{u}_3^\top \\ \vdots \\ \vec{u}_r^\top \end{pmatrix} (\mathbb{A}\vec{u}_1, \mathbb{A}\vec{u}_2, \dots, \mathbb{A}\vec{u}_r) = \\ &= \begin{pmatrix} qq(\vec{u}_1, \vec{u}_1) & qq(\vec{u}_1, \vec{u}_2) & qq(\vec{u}_1, \vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_1, \vec{u}_r) \\ qq(\vec{u}_2, \vec{u}_1) & qq(\vec{u}_2, \vec{u}_2) & qq(\vec{u}_2, \vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_2, \vec{u}_r) \\ qq(\vec{u}_3, \vec{u}_1) & qq(\vec{u}_3, \vec{u}_2) & qq(\vec{u}_3, \vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_3, \vec{u}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ qq(\vec{u}_r, \vec{u}_1) & qq(\vec{u}_r, \vec{u}_2) & qq(\vec{u}_r, \vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_r, \vec{u}_r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- užijeme-li nyní vlastností vektorů polární báze, dostáváme odtud

$$\mathbb{B}^\top \mathbb{A} \mathbb{B} = \begin{pmatrix} q(\vec{u}_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\vec{u}_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q(\vec{u}_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(\vec{u}_r) \end{pmatrix}$$

- odsud již přímo plyne, že forma

$$q(\vec{x}) = q(\mathbb{B}\vec{y}) = (y_1, y_2, \dots, y_r) \begin{pmatrix} q(\vec{u}_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\vec{u}_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q(\vec{u}_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(\vec{u}_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

je v normálním tvaru

- přitom hodnoty $q(\vec{u}_1), q(\vec{u}_2), \dots, q(\vec{u}_r)$, které jsou buď 0 nebo 1 nebo -1, jednoznačně určují signaturu zadané kvadratické formy

5.1.37 Poznámka

Podle předešlé věty je tedy polární báze takovou bází v $\mathbf{R}^r$, v níž má zvolená kvadratická forma normální tvar. Uvědomme si, že ze vztahu $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + \dots + y_r\vec{u}_r$ plyne, že $(\vec{x})_{\mathcal{B}_P} = (y_1, \dots, y_r)^\top$, tj. $y_1, \dots, y_r$ jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{B}_P$. Tento poznatek s výhodou využijeme při studiu obecných kvadratických ploch.

5.1.38 Příklad

Nechť je dána kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 - x_2x_3.$$

Hledáme její polární bázi, která obsahuje vektor $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)^\top$, existuje-li. Pokusíme se také stanovit její typ, definitnost, signaturu, normální tvar v souřadnicích polární báze a transformační vztahy, které ji na její normální tvar převádějí. Daná kvadratická forma má maticový zápis tvaru

$$q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bilineární forma přidružená k zadané kvadratické formě má tedy podobu

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Nejprve se budeme snažit zkonstruovat polární bázi $\mathcal{B}_P = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ s již zadaným vektorem $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)^\top$. Jelikož je zřejmé, že forma $q(\vec{x})$ je indefinitní, o čemž se snadno přesvědčíme pomocí definice, a $q(\vec{u}_1) = -1$, bude taková polární báze existovat. Její konstrukci provedeme přímo užitím patřičné definice. Začneme hledáním vektoru $\vec{u}_2 = (x_1, x_2, x_3)^\top$ splňujícího podmínky $qq(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$ a $q(\vec{u}_2) \in \{0, -1, 1\}$. Protože ale máme pouze dvě podmínky pro tři neznámé x_1, x_2, x_3 , lze jednu z nich volit. My zde např. volíme

$$x_1 = 0. \quad (5.5)$$

První podmínka dává rovnost

$$(0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3) = 0,$$

a tedy (pro volbu (5.5)) dostáváme $x_2 = -x_3$. Dosadíme-li oba získané vztahy do druhé podmínky, obdržíme $q(\vec{u}_2) = x_3^2 = 1$. Zde podotýkáme, že hodnoty 0 nebo -1 na pravé straně této rovnosti byly z pochopitelných důvodů zavrhnuty. Rovnici řeší např. hodnota $x_3 = 1$, což vede k nalezení druhého vektoru polární báze ve tvaru $\vec{u}_2 = (0, -1, 1)^\top$. Dále pokračujeme analogicky hledáním posledního vektoru $\vec{u}_3 = (x_1, x_2, x_3)^\top$ splňujícího podmínky $qq(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = 0$, $qq(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0$ a $q(\vec{u}_3) \in \{0, -1, 1\}$. Uvedené podmínky q -ortogonalit vedou k rovnostem $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $-x_2 + x_3 = 0$. Po vyjádření $x_2 = x_3$ a $x_1 = 2x_3$ získává třetí podmínka jednoduchou podobu $q(\vec{u}_3) = x_3^2 = 1$. Opět jsme z množiny $\{0, -1, 1\}$ vyloučili hodnoty 0, -1 . Řešením rovnice je např. hodnota $x_3 = 1$ a tedy $\vec{u}_3 = (2, 1, 1)^\top$. Uzavíráme tedy, že hledanou polární bázi je množina

$$\mathcal{B}_P = \{(0, 1, 1)^\top, (0, -1, 1)^\top, (2, 1, 1)^\top\}. \quad (5.6)$$

Úloha má zřejmě i další řešení (má dokonce nespočetně mnoho řešení). Např. změníme-li volbu (5.5) na $x_2 = 0$ nebo $x_3 = 0$, dostaneme polární bázi tvaru $\mathcal{B}_P = \{(0, 1, 1)^\top, (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})^\top, (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^\top\}$. Zpět ale k polární bázi (5.6). Určíme transformační vztahy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

pro převod zadané kvadratické formy na normální tvar

$$\tilde{q}(\vec{y}) = q(\vec{u}_1)y_1^2 + q(\vec{u}_2)y_2^2 + q(\vec{u}_3)y_3^2 = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

hyperbolického typu. Odsud snadno nahlédneme, že signatura zadané formy je $\text{sg}(q) = (2, 1, 0)$.

5.2 Kvadratické plochy

Po podrobném studiu kvadratických forem přistoupíme v tomto oddíle k vyšetřování základních vlastností kvadratických ploch (kvadrik) v r -dimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^r$.

5.2.1 Definice

Nechť je dána nenulová čtvercová symetrická matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$, vektor $\vec{b} \in \mathbf{R}^r$ a číslo $c \in \mathbf{R}$. Funkci $Q(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ tvaru

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} - 2 \vec{b}^T \vec{x} + c \quad (5.7)$$

nazýváme *kvadratickou funkcí* v prostoru $\mathbf{R}^r$. Množina (vzor nuly při zobrazení $Q(\vec{x})$)

$$Q^{-1}(0) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^r : Q(\vec{x}) = 0\} \quad (5.8)$$

se nazývá *kvadratickou plochou (kvadrikou)* určenou rovnicí $Q(\vec{x}) = 0$. Matici $\mathbb{A}$, vektor $\vec{b}$ a číslo c nazýváme *maticí*, *vektorem* a *absolutním členem* kvadratické funkce (kvadriky). Člen $-2 \vec{b}^T \vec{x}$ ve vztahu (5.7) nazýváme *lineárním členem kvadratické funkce*.

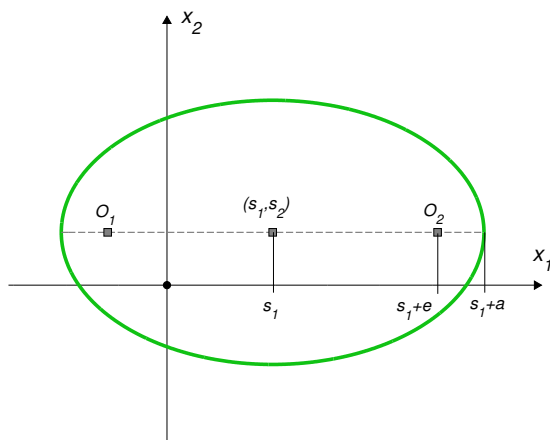
Kvadratickou formu $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x}$ nazýváme *kvadratickou formou příslušnou ke kvadratické funkci* (5.7), resp. *ke kvadrice* (5.8). Kvadriku ve dvoudimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^2$ nazýváme také *kuželosečkou*.

5.2.2 Poznámka

Nejfrekventovanějšími kvadrikami ve dvoudimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^2$ jsou elipsa, hyperbola a parabola. Tyto kuželosečky bývají nejčastěji uváděny ve středoškolských diagonálních tvarech, kdy jejich hlavní osy (či tzv. poloosy) jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Proberme nyní stručně základní vlastnosti těchto elementárních kuželoseček. *Elipsa* je množina bodů v rovině, jež mají od dvou pevně zvolených bodů O_1, O_2 (tzv. *ohnisek elipsy*) stálý součet vzdáleností $2a$. Čísla a, b ($a \geq b$) nazýváme po řadě *hlavní a vedlejší poloosou* elipsy. Vzdálenost obou ohnisek od středu elipsy se nazývá *excentricita* a vypočte se pomocí vztahu $e := \sqrt{a^2 - b^2}$. Například elipsa

$$\frac{(x_1 - s_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - s_2)^2}{b^2} = 1$$

je elipsou o poloosách a a b se středem v bodě (s_1, s_2) . Její podoba je vyobrazena na následujícím obrázku.



Obrázek 5.17

Elipsa o poloosách a a b se středem v bodě (s_1, s_2) . Body (s_1+e, s_2) a (s_1-e, s_2) reprezentují ohniska elipsy. Jejich vzdálenost od středu elipsy je rovna excentricitě $e := \sqrt{a^2 - b^2}$.

Tato elipsa může být snadno zapsána v definičním tvaru $Q(x_1, x_2) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} - 2 \vec{b}^T \vec{x} + c$, položíme-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} s_1 a^{-2} \\ s_2 b^{-2} \end{pmatrix}, \quad c = \frac{s_1^2}{a^2} + \frac{s_2^2}{b^2} - 1.$$

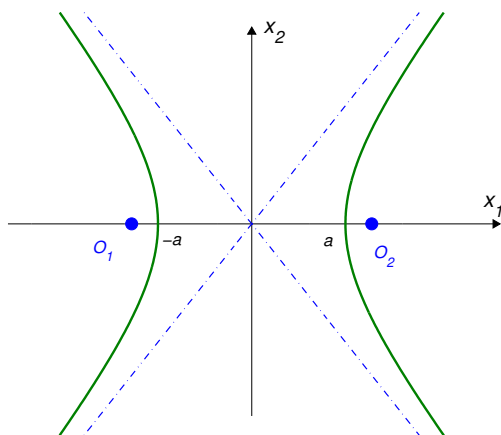
Hyperbola je množina bodů v rovině, jež mají od dvou pevně zvolených bodů O_1, O_2 (tzv. *ohnisek hyperboly*) stálý rozdíl vzdáleností $2a$. Čísla a, b nazýváme po řadě *hlavní a vedlejší poloosou* hyperboly. Vzdálenost obou ohnisek od středu hyperboly se nazývá *excentricita* a vypočte se pomocí vztahu $e := \sqrt{a^2 + b^2}$. Přímky

$$x_{2,2} = \pm \frac{b}{a} x_1$$

se nazývají *asymptotami* hyperboly. Rovnice hyperboly ve standardním diagonálním tvaru je

$$\frac{(x_1 - s_1)^2}{a^2} - \frac{(x_2 - s_2)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Její tvar je pro $(s_1, s_2) = (0, 0)$ vyobrazen na obrázku níže.



Obrázek 5.18

Hyperbola $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ o poloosách a a b se středem v bodě $(0, 0)$.

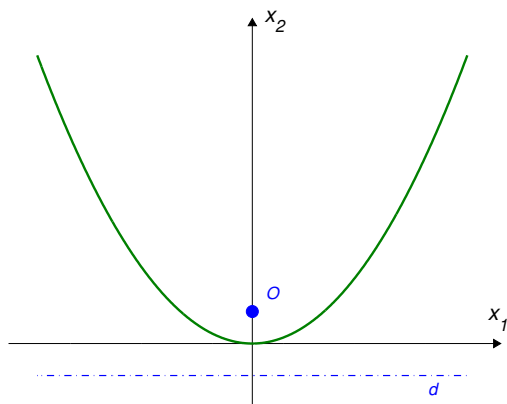
Matic; vektorem, resp. a absolutním členem hyperboly jsou

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} s_1 a^{-2} \\ -s_2 b^{-2} \end{pmatrix}, \quad c = \frac{s_1^2}{a^2} + \frac{s_2^2}{b^2} \pm 1.$$

Parabola je množina bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od pevně zvoleného bodu O (tzv. *ohniska paraboly*) a pevné přímky d (tzv. *řídící přímky paraboly*). Vzdálenost bodu O od řídící přímky je p . Rovnice paraboly ve standardním diagonálním tvaru je

$$x_1^2 - 2px_2 = 0.$$

Graficky je vyobrazena na následujícím obrázku.



Obrázek 5.19

Parabola $x_1^2 - 2px_2 = 0$. Bod O je ohniskem paraboly, čárkovaná přímka je tzv. *direktrix*, řídící přímka paraboly.

Parabola $x_1^2 - 2px_2 = 0$ má maticový tvar

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2(0, p) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Kvadratická forma paraboly je tedy singulární, a proto není možno definovat regularitu kuželoseček pomocí regularity přidružené kvadratické formy. Kdybychom k tomuto přistoupili, museli bychom zároveň připustit, že parabola by byla singulární kvadrikou. Tomu se ovšem chceme vyhnout, proto budeme regularitu kvadrik definovat poněkud odlišně.

5.2.3 Definice

Nechť je dána kvadratická funkce (5.7). Kvadratickou formu

$$q_0(x_0, \vec{x}) := \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} - 2 \vec{b}^T \vec{x} x_0 + c x_0^2 \quad (5.9)$$

v $\mathbf{R}^{r+1}$ nazýváme *rozšířenou kvadratickou formou příslušnou ke kvadrice* (5.8), resp. *ke kvadratické funkci* (5.7). Její matici

$$\begin{pmatrix} c & -\vec{b}^T \\ -\vec{b} & \mathbb{A} \end{pmatrix}$$

budeme označovat symbolem $\mathbb{A}_{(ex)}$ (z anglického extended).

5.2.4 Příklad

Pro kvadratickou funkci $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2 + 3$ definovanou v prostoru $\mathbf{R}^2$ má příslušná rozšířená kvadratická forma tvar $q_0(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_0x_2 + 3x_0^2$. Podotýkáme, že q_0 je kvadratickou formou v $\mathbf{R}^3$.

5.2.5 Definice

Řekneme, že daná kvadrika je *regulární*, resp. *singulární*, jestliže její rozšířená kvadratická forma je regulární, resp. *singulární*. *Hlavní signaturou* kvadriky (označujeme $SG(Q)$) rozumíme signaturu její rozšířené kvadratické formy. *Vedlejší signaturou* kvadriky (značíme $sg(Q)$) rozumíme signaturu její kvadratické formy.

5.2.6 Příklad

V poznámce 5.2.2 jsme diskutovali parabolu $x_1^2 - 2px_2 = 0$, kde $p \neq 0$. Její matice rozšířené kvadratické formy $q_0(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - 2px_2x_0 = 0$ má následující podobu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a je zjevně regulární, neboť $p \neq 0$ a sloupce uvedené matice jsou zřetelně nezávislé. Proto je parabola regulární kuželosečkou v $\mathbf{R}^2$. Pokusme se nalézt její signaturu. Stanovit vedlejší signaturu je značně jednoduché. Platí totiž $sg(Q) = (1, 0, 1)$. Pro stanovení hlavní signatury bude nutné převést rozšířenou formu $q_0(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - 2px_2x_0 = 0$ na diagonální tvar. Zavedeme proto s výhodou substituci

$$x_1 = y_1, \quad x_0 = y_2 + y_3, \quad x_2 = y_2 - y_3.$$

Po provedení této záměny dostáváme

$$\tilde{q}_0(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 2py_2^2 + 2py_3^2 = 0.$$

Proto je hlavní signaturou paraboly trojice $SG(Q) = (2, 1, 0)$, což opět potvrzuje její regularitu.

5.2.7 Příklad

Uvažme elipsu v diagonálním tvaru

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad (5.10)$$

kde $a \neq b$, a aplikujme na ní otočení

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

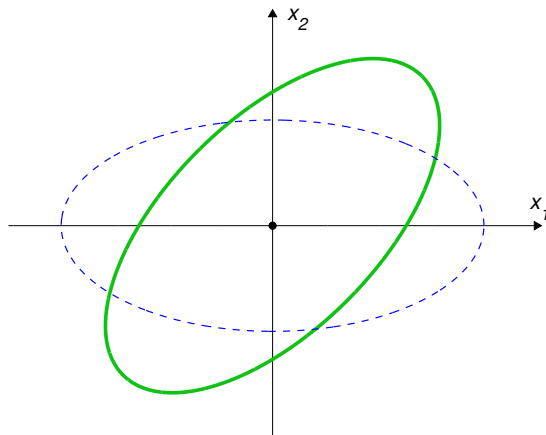
o úhel $\varphi = \pi/4$. Pak tedy

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 \right)^2 = 1,$$

odkud získáme transformovaný tvar

$$\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)^2 (y_1^2 + y_2^2) + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) y_1 y_2 = 1,$$

ze kterého čteme, že otočením elipsy (5.10) vzniká kuželosečka, jejíž smíšený člen není nula. Přesto je ale jasné, že se jedná o elipsu (viz obrázek).



Obrázek 5.20

Elipsa (5.10), na níž bylo aplikováno otočení o 45° proti směru hodinových ručiček.

Tento příklad nechť je motivací k dalšímu studiu obecných kvadratických ploch

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

v prostoru $\mathbf{R}^2$ i v prostorech vyšších dimenzí.

5.2.8 Poznámka

Kromě regularity je významným znakem kvadratických ploch také jejich centrálnost, tedy vlastnost středové souměrnosti podle některého bodu $\vec{s} \in \mathbf{R}^r$. Obecně budeme existenci středu dané kvadriky zkoumat v nadcházejícím textu.

5.2.9 Definice

Kvadratická funkce (5.7) a kvadrika (5.8) se nazývají *centrální*, pokud existuje takový bod $\vec{s} \in \mathbf{R}^r$, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ platí

$$Q(\vec{s} + \vec{x}) = Q(\vec{s} - \vec{x}). \quad (5.11)$$

Každé takové $\vec{s}$ pak nazýváme *středem kvadriky*.

5.2.10 Věta

Nechť je dána kvadratická funkce (5.7). Nechť $\mathbb{A}$ je její matice a $\vec{b}$ její vektor. Pak bod $\vec{s} \in \mathbf{R}^r$ je středem kvadriky (5.8) právě tehdy, je-li splněna rovnost $\vec{b} = \mathbb{A}\vec{s}$, tj. kvadrika je centrální právě tehdy, rovnají-li se hodnoty $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$.

Důkaz:

- z definice kvadratické plochy vyplývá rovnost $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\top$
- proto

$$Q(\vec{s} + \vec{x}) = (\vec{s} + \vec{x})^\top \mathbb{A} (\vec{s} + \vec{x}) - 2\vec{b}^\top (\vec{s} + \vec{x}) + c = \vec{s}^\top \mathbb{A} \vec{s} + \vec{s}^\top \mathbb{A} \vec{x} + \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{s} + \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{x} - 2\vec{b}^\top \vec{s} - 2\vec{b}^\top \vec{x} + c$$

- jelikož $\vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{s} = (\mathbb{A}\vec{s})^\top \vec{x} = \vec{s}^\top \mathbb{A}^\top \vec{x} = \vec{s}^\top \mathbb{A} \vec{x}$, lze předešlý vztah upravit do tvaru

$$Q(\vec{s} + \vec{x}) = \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{x} + 2(\mathbb{A}\vec{s} - \vec{b})^\top \vec{x} + \vec{s}^\top \mathbb{A} \vec{s} - 2\vec{b}^\top \vec{s} + c = \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{x} + 2(\mathbb{A}\vec{s} - \vec{b})^\top \vec{x} + Q(\vec{s})$$

- podobně lze ukázat, že $Q(\vec{s} - \vec{x}) = \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{x} - 2(\mathbb{A} \vec{s} - \vec{b})^\top \vec{x} + Q(\vec{s})$
- rovnost (5.11) tedy nastává právě tehdy, když $\mathbb{A} \vec{s} = \vec{b}$
- zmiňované $\vec{s}$ existuje podle Frobeniovy věty právě tehdy, rovnají-li se hodnoty matice $\mathbb{A}$ a matice, jež vznikne z matice $\mathbb{A}$ přidáním sloupce $\vec{b}$, tedy platí-li rovnost $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$

5.2.11 Věta – zákon setrvačnosti kvadratických ploch

Ke každé kvadratické funkci $Q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ s maticí $\mathbb{A}$ existuje ortonormální transformace $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$, jež převádí kvadriku $Q(\vec{x}) = 0$ do tvaru

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^r \beta_i y_i + \gamma = 0, \quad (5.12)$$

kde $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ je vektorové spektrum matice $\mathbb{A}$.

Důkaz:

- tvrzení této věty plyne přímo ze zákona setrvačnosti kvadratických forem 5.1.18
- za transformaci $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ postačí volit transformaci z důkazu věty 5.1.18, jež převádí kvadratickou formu $\vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{x}$ na kanonický tvar

5.2.12 Věta – o normalizovatelnosti kvadratických ploch

Ke každé kvadratické funkci $Q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ s vedlejší signaturou $\text{sg}(q) = (s_1, s_2, r - s_1 - s_2)$ existuje regulární afinní transformace $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y} + \vec{s}$, jež převádí kvadriku $Q(\vec{x}) = 0$ do tvaru

$$\tilde{Q}(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{s_1}^2 - y_{s_1+1}^2 - \dots - y_{s_1+s_2}^2 - 2\beta y_{s_1+s_2+1} + \gamma = 0, \quad (5.13)$$

kde nejvýše jedno z čísel β, γ je nenulové. Navíc $\beta \in \{0, 1\}$ a $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$.

Důkaz:

- vyjdeme z faktu, že podle věty 5.2.11 existuje regulární lineární transformace $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{z}$, jež převádí kvadriku $Q(\vec{x}) = \vec{x}^\top \mathbb{A} \vec{x} - 2\vec{b}^\top \vec{x} + c = 0$ do tvaru

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i z_i^2 - 2 \sum_{i=1}^r \beta_i z_i + \gamma = 0, \quad (5.14)$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$

- předpokládáme přitom, že jsou vlastní čísla uspořádána do vektorového spektra $\vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$
- rozdělme nyní důkaz na tři alternativy
- První alternativa: $s_1 + s_2 = r$

- podotýkáme, že všechna vlastní čísla jsou za tohoto předpokladu nenulová
- pro každé $i \in \hat{r}$ platí

$$\lambda_i z_i^2 - 2\beta_i z_i = \lambda_i \left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\beta_i^2}{\lambda_i}$$

- zavedeme-li tedy substituci $\vec{w} = \mathbb{P}\vec{z} + \vec{t}$ sadou i vztahů

$$w_i = \sqrt{|\lambda_i|} \left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right),$$

transformuje se zápis (5.14) do tvaru

$$\sum_{i=1}^r \text{sgn}(\lambda_i) w_i^2 - \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} + \gamma = 0$$

- označme $\kappa := \left| \gamma - \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} \right|$
- je-li $\kappa = 0$, je tvrzení dokázáno
- je-li $\kappa \neq 0$, zavedeme jednoduchou transformaci $\vec{y} = \frac{\vec{w}}{\sqrt{\kappa}}$, čímž obdržíme finální tvar rovnice kvadriky, a sice

$$\sum_{i=1}^r \operatorname{sgn}(\lambda_i) y_i^2 \pm 1 = 0$$

- Druhá alternativa: $s_1 + s_2 = r - 1$

- za daných předpokladů platí $\lambda_r = 0$
- opět zavedeme-li substituci $\vec{w} = \mathbb{P}\vec{z} + \vec{t}$, tentokrát definovanou vztahy

$$w_i = \sqrt{|\lambda_i|} \left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right), \quad i \in \widehat{r-1}$$

$$w_r = z_r$$

- kvadrika se pak transformuje do tvaru

$$\sum_{i=1}^{r-1} \operatorname{sgn}(\lambda_i) w_i^2 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} - 2\beta_r w_r + \gamma = 0$$

- je-li $\beta_r = 0$, je situace triviálně řešitelná (viz výše), neboť výraz $\kappa := \left| \gamma - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} \right|$ je pouhou konstantou
- je-li $\beta_r \neq 0$, zavedeme substituci

$$y_i = w_i, \quad i \in \widehat{r-1}$$

$$y_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} + \beta_r w_r - \frac{\gamma}{2}$$

- ta potom vede k normálnímu tvaru

$$\sum_{i=1}^{r-1} \operatorname{sgn}(\lambda_i) y_i^2 - 2y_r = 0$$

- tím je tato část tvrzení prokázána

- Třetí alternativa: $s_1 + s_2 < r - 1$

- za daných předpokladů platí $\lambda_{s_1+s_2+1} = \lambda_{s_1+s_2+2} = \dots = \lambda_r = 0$
- zavedeme-li znovu substituci $\vec{w} = \mathbb{P}\vec{z} + \vec{t}$, tentokrát však definovanou vztahy

$$w_i = \sqrt{|\lambda_i|} \left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right), \quad i \in \widehat{s_1+s_2}$$

$$w_i = z_i, \quad i = s_1 + s_2 + 1, s_1 + s_2 + 2, \dots, r$$

- kvadrika se pak transformuje do tvaru

$$\sum_{i=1}^{s_1+s_2} \operatorname{sgn}(\lambda_i) w_i^2 - \sum_{i=1}^{s_1+s_2} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} - \sum_{i=s_1+s_2+1}^r 2\beta_i w_i + \gamma = 0$$

- jsou-li všechna $\beta_{s_1+s_2+1}, \beta_{s_1+s_2+2}, \dots, \beta_r$ nulová, je důkaz zřejmý
- pokud tomu tak není, zavedeme substituci

$$y_i = w_i, \quad i \in \widehat{s_1+s_2}$$

$$y_{s_1+s_2+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_1+s_2} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} + \sum_{i=s_1+s_2+1}^r \beta_i w_i - \frac{\gamma}{2}$$

$$y_i = w_i, \quad s_1 + s_2 + 1 < i < r$$

- tato potom vede k normálnímu tvaru

$$\sum_{i=1}^{s_1+s_2} \operatorname{sgn}(\lambda_i) y_i^2 - 2y_{s_1+s_2+1} = 0$$

- tím je důkaz zkompleťován

5.2.13 Poznámka

Zde pouze upozorňujeme, že každá kvadrika může být převedena do takového tvaru, v němž první prvek s_1 vedlejší signatury kvadriky je větší nebo roven druhému prvku s_2 . Této možnosti se v dalším textu přidržíme.

5.2.14 Definice

Rovnici (5.12), resp. (5.13) nazýváme *kanonickým*, resp. *normálním* tvarem kvadriky.

5.2.15 Poznámka

Z věty 5.2.12 a lematu 5.1.21 mimo jiné vyplývá, že dvě kvadriky je možno vzájemně převést regulární transformací pouze tehdy, mají-li tytéž hlavní i vedlejší signatury. Z definice normálního tvaru kvadriky je kromě jiného zřejmé, že existuje pouze nepatrně mnoho těchto normálních tvarů. Vzhledem k platnosti zákona setrvačnosti tak lze každou kvadratickou plochu v dané dimenzi jednoznačně přiřadit k danému normálnímu tvaru. Proto má hlubší význam provést podrobné klasifikace těchto normálních tvarů kvadrik, a to zejména v prostorech $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$.

Podotýkáme, že dvojici signatur $SG(Q)$ a $sg(Q)$ je kvadrika určena jednoznačně. Navíc platí, že zaměníme-li první a druhý člen u obou signatur, typ kvadriky se nemění. Tedy kvadriky se signaturami $SG(Q_1) = (r_1, r_2, r_3)$, $sg(Q_1) = (s_1, s_2, s_3)$ a $SG(Q_2) = (r_2, r_1, r_3)$, $sg(Q_2) = (s_2, s_1, s_3)$ jsou shodného typu. My se zde přidržíme úmluvy 5.2.13, a budeme tedy uvažovat pouze takové normální tvary, pro něž $s_1 \geq s_2$.

5.2.16 Poznámka

Klasifikace kuželoseček

normální tvar	název	$SG(Q)$	$sg(Q)$	regularita	centrálnost
$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	imaginární elipsa	(3, 0, 0)	(2, 0, 0)	reg.	ano
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	elipsa	(2, 1, 0)	(2, 0, 0)	reg.	ano
$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	hyperbola	(2, 1, 0)	(1, 1, 0)	reg.	ano
$x_1^2 - 2x_2 = 0$	parabola	(2, 1, 0)	(1, 0, 1)	reg.	ne
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	imaginární různoběžky	(2, 0, 1)	(2, 0, 0)	sing.	ano
$x_1^2 - x_2^2 = 0$	různoběžky	(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	sing.	ano
$x_1^2 + 1 = 0$	imaginární rovnoběžky	(2, 0, 1)	(1, 0, 1)	sing.	ano
$x_1^2 - 1 = 0$	rovnoběžky	(1, 1, 1)	(1, 0, 1)	sing.	ano
$x_1^2 = 0$	přímka	(1, 0, 2)	(1, 0, 1)	sing.	ano

5.2.17 Příklad

Zkoumejme nyní kvadratickou plochu

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 10 = 0 \quad (5.15)$$

zadanou v prostoru $\mathbf{R}^2$. Nejprve budeme zkoumat příslušnou kvadratickou formu $q(x_1, x_2)$. Jejím doplněním na kvadráty

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 =: y_1^2$$

zjišťujeme, že transformací, jež převod realizuje, je zobrazení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Inverzním zobrazením je pak

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme-li toto zobrazení do rovnice kvadriky, získáme tvar

$$\tilde{Q}(y_1, y_2) = y_1^2 - 4(y_1 - y_2) - 8y_2 + 10 = y_1^2 - 4y_1 - 4y_2 + 10 = 0,$$

který druhým doplněním na kvadráty upravíme do tvaru

$$\tilde{Q}(y_1, y_2) = (y_1 - 2)^2 - 4y_2 + 6 = (y_1 - 2)^2 - 2(2y_2 - 3) = z_1^2 - 2z_2 = 0.$$

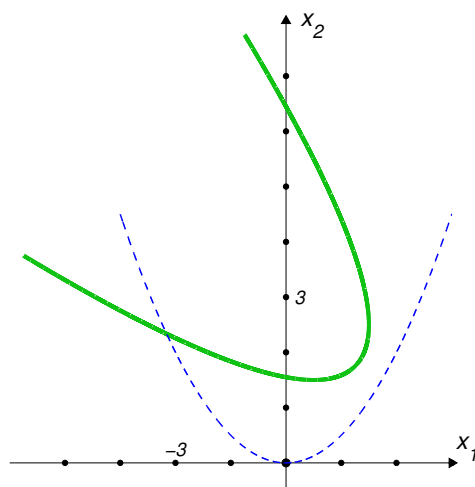
Tvar $\tilde{Q}(z_1, z_2) = z_1^2 - 2z_2 = 0$ je tedy normálním tvarem zadané kvadriky a příslušným zobrazením, jež formu $Q(x_1, x_2)$ na normální tvar převádí, je $z_1 = x_1 + x_2 - 2$, $z_2 = 2x_2 - 3$, resp.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Z normálního tvaru je tedy zřejmé, že zkoumanou kuželosečkou je parabola, jejíž osa není rovnoběžná se souřadnými osami (viz obrázek).

Zkoumanou parabolu je možno vykreslit buď v normálním tvaru, a to užitím parametrické konstrukce $(z_1, z_2) = (t, t^2/2)$, kde $t \in \mathbf{R}$ je parametr, anebo v původním tvaru (5.15) užitím parametrického zápisu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$



Obrázek 5.21

Plnou čarou je vykreslena parabola $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 10 = 0$, zatímco čárkovaně je vyobrazen její normální tvar $\tilde{Q}(z_1, z_2) = z_1^2 - 2z_2 = 0$.

5.2.18 Poznámka

Klasifikace kvadrik v $\mathbb{R}^3$

normální tvar	název	$SG(Q)$	$sg(Q)$	regularita	centrálnost
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	imaginární elipsoid	$(4, 0, 0)$	$(3, 0, 0)$	reg.	ano
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	elipsoid	$(3, 1, 0)$	$(3, 0, 0)$	reg.	ano
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	dvoudílný hyperboloid	$(3, 1, 0)$	$(2, 1, 0)$	reg.	ano
$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$	eliptický paraboloid	$(3, 1, 0)$	$(2, 0, 1)$	reg.	ne
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	jednodílný hyperboloid	$(2, 2, 0)$	$(2, 1, 0)$	reg.	ano
$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$	hyperbolický paraboloid	$(2, 2, 0)$	$(1, 1, 1)$	reg.	ne
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	imaginární kuželová plocha	$(3, 0, 1)$	$(3, 0, 0)$	sing.	ano
$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	imaginární válec	$(3, 0, 1)$	$(2, 0, 1)$	sing.	ano
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	eliptická kuželová plocha	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 0)$	sing.	ano
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	eliptický válec	$(2, 1, 1)$	$(2, 0, 1)$	sing.	ano
$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	hyperbolický válec	$(2, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	sing.	ano
$x_1^2 - 2x_2 = 0$	parabolický válec	$(2, 1, 1)$	$(1, 0, 2)$	sing.	ne
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	imaginární různoběžné roviny	$(2, 0, 2)$	$(2, 0, 1)$	sing.	ano
$x_1^2 + 1 = 0$	imaginární rovnoběžné roviny	$(2, 0, 2)$	$(1, 0, 2)$	sing.	ano
$x_1^2 - x_2^2 = 0$	různoběžné roviny	$(1, 1, 2)$	$(1, 1, 1)$	sing.	ano
$x_1^2 - 1 = 0$	rovnoběžné roviny	$(1, 1, 2)$	$(1, 0, 2)$	sing.	ano
$x_1^2 = 0$	rovina	$(1, 0, 3)$	$(1, 0, 2)$	sing.	ano

5.2.19 Příklad

Nalezněme normální tvar a název kvadratické plochy

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0 \quad (5.16)$$

a transformaci $\vec{x} = \mathbb{M}\vec{z} + \vec{s}$, která ji na normální tvar převádí. Kvadratická forma

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2$$

je formou parabolickou. Pro první transformační vztahy platí

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_2 + x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 &= y_2 - y_3 \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Odtud $\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 2(y_2 - y_3) + 1 = y_1^2 - (y_2 + 1)^2 + 2y_3 + 2 = 0$. Normálním tvarem vyšetřované kvadriky je tedy $\tilde{\tilde{Q}}(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$, čili se jedná o hyperbolický paraboloid. Druhé transformační vztahy jsou

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_2 + 1 \\ z_3 &= -y_3 - 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y_1 &= z_1 \\ y_2 &= z_2 - 1 \\ y_3 &= -z_3 - 1. \end{aligned}$$

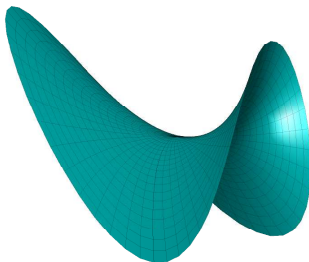
Celkem tedy

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbb{M}\vec{z} + \vec{s}.$$

Hyperbolický paraboloid $z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$ lze vykreslit (např. v prostředí MATLAB) parametrickým vyjádřením

$$z_1 = \varrho \cos(\varphi), \quad z_2 = \varrho \sin(\varphi), \quad z_3 = \frac{\varrho^2}{2}(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) = \frac{\varrho^2}{2} \cos(2\varphi),$$

kde $\varrho \geq 0$ a $\varphi = \langle 0, 2\pi \rangle$ jsou tzv. polární parametry.



Obrázek 5.22

Grafická vizualizace hyperbolického paraboloidu (5.16) v nediagonálním tvaru.

Obrázek výše byl získán užitím parametrických rovnic

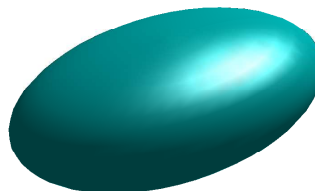
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho \cos(\varphi) \\ \varrho \sin(\varphi) \\ \frac{\varrho^2}{2} \cos(2\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varrho \in \langle 0, 4 \rangle \wedge \varphi = \langle 0, 2\pi \rangle.$$

5.2.20 Poznámka

Zde představíme diagonální tvary a vyobrazení některých kvadrik v $\mathbf{R}^3$. Konstanty a, b, c budeme nazývat *poloosami*.

1. Elipsoid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

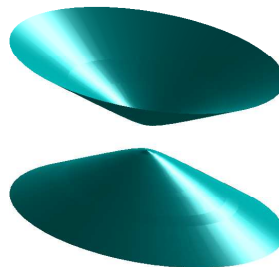


Obrázek 5.23

Všemi třemi základními řezy (rovinami $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$) jsou elipsy.

2. Dvoudílný hyperboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1$$

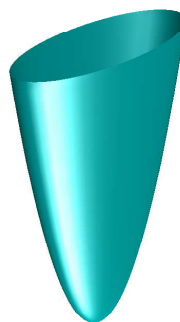


Obrázek 5.24

Základními řezy jsou dvě hyperboly a jedna elipsa. Řez rovinou $x_3 = d \in (-c, c)$ je prázdná množina.

3. Eliptický paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 2\frac{x_3}{c} = 0$$



Obrázek 5.25

Základními řezy jsou dvě paraboly a jedna elipsa.

4. Jednodílný hyperboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

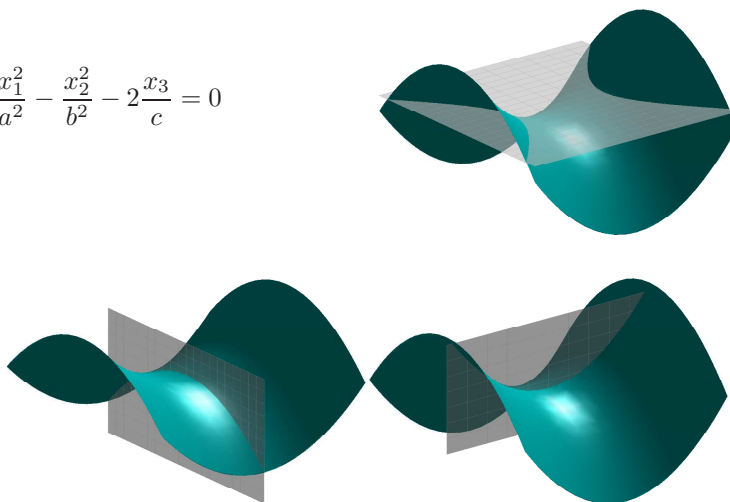


Obrázek 5.26

Základní řezy jsou dvě hyperboly a jedna elipsa.

5. Hyperbolický paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 2\frac{x_3}{c} = 0$$

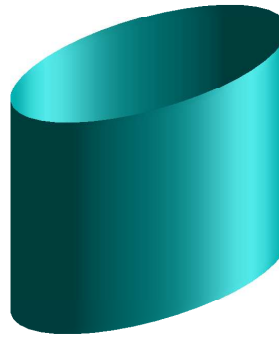


Obrázek 5.27

Základními řezy jsou jedna hyperbola (obrázek nahoře) dvě paraboly (obrázky dole).

6. Eliptický válec

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$



Obrázek 5.28

Vodorovným řezem je elipsa.

7. Hyperbolický válec

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$



Obrázek 5.29

Vodorovným řezem je hyperbola.

8. Parabolický válec

$$\frac{x_1^2}{a^2} - 2\frac{x_2}{b} = 0$$

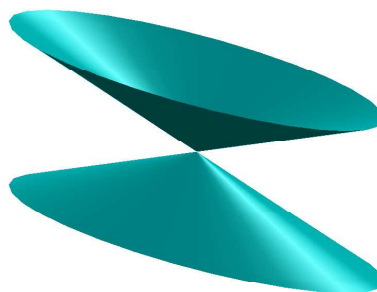


Obrázek 5.30

Vodorovným řezem je parabola.

9. Eliptická kuželová plocha

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$



Obrázek 5.31

Vodorovným řezem je elipsa, popř. bod.

5.2.21 Příklad

V tomto příkladě budeme demonstrovat užitečnost probírané teorie při řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Budeme hledat nelineární formální řešení diferenciální rovnice $y'(y^2 + 4xy - 4x^2) = 2(y^2 - 4xy - 4x^2)$ a stanovíme, jakou křivku v $\mathbf{R}^2$ toto formální řešení představuje a kterými významnými body prochází. Jedná se o homogenní diferenciální rovnici, pro niž zavedeme substituci $y(x) = z(x)x$. Lineární řešení tentokrát hledat nebudeme. Zmíněnou substitucí přejde zadaná rovnice na tvar

$$z'x + z = 2 \frac{z^2 - 4z - 4}{z^2 + 4z - 4}.$$

Po snadné separaci dostáváme

$$\frac{z^2 + 4z - 4}{z^3 + 2z^2 + 4z + 8} z' = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{z^2 + 4z - 4}{(z + 2)(z^2 + 4)} z' = -\frac{1}{x}$$

$$\int \left(\frac{-1}{z+2} + \frac{2z}{4+z^2} \right) dz = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln \left(\frac{4+z^2}{2+z} \right) = -\ln(x) + C$$

$$\frac{4+z^2}{2+z} = \frac{C}{x}.$$

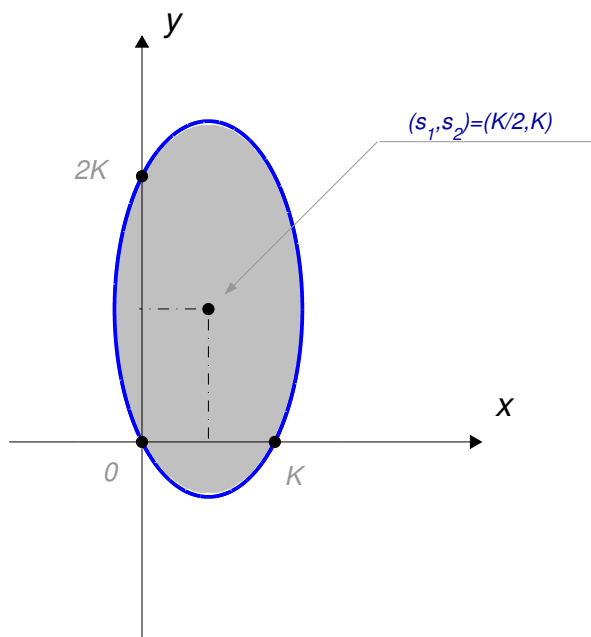
Nyní se navrátíme k původní funkci $y(x)$. Tak získáme rovnost $4x^2 + y^2 = 2Cx + Cy$, kterou po úpravě na čtverce redukuje do tvaru

$$4 \left(x - \frac{C}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{C}{2} \right)^2 = \frac{C^2}{2}.$$

Zde je již patrné, že se bude jednat o elipsu. Označíme-li $K := C/2$, máme

$$\frac{\left(x - \frac{K}{2} \right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}K}{2} \right)^2} + \frac{(y - K)^2}{(\sqrt{2}K)^2} = 1.$$

Detekovaná elipsa má střed v bodě $\vec{s} = (K/2, K)$, velikosti poloos $a = \frac{\sqrt{2}}{2}|K|$, $b = \sqrt{2}|K|$ a pro libovolné $K \neq 0$ prochází počátkem souřadného systému (viz obrázek).



Obrázek 5.32

Graf formálního řešení rovnice $y'(y^2 + 4xy - 4x^2) = 2(y^2 - 4xy - 4x^2)$.

5.2.22 Poznámka

V této poznámce budeme klasifikovat regulární kvadriky v prostoru $\mathbf{R}^4$.

normální tvar	název	$SG(Q)$	$sg(Q)$	centrálnost
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1 = 0$	imaginární eliptikon	$(5, 0, 0)$	$(4, 0, 0)$	ano
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0$	eliptikon	$(4, 1, 0)$	$(4, 0, 0)$	ano
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 1 = 0$	dvoudílný eliptický hyperbolikon	$(4, 1, 0)$	$(3, 1, 0)$	ano
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 1 = 0$	jednodílný eliptický hyperbolikon	$(3, 2, 0)$	$(3, 1, 0)$	ano
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 1 = 0$	hyperbolický hyperbolikon	$(3, 2, 0)$	$(2, 2, 0)$	ano
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4 = 0$	eliptický parabolikon	$(4, 1, 0)$	$(3, 0, 1)$	ne
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_4 = 0$	hyperbolický parabolikon	$(3, 2, 0)$	$(2, 1, 1)$	ne

5.3 Cvičení

Cvičení 5.1

Sestavte vektorové spektrum q -formy

$$(x, y, z, w) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

a na jeho základě stanovte typ definitnosti zadané formy. Vysvětlete.

Cvičení 5.2

Lagrangeovým algoritmem určete normální tvar a polární bázi kvadratické formy $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$.

Cvičení 5.3

Pro kvadratickou formu ze cvičení 5.2 určete polární bázi přímou metodou.

Cvičení 5.4

Nalezněte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro něž je uvedená kvadratická forma a) pozitivně, b) negativně definitní.

$$q(\vec{x}) = (1+a)x_1^2 + (4a+1)x_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2(1-2a)x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Cvičení 5.5

Pro kvadratickou formu $q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ stanovte signaturu, typ, regularitu, normální tvar, polární bázi a transformaci $\vec{x} = \mathbb{M}\vec{y}$, která danou kvadratickou formu převádí na normální tvar.

Cvičení 5.6

Rozhodněte, zda může vektor $\vec{u} = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)^\top$ být součástí polární báze kvadratické formy ze cvičení 5.5. Pokud ano, zkompletujte ji.

Cvičení 5.7

Pro která $\lambda \in \mathbf{R}$ je kvadratická forma $q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ pozitivně definitní v $\mathbf{R}^3$?

Cvičení 5.8

Nalezněte regulární lineární transformaci, která převádí kvadratickou formu

$$q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

na kvadratickou formu

$$r(\vec{y}) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

Cvičení 5.9

Nalezněte polární bázi kvadratické formy $q(\vec{x})$ ze cvičení 5.8.

Cvičení 5.10

Nalezněte normální tvar kvadratické plochy

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2 + x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 - \frac{1}{2} = 0$$

a transformaci $\vec{x} = \mathbb{M}\vec{z} + \vec{s}$, která ji na normální tvar převádí.

Cvičení 5.11

Nalezněte normální tvar a typ kuželoščky $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + 20x_2 + 20 = 0$.

Cvičení 5.12

Nalezněte střed kuželoščky $25x_1^2 - 14x_1x_2 + 25x_2^2 + 64x_1 - 64x_2 - 224 = 0$.

Cvičení 5.13

Určete typ a normální tvar následujících kvadrik:

- a) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0$
- b) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$
- c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 29 = 0$
- d) $2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2 - 3 = 0$
- e) $2x_1^2 + 31x_2^2 - 2x_3^2 + 16x_1x_2 - 4x_1x_3 - 20x_2x_3 = 16$
- f) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1 = 2$
- g) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 + 4x_1 + 8x_2 = 1$
- h) $2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_2 + 2x_3 = 1$
- i) $4x_1^2 + 17x_2^2 + 30x_3^2 - 16x_1x_2 - 8x_1x_3 + 26x_2x_3 + 4x_2 + 20x_3 + 4 = 0$
- j) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 + 2x_2 = 1$
- k) $2x_1^2 + 19x_2^2 + 2x_3^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 20x_2x_3 - 4x_2 - 16x_3 - 12 = 0$
- l) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.

Cvičení 5.14

Rozhodněte, zda je kvadrika $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 - 86x_1 - 88x_2 + 32x_3 + 161 = 0$ regulární.

Cvičení 5.15

Zapište normální tvar kvadriky, mající hlavní signaturu $(3, 1, 0)$ a vedlejší $(2, 1, 0)$. Stanovte její název.

Cvičení 5.16

Pomocí metody řezů načrtněte všechny kvadriky v $\mathbf{R}^3$.

Cvičení 5.17

Nalezněte všechny polární báze kvadratické formy

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 11x_3^2 + 2x_4^2 + 6x_5^2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_5 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 + 2x_3x_5,$$

obsahující vektory $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$, $\vec{u}_3 = (-3, -1, 1, 0, 0)^T$ a $\vec{u}_4 = (0, 1, 0, 1, 0)^T$. Na základě znalosti jedné takové báze stanovte transformační vztahy $\vec{x} = \mathbb{M}\vec{y}$, které danou kvadratickou formu převádějí na normální tvar, a tento zapište. Jaká je signatura uvedené formy?

Cvičení 5.18

Kvadrika s absolutním členem $c = -3$ je zadána pomocí matice své rozšířené kvadratické formy

$$\mathbb{A}_{(ex)} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 13 & -12 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 13 & 5 & 24 & -7 \\ -12 & -2 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Stanovte její normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu. Dále rozhodněte, je-li zadaná kvadrika centrální a regulární. Nalezněte polární bázi $\mathcal{B}_P$ v prostoru $\mathbf{R}^3$, která je generována příslušnou kvadratickou formou.

Cvičení 5.19

Nalezněte všechny hodnoty parametru $\lambda \in \mathbf{R}$, pro něž je kvadratická forma $x^2 + (\lambda^2 + 1)y^2 + (6\lambda - 5)z^2 + 2\lambda xy - 4xz - 2\lambda yz$ pozitivně semidefinitní.

Cvičení 5.20

Pro kvadratickou formu $q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$ určete signaturu, typ, normální tvar a polární bázi obsahující vektor $(-1, 0, 0)^T$, pokud existuje.

Cvičení 5.21

V prostoru $\mathbf{R}^3$ sestrojte polární bázi $\mathcal{B}_P$ generovanou kvadratickou formou $q(\vec{x}) = 9x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$, splňující následující požadavky:

- $(-1, 2, 1) \in \mathcal{B}_P$
- $\exists \vec{u} \in \mathcal{B}_P : \langle \vec{u} | (1, 0, 0) \rangle_s = 0$.

Na základě znalosti polární báze sestavte transformační vztahy $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$, které zadanou kvadratickou formu převádějí na její normální tvar. Tuto transformaci proveďte.

Cvičení 5.22

Nalezněte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro něž je zadaná kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = (1 - a)x_1^2 - 4x_2^2 + (a^2 - 6a + 5)x_3^2 - 4x_1x_2 + 2(a - 1)x_1x_3 + 4x_2x_3$$

negativně definitní.

Cvičení 5.23

Nechť je kvadrika zadána pomocí matice své rozšířené kvadratické formy

$$\mathbb{A}_{(ex)} = \begin{pmatrix} 60 & 16 & -8 & 8 \\ 16 & 4 & -2 & 2 \\ -8 & -2 & -3 & -13 \\ 8 & 2 & -13 & -35 \end{pmatrix}.$$

Stanovte její normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu. Dále rozhodněte, je-li zadaná kvadrika centrální a regulární. Nalezněte polární bázi $\mathcal{B}_P$ v prostoru $\mathbf{R}^3$, která je generována příslušnou kvadratickou formou.

Cvičení 5.24

Zapište normální tvar kvadriky, mající hlavní signaturu $(2, 1, 1)$ a vedlejší $(2, 1, 0)$. Uveďte její název.

Cvičení 5.25

Nechť je v množině $\mathbf{R}^4$ dána kvadratická forma $q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 18x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4$. Určete její typ, normální tvar, signaturu a typ definitnosti.

Cvičení 5.26

Nalezněte polární bázi kvadratické formy

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_1x_4 + 18x_2x_3 - 6x_2x_4 - 2x_3x_4,$$

obsahující vektory $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\vec{u}_2 = (-2, 1, 0, 0)^T$ a $\vec{u}_3 = (-9, 3, 1, 0)^T$. Na základě znalosti takové báze stanovte transformační vztahy $\vec{x} = M\vec{y}$, které danou kvadratickou formu převádějí na normální tvar a tento zapište. Jaká je signatura uvedené formy?

Cvičení 5.27

Kterou z následujících kvadratických forem

- a) $y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + 2y_2y_3$,
- b) $y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3$,
- c) $-4y_1^2 + 8y_2^2 + 3y_3^2$

lze převést regulární lineární transformací na kvadratickou formu $q(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 16x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 12x_2x_3$?

Cvičení 5.28

Pro která $a \in \mathbf{R}$ je kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + (4-2a-a^2)x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

pozitivně definitní v $\mathbf{R}^3$?

Cvičení 5.29

Dokažte, že otočení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o úhel φ kolem osy x_3 je ortonormálním zobrazením ve třídímním prostoru $\mathbf{R}^3$.

Cvičení 5.30

Rozhodněte o platnosti následující věty: Nechť je dána kvadratická forma $q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ s nenulovou maticí $\mathbb{A}$. Nechť Δ_i ($i \in \hat{r}$) jsou hlavní minory matice $\mathbb{A}$. Pak $q(\vec{x})$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když $\forall i \in \hat{r} : \Delta_i \geq 0$ a současně $\exists i \in \hat{r} : \Delta_i = 0$.

Cvičení 5.31

Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru β , pro které lze kvadratickou plochu

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 18x_3^2 + \beta^2 x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 6x_2x_4 + (2\beta - 16)x_3x_4 = 1$$

převést regulární transformací na plochu $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$.

Cvičení 5.32

V závislosti na hodnotě reálného parametru μ rozhodněte, jaký útvar vymezuje rovnice

$$x^2 + 4x + 17z^2 - 2y + 6xz + 6z(3 - \mu) + 2y^2 - 2xy = 9\mu^2 + \mu - 5.$$

Cvičení 5.33

V závislosti na hodnotě reálného parametru μ rozhodněte o typu definitnosti kvadratické formy

$$-x_1^2 - (\mu^2 + 6\mu)x_2^2 - \mu^2x_3^2 - 2\mu x_1x_2 - 8x_1x_3 - 20\mu x_2x_3.$$

Cvičení 5.34

Pro kvadratickou plochu

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 24x_2^2 - 5x_3^2 + 10x_1x_2 - 4x_1x_3 - 14x_2x_3 + 4x_1 + 26x_2 - 24x_3 - 3 = 0$$

stanovte normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu. Dále rozhodněte, je-li zadaná kvadrika centrální a regulární. Zdůvodněte! Nalezněte polární bázi v prostoru $\mathbf{R}^3$, která je generována příslušnou kvadratickou formou.

Cvičení 5.35

Pro kvadratickou plochu $x^2 + 8xy + 8xz + 4y^2 + 2yz + 4z^2 + ax + by + cz = 1$ nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbf{R}$ tak, aby bod $(2, -4, 6)^\top$ byl jejím středem.

Cvičení 5.36

Nalezněte poslední vektor $\vec{\lambda} = (x_\lambda, y_\lambda, u_\lambda, v_\lambda)^\top$, jež společně s vektory $(2, 1, -1, 2)^\top$, $(3, 1, 0, 2)^\top$ a $(-1, 0, 0, -1)^\top$ zadává polární bázi kvadratické formy

$$-2u^2 + 2uv + 5v^2 - 6vx + 2x^2 - 8uy - 4vy + 2xy - y^2.$$

Jaká je signatura zadané formy? Neopomeňte diskutovat řešitelnost úlohy.

Cvičení 5.37

Nalezněte všechny hodnoty parametru β , pro něž má kvadratická plocha

$$4x^2 + 4xy + \beta xz + 5y^2 - 10yz + 11z^2 - 4x + 2y + 2z = 7$$

střed v bodě $(2, 0, 1)^\top$.

Cvičení 5.38

Nalezněte transformační vztahy $x = x(r, s)$ a $y = y(r, s)$, které kvadratickou formu $q(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$ převádějí na kanonický tvar.

Cvičení 5.39

Nalezněte všechny hodnoty parametru ℓ , pro něž lze kvadratickou formu

$$q_1(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 8x_1x_3 + 38x_2x_3 - 33x_3^2$$

převést na formu

$$q_2(\vec{y}) = y_1^2 - 8y_1y_2 + 15y_2^2 + 6y_1y_3 - 24y_2y_3 + 4\ell y_2y_3 + (8 - \ell - 4\ell^2)y_3^2.$$

Zapište rovnice tohoto převodu.

Cvičení 5.40

Nalezněte regulární lineární transformaci, jež převádí kvadratickou formu

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 15x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$$

převést na formu

$$q(\vec{y}) = y_1^2 + 4y_1y_2 + 3y_2^2 + 6y_1y_3 + 14y_2y_3 + 8y_3^2 - 2y_1y_4 - 6y_2y_4 - 4y_3y_4.$$

Cvičení 5.41

Nalezněte všechny hodnoty parametru ℓ , pro něž je kvadratická forma

$$q(\vec{y}) = y_1^2 - 8y_1y_2 + 17y_2^2 + 6y_1y_3 - 26y_2y_3 + 11y_3^2 + 2y_1y_4 - 8y_2y_4 - 4\ell y_2y_4 + 6y_3y_4 + 4\ell y_3y_4 + (2 + \ell + 4\ell^2)y_4^2$$

pozitivně semidefinitní.

Cvičení 5.42

Nalezněte polární bázi kvadratické formy $x^2 - 4y^2 + 7z^2 + 12xy - 6xz - 18yz$ takovou, že obsahuje vektor $\vec{u} = (7, 1, 4)^\top$ a jiný její vektor je kolmý (v obvyklém smyslu) k vektoru $(0, 1, 0)^\top$. Na základě znalosti hledané báze sestavte transformační vztahy a zapište normální tvar, na něž tyto vztahy zadanou formu převádějí.

Cvičení 5.43

Pro která $\mu \in \mathbf{R}$ je kvadratická forma

$$\vec{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

pozitivně definitní?

Kapitola 6

Metrické, normované a Hilbertovy prostory

V předposlední kapitole těchto skript se seznámíme se základními stavebními kameny budování metrických prostorů. Zavedeme obecně pojaté pojmy skalárního součinu, normy ve vektorovém prostoru a nakonec také metriky. Tyto tři pojmy umožní nahlédnout mnohem obecněji na pojem okolí bodu, a tudíž i na vlastnosti odvozené, jako například otevřenost či uzavřenost množiny. Abstraktnější pojetí vzdálenosti v metrických prostorech pak také povede k abstraktnější definici konvergence posloupností. V závěrečném oddíle pak probereme teorii ortogonálních polynomů.

6.1 Výchozí nerovnosti

V prvním oddíle shrneme základní nerovnosti, jejichž platnost mnohokrát využijeme při zavádění základních pojmů této kapitoly.

6.1.1 Úmluva

V celé kapitole budeme pod symbolem q rozumět reálné číslo takové, že $q \neq 0$ a $q \neq 1$. Symbol $\tilde{q}$ pak bude reprezentovat číslo dané rovností

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1. \quad (6.1)$$

6.1.2 Lemma

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_r$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí $(\sum_{i=1}^r a_i)^2 \leq r \sum_{i=1}^r a_i^2$.

6.1.3 Věta

Nechť $a \geq 0$, $b \geq 0$ a $q > 1$. Potom platí

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\tilde{q}}}{\tilde{q}}. \quad (6.2)$$

Přitom rovnost nastává právě tehdy, když $a^q = b^{\tilde{q}}$.

Důkaz:

- pro $b = 0$ nebo $a = 0$ je platnost tvrzení zřejmá
- uvažme tedy $a > 0$ a $b > 0$
- pro pevně zvolené $b > 0$ budeme vyšetřovat funkci

$$\varphi(a) = \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\tilde{q}}}{\tilde{q}} - ab$$

- tato funkce je spojitá na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ a v množině $(0, \infty)$ má derivaci $\frac{d\varphi}{da} = a^{q-1} - b$

- uvažovaná funkce je tedy ostře klesající na intervalu $\langle 0, b^{\frac{1}{q-1}} \rangle$ a ostře rostoucí na intervalu $\langle b^{\frac{1}{q-1}}, \infty \rangle$
- minimum funkce $\varphi(a)$ tedy nastává v bodě $a = b^{\frac{1}{q-1}}$, tj. pro taková a, b , pro něž $a^q = b^{\tilde{q}}$
- hodnotou nalezeného minima je

$$\min_{a \in \mathbf{R}_0^+} \varphi(a) = \frac{a^q}{q} + \frac{a^q}{\tilde{q}} - a \cdot a^{q-1} = a^q \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} - 1 \right) = 0$$

- tedy pro všechny ostatní hodnoty je $\varphi(a) > 0$, to jest platí vztah (6.2)

6.1.4 Lemma

Nechť $a > 0$, $b > 0$. Nechť dále $q < 1$ a $q \neq 0$. Potom platí

$$ab \geq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\tilde{q}}}{\tilde{q}}. \quad (6.3)$$

Přitom rovnost nastává právě tehdy, když $a^q = b^{\tilde{q}}$.

6.1.5 Věta – Hölderova nerovnost

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_r$ a $b_1, b_2, \dots, b_r$ jsou nezáporná reálná čísla. Nechť dále $q > 1$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^r a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r b_k^{\tilde{q}} \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}. \quad (6.4)$$

Důkaz:

- pro $\vec{a} = \vec{0}$ nebo $\vec{b} = \vec{0}$ je platnost tvrzení zřejmá
- nenastane-li tento případ, položíme pro $k \in \widehat{r}$

$$A_k := \frac{a_k}{\left(\sum_{\ell=1}^r a_\ell^q \right)^{\frac{1}{q}}}, \quad B_k := \frac{b_k}{\left(\sum_{\ell=1}^r b_\ell^{\tilde{q}} \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}} \quad (6.5)$$

- potom platí

$$A_1^q + A_2^q + \dots + A_r^q = B_1^{\tilde{q}} + B_2^{\tilde{q}} + \dots + B_r^{\tilde{q}} = 1 \quad (6.6)$$

- z věty 6.1.3 plyne

$$A_k B_k \leq \frac{1}{q} A_k^q + \frac{1}{\tilde{q}} B_k^{\tilde{q}}$$

- odtud sečtením a užitím vztahu (6.6)

$$\sum_{k=1}^r A_k B_k \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$$

- zpětným dosazením za A_k a B_k ze vztahu (6.5) potom dostáváme nerovnost (6.4), jež byla dokázat

6.1.6 Lemma – Hölderova nerovnost č. 2

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_r$ a $b_1, b_2, \dots, b_r$ jsou kladná reálná čísla. Nechť dále $q < 1$ a $q \neq 0$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^r a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r b_k^{\tilde{q}} \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}. \quad (6.7)$$

Důkaz:

6.1.7 Věta – Minkovského nerovnost

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_r$ a $b_1, b_2, \dots, b_r$ jsou nezáporná reálná čísla. Nechť dále $q \geq 1$. Pak platí

$$\left(\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^r b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (6.8)$$

Důkaz:

- pro $q = 1$ je platnost tvrzení zřejmá
- pro $q > 1$ uijeme rozpisu

$$\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q = \sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^{q-1} a_k + \sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^{q-1} b_k \quad (6.9)$$

- označme $c_k = (a_k + b_k)^{q-1} = (a_k + b_k)^{\frac{q}{q-1}}$
- z Hölderovy rovnosti (6.4) pak dostáváme

$$\sum_{k=1}^r a_k c_k \leq \left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r c_k^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

- podobně

$$\sum_{k=1}^r b_k c_k \leq \left(\sum_{k=1}^r b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r c_k^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^r b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

- z rovnosti (6.9) pak plyne

$$\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q = \sum_{k=1}^r c_k a_k + \sum_{k=1}^r c_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^r b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)$$

- odtud

$$\left(\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^r b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

- jelikož ale stále platí vztah (6.1), a tedy $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q}$, plyne odsud dokazované tvrzení

6.1.8 Lemma – Minkovského nerovnost č.2

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_r$ a $b_1, b_2, \dots, b_r$ jsou kladná reálná čísla. Nechť dále $q < 1$ a $q \neq 0$. Pak platí

$$\left(\sum_{k=1}^r (a_k + b_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{k=1}^r a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^r b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (6.10)$$

6.1.9 Poznámka

Věty 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7 a 6.1.8 lze zobecnit také pro komplexní čísla. Např. pro $q > 1$ a libovolná $\vec{a} \in \mathbb{C}^r$ a $\vec{b} \in \mathbb{C}^r$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^r a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^r |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r |b_k|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (6.11)$$

$$\left(\sum_{k=1}^r |a_k + b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^r (|a_k| + |b_k|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^r |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (6.12)$$

6.1.10 Věta – Bunjakovského nerovnost

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_r$ a $b_1, b_2, \dots, b_r$ jsou libovolná komplexní čísla. Pak platí

$$\left| \sum_{k=1}^r a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^r |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^r |b_k|^2. \quad (6.13)$$

Důkaz:

- tvrzení vyplývá z nerovnosti (6.11) po dosazení $q = 2$

6.2 Pre-Hilbertovy prostory

V této části kapitoly zavedeme obecný pojem skalárního součinu. Zobecníme tedy skalární součin vektorů $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ a $\vec{y} \in \mathbf{R}^r$ zavedený na střední škole vztahem $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^r x_i y_i$.

6.2.1 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže splňuje tzv. *axiomy skalárního součinu*:

- *levá linearita*: pro všechna $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$ a každé $\alpha \in \mathbf{C}$ platí $\langle \alpha \vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$
- *hermiticita*: pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ platí $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle^*$
- *pozitivní definitnost*: pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$ a navíc $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{0}$.

Dvojici $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ nazýváme *prehilbertovským prostorem*.

6.2.2 Lemma

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ skalárním součinem. Pak pro všechna $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbf{C}$ platí rovnosti $\langle \vec{0} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{0} \rangle = 0$, $\langle \vec{x} | \alpha \vec{y} + \vec{z} \rangle = \alpha^* \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$.

6.2.3 Věta – Schwarzova-Cauchyova-Bunjakovského nerovnost

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalární součin na $\mathcal{V}$. Pak pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ platí nerovnost

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}. \quad (6.14)$$

Důkaz:

- triviálně ověříme, že pro $\vec{x} = \vec{0}$ platí v Schwarzově-Cauchyově-Bunjakovského vztahu znaménko rovnosti
- podobně tomu bude, pokud je vektor $\vec{y}$ lineární kombinací vektoru $\vec{x}$, tj. když existuje $\lambda \in \mathbf{C}$ takové, že $\vec{y} = \lambda \vec{x}$
- pak totiž $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| = |\langle \vec{x} | \lambda \vec{x} \rangle| = |\lambda^*| |\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle| = |\lambda| |\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle|$
- a také

$$\sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \langle \lambda \vec{x} | \lambda \vec{x} \rangle} = \sqrt{\lambda \lambda^* \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle^2} = |\lambda| |\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle|$$

- zbývá tedy zkoumat případ lineárně nezávislých nenulových vektorů, kdy tedy pro všechna nenulová $\lambda \in \mathbf{C}$ platí nerovnost $\lambda \vec{x} - \vec{y} \neq \vec{0}$
- v tomto případě tedy z axiomu pozitivní definitnosti vyplývá, že $\langle \lambda \vec{x} - \vec{y} | \lambda \vec{x} - \vec{y} \rangle > 0$
- budeme nyní upravovat levou stranu této nerovnosti, čímž získáme vztah

$$|\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle - \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle - \lambda^* \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle > 0 \quad (6.15)$$

- uvedený vztah platí pro všechna λ , my však zvolíme jedno speciálně vybrané, a sice

$$\lambda = \frac{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$$

- tyto dvě hodnoty dosadíme do vztahu (6.15) a získáme

$$\frac{|\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle|^2}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} - \frac{|\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle|^2}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} - \frac{|\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle|^2}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle > 0$$

- odkud již plyne nerovnost

$$-\frac{|\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle|^2}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle > 0,$$

- tím je nerovnost (6.14) dokázána

6.2.4 Poznámka

Vztah (6.14) je spojován se jmény tří matematiků: jsou jimi francouz Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), rus Viktor Jakovlevič Bunjakovskij (1804 – 1889) a němec Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921). Zatímco Cauchy odvodil roku 1821 nerovnost

$$\left| \sum_{\ell=1}^n x_{\ell} y_{\ell}^* \right| \leq \sqrt{\sum_{\ell=1}^n |x_{\ell}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\ell=1}^n |y_{\ell}|^2},$$

která je rovností (6.14) na konkrétním Hilbertově prostoru, Bunjakovskij dokázal v roce 1859 integrální variantu této nerovnosti. Nezávisle na něm k téže nerovnosti dospěl roku 1875 také Schwarz, který ji pak v roce 1885 dále zobecnil pro případ vícerozměrných integrálů.

6.2.5 Poznámka

Pokusme se rozřešit otázku, za jakých předpokladů zadává hermitovská forma (viz také definice (5.1.5))

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{y}^* = (x_1, x_2, \dots, x_r) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_r^* \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

skalární součin v $\mathbf{C}^r$. Axiom levé linearitě je splněn triviálně. Splnění axiomu hermiticity je zaručeno tím, že v definičním vztahu (6.16) je druhý vektor zpracováván v komplexně sdružené podobě a matice $\mathbb{A}$ je hermitovská. Aby ale byl splněn požadavek pozitivní definitnosti, musí být přidružená kvadratická forma $q(\vec{x}, \vec{x})$ pozitivně definitní. Jako důsledek tedy: Každá bilineární forma $qq(\vec{x}, \vec{y})$ v $\mathbf{R}^r$, jejíž příslušná kvadratická forma $q(\vec{x})$ je pozitivně definitní, zadává na $\mathbf{R}^r$ skalární součin, tzv. $\mathbb{A}$ –skalární součin

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_{\mathbb{A}} := qq(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{y}. \quad (6.17)$$

Standardní skalární součin

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^r x_i y_i = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x}^T \mathbb{I} \vec{y} \quad (6.18)$$

je tedy speciálním případem obecného součinu (6.17). Budeme ho nadále značit symbolem $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_s$.

6.2.6 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ skalární součin. Řekneme, že vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ jsou *ortogonální* a označíme $\vec{x} \perp \vec{y}$, platí-li pro ně rovnost $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$. Řekneme, že množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r\}$ je *ortogonální* ve $\mathcal{V}$, platí-li implikace $i \neq j \Rightarrow \vec{x}_i \perp \vec{x}_j$.

6.2.7 Poznámka

Je-li $\mathbb{A}$ –skalární součin zaveden maticovým vztahem (6.17), splývá pojem ortogonality z definice 6.2.6 s pojmem q –ortogonality z definice 5.1.32.

6.2.8 Definice

Nechť je dán prehilbertovský prostor $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a dva nenulové vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. Úhlem vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ budeme rozumět číslo

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) := \arccos \left(\frac{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|}{\sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}} \right). \quad (6.19)$$

6.2.9 Poznámka

Ve vzorci (6.19) musí být absolutní hodnota, protože skalární součin je obecně definován jako komplexní číslo, které z pochopitelných důvodů (neboť nelze vypočítat např. $\arccos(2 + 3i)$) nemůže být dosazeno do vzorce bez absolutní hodnoty.

6.2.10 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ se skalárním součinem. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ jsou libovolné dva nenulové vektory. Pak $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když platí rovnost $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|^2 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle$.

Důkaz:

- dokážeme nejprve první část tvrzení
- nechť tedy existuje $\lambda \in \mathbf{R}$ takové, že $\vec{y} = \lambda \vec{x}$
- pak pro levou stranu dokazované rovnosti platí $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|^2 = |\langle \vec{x} | \lambda \vec{x} \rangle|^2 = |\lambda^* \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle|^2 = |\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle^2$
- pro pravou stranu dokazované rovnosti platí $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \cdot \langle \lambda \vec{x} | \lambda \vec{x} \rangle = \lambda \lambda^* \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle^2 = |\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle^2$
- dokážeme nyní druhou část tvrzení
- nechť tedy $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně nezávislé, odkud ihned plyne, že $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ a také $\langle \vec{y} - \lambda \vec{x} | \vec{y} - \lambda \vec{x} \rangle > 0$ pro jakékoli $\lambda \in \mathbf{C}$
- uvažme sérii rovností

$$\langle \vec{y} - \lambda \vec{x} | \vec{y} - \lambda \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} | -\lambda \vec{x} \rangle + \langle -\lambda \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle -\lambda \vec{x} | -\lambda \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle - \lambda^* \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle - \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + |\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle$$

- protože $\langle \vec{y} - \lambda \vec{x} | \vec{y} - \lambda \vec{x} \rangle > 0$ pro jakékoli $\lambda \in \mathbf{C}$, musí také $\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle - \lambda^* \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle - \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + |\lambda|^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle > 0$
- zvolíme-li $\lambda = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle / \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle$, a dosadíme-li tuto hodnotu do předešlé ostré nerovnosti, dostáváme

$$0 < \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle - \lambda^* \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle - \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \lambda^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle - \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \frac{|\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle|^2}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle},$$

odkud (po elementární úpravě využívající hermiticitu skalárního součinu) plyne, že $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|^2 < \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle$

6.2.11 Věta – o funkcionálním skalárním součinu s vahou

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Nechť $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ je vektorový prostor všech funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{R}$. Nechť je dána funkce $w(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ kladná na $\langle a, b \rangle$. Pak formule

$$\langle f(x) | g(x) \rangle_w := \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx \quad (6.20)$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$.

Důkaz:

- nejprve je třeba prokázat, že výraz (6.20) vrací reálnou hodnotu pro libovolné dvě funkce $f(x), g(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$
- integrand $f(x)g(x)w(x)$ je ale spojitou funkcí na $\langle a, b \rangle$ a integrační množinou je kompaktní interval, a z integračního počtu tudíž plyne, že příslušný integrál je vždy konvergentní

- zvolme libovolně $f(x), g(x), h(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ a $\alpha \in \mathbf{R}$

- snadno

$$\langle \alpha f(x) | g(x) \rangle = \int_a^b \alpha f(x)g(x)w(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x)g(x)w(x) \, dx = \alpha \langle f(x) | g(x) \rangle,$$

$$\langle f(x) + h(x) | g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x) \, dx + \int_a^b h(x)g(x)w(x) \, dx = \langle f(x) | g(x) \rangle + \langle h(x) | g(x) \rangle$$

- ověření hermiticity (zde symetrie) je také snadné:

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x) \, dx = \int_a^b g(x)f(x)w(x) \, dx = \langle g(x) | f(x) \rangle$$

- zbývá dokázat pozitivní definitnost

- splnění nerovnosti

$$\langle f(x) | f(x) \rangle = \int_a^b f^2(x)w(x) \, dx \geq 0$$

je zaručeno triviálně, k čemuž také dopomáhá volba váhy $w(x)$, která je z předpokladů kladná

- ekvivalence

$$\langle f(x) | f(x) \rangle = \int_a^b f^2(x)w(x) \, dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

je důsledkem skutečnosti, že funkce $f^2(x)w(x)$ je jednak spojitá a také nezáporná

- integrál z takové funkce může být nulový pouze tehdy, je-li tato funkce ryze nulová

6.2.12 Věta

Nechť $a \in \mathbf{R}$. Nechť $\mathcal{C}_0(\langle a, +\infty \rangle)$ je vektorový prostor všech funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ spojitých a omezených na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{R}$. Nechť je dále dána kladná reálná funkce $w(x) \in \mathcal{C}(\langle a, +\infty \rangle)$, která je na $\langle a, +\infty \rangle$ integrabilní. Pak formule

$$\langle f(x) | g(x) \rangle_w := \int_a^\infty f(x)g(x)w(x) \, dx \quad (6.21)$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathcal{C}_0(\langle a, b \rangle)$.

Důkaz:

- nejprve je třeba prokázat, že výraz (6.21) vrací reálnou hodnotu pro libovolné dvě funkce $f(x), g(x) \in \mathcal{C}_0(\langle a, +\infty \rangle)$
- k tomu užijeme srovnávací kritérium pro integrál
- absolutní hodnota integrandu $|f(x)g(x)w(x)|$ je totiž majorizovaná funkcí $KLw(x)$, která je ale z předpokladů dokazované věty integrabilní
- ze srovnávacího kritéria pak plyne, že $f(x)g(x)w(x)$ je také na $\langle a, +\infty \rangle$ integrabilní
- existence čísel K, L plyne z omezenosti funkcí $f(x)$, resp. $g(x)$, kdy např. $|f(x)| < K$ pro všechna $x \in \langle a, +\infty \rangle$
- naplnění axiomů skalárního součinu lze pak prokázat analogicky k důkazu předchozí věty

6.2.13 Lemma

Nechť $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ je vektorový prostor všech funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ spojitých a omezených na $\mathbf{R}$ zavedený nad tělesem $\mathbf{R}$. Nechť je dále dána kladná reálná funkce $w(x) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, která je na $\mathbf{R}$ integrabilní. Pak formule

$$\langle f(x) | g(x) \rangle_w := \int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)w(x) \, dx \quad (6.22)$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$.

6.2.14 Definice

Funkce $w(x)$ z předešlých tvrzení nazýváme *váhou skalárního součinu* a vybrané reprezentanty nazýváme následovně:

- *standardní (Legendreova) váha*: pro volbu $w(x) = 1$ na $\langle a, b \rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$,
- *Laguerreova váha*: pro volbu $w(x) = e^{-x}$ a $C_0(\langle 0, \infty \rangle)$,
- *Hermiteova váha*: pro volbu $w(x) = e^{-x^2}$ a $C_0(\mathbf{R})$,
- *Čebyševova váha*: pro volbu $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $C(\langle -1, 1 \rangle)$.

6.2.15 Poznámka

Věty 6.2.11, 6.2.12, lemma 6.2.13 a definice 6.2.14 mohou být pochopitelně reformulovány také pro případ prostorů vícedimenzionálních spojitých (popř. omezených) funkcí.

6.3 Skalární součin na prostorech komplexních funkcí reálné proměnné

Pro navazující partie matematické analýzy je extrémně výhodné převést předešlé poznatky do řeči komplexních funkcí reálné proměnné. Nad tímto úkolem se zamyslíme v tomto oddíle.

6.3.1 Definice

Řekneme, že funkce $f(x)$ je *komplexní funkcí reálné proměnné*, pokud $\text{Dom}(f) \subset \mathbf{R}$ a $\text{Ran}(f) \subset \mathbf{C}$.

6.3.2 Poznámka

Symbol $\mathcal{R}(M)$ bude reprezentovat množinu všech reálných funkcí $g(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, pro něž existuje Riemannův integrál $(\mathcal{R}) \int_M g(x) dx$ a je konečný, tj. pro $M \subset \mathbf{R}$

$$\mathcal{R}(M) = \{g(x) : M \mapsto \mathbf{R} : (\mathcal{R}) \int_M g(x) dx \in \mathbf{R}\}.$$

6.3.3 Definice

Nechť $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné a $M \subset \mathbf{R}$. Nechť $\text{Re}(f(x)), \text{Im}(f(x)) \in \mathcal{R}(M)$. Pak definujeme

$$\int_M f(x) dx := (\mathcal{R}) \int_M \text{Re}(f(x)) dx + i (\mathcal{R}) \int_M \text{Im}(f(x)) dx.$$

6.3.4 Lemma

Nechť $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné a $M \subset \mathbf{R}$. Nechť $\text{Re}(f(x)), \text{Im}(f(x)) \in \mathcal{R}(M)$. Pak

$$\int_M f^*(x) dx = \left[\int_M f(x) dx \right]^*.$$

6.3.5 Věta – o funkcionálním skalárním součinu

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a

$$\mathcal{V} = \left\{ f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C} : \text{Re}(f(x)), \text{Im}(f(x)) \in C(\langle a, b \rangle) \right\}$$

je funkcionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení

$$\langle f | g \rangle := \int_a^b f(x) g^*(x) dx$$

definované na $\mathcal{V}$ reprezentuje skalární součin, a dvojice $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

Důkaz:

- nejprve dokážeme, že pro libovolné $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$ definiční integrál existuje a je konečný
- snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \int_a^b (\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)) (\operatorname{Re}(g) - i \operatorname{Im}(g)) \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re}(f)\operatorname{Re}(g) + \operatorname{Im}(f)\operatorname{Im}(g)) \, dx + \\ &+ i \int_a^b (\operatorname{Im}(f)\operatorname{Re}(g) - \operatorname{Re}(f)\operatorname{Im}(g)) \, dx \end{aligned}$$

- jelikož jsou oba integrandy spojitými funkcemi na kompaktu $\langle a, b \rangle$, oba integrály existují a jsou konečné
- tedy $\langle f|g \rangle \in \mathbb{C}$ pro každé $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$
- levou linearitu, tedy první axiom skalárního součinu, prokážeme sérií následujících úprav

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + \alpha h) g^* \, dx &= \int_a^b (f + \alpha h) \operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b (f + \alpha h) \operatorname{Im}(g) \, dx = \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f) + \alpha \operatorname{Re}(h) + \alpha i \operatorname{Im}(h)) \operatorname{Re}(g) \, dx - \\ &- i \int_a^b (\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f) + \alpha \operatorname{Re}(h) + \alpha i \operatorname{Im}(h)) \operatorname{Im}(g) \, dx = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(f) \operatorname{Re}(g) \, dx + \alpha \int_a^b \operatorname{Re}(h) \operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) \operatorname{Re}(g) \, dx + i \alpha \int_a^b \operatorname{Im}(h) \operatorname{Re}(g) \, dx - \\ &- i \int_a^b \operatorname{Re}(f) \operatorname{Im}(g) \, dx - i \alpha \int_a^b \operatorname{Re}(h) \operatorname{Im}(g) \, dx + \int_a^b \operatorname{Im}(f) \operatorname{Im}(g) \, dx + \alpha \int_a^b \operatorname{Im}(h) \operatorname{Im}(g) \, dx = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(f) g^*(x) \, dx + \alpha \int_a^b \operatorname{Re}(h) g^*(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) g^*(x) \, dx + i \alpha \int_a^b \operatorname{Im}(h) g^*(x) \, dx = \\ &= \int_a^b f(x) g^*(x) \, dx + \alpha \int_a^b h(x) g^*(x) \, dx \end{aligned}$$

- jako další chod tohoto důkazu nabízíme ověření hermiticity

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \int_a^b f(x) g^*(x) \, dx = \int_a^b f(x) \operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b f(x) \operatorname{Im}(g) \, dx = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(f) \operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) \operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Re}(f) \operatorname{Im}(g) \, dx + \int_a^b \operatorname{Im}(f) \operatorname{Im}(g) \, dx = \\ &= \left[\int_a^b \operatorname{Re}(f) \operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im}(f) \operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Re}(f) \operatorname{Im}(g) \, dx + \int_a^b \operatorname{Im}(f) \operatorname{Im}(g) \, dx \right]^* = \\ &= \left[\int_a^b f^*(x) \operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b f^*(x) \operatorname{Im}(g) \, dx \right]^* = \left[\int_a^b f^*(x) g(x) \, dx \right]^* = \langle g|f \rangle^* \end{aligned}$$

- pro argumentaci, že hodnota $\langle f|f \rangle$ je nulová právě tehdy, když $f(x)$ je striktně nulová funkce, je třeba si uvědomit, že

$$\int_a^b f(x) f^*(x) \, dx = \int_a^b (\operatorname{Re}^2(f) + \operatorname{Im}^2(f)) \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

- aby integrál $\int_a^b |f(x)|^2 \, dx$ z reálné funkce, která je nezáporná a (vzhledem k předpokladům věty) spojitá, byl nulový, musí nutně $|f(x)| = 0$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$
- to ale může v $C(\langle a, b \rangle)$ nastat jedině tehdy, když $f(x) = 0$ na $\langle a, b \rangle$
- tím je prokázáno naplnění axiomu pozitivní definitnosti, a $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem

6.3.6 Důsledek – o funkcionálním skalárním součinu s vahou

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a

$$\mathcal{V} = \left\{ f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C} : \operatorname{Re}(f(x)), \operatorname{Im}(f(x)) \in C(\langle a, b \rangle) \right\}$$

je funkcionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť $w(x) \in C(\langle a, b \rangle)$ je kladná funkce na $\langle a, b \rangle$. Pak zobrazení

$$\langle f|g \rangle_w := \int_a^b f(x)g^*(x)w(x) \, dx$$

definované na $\mathcal{V}$ reprezentuje skalární součin s vahou $w(x)$, a dvojice $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle_w\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

6.4 Normované prostory

Na obecném vektorovém prostoru zavedeme nyní zobecnění pojmu velikost vektoru.

6.4.1 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *normou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy normy*:

- *nulovost*: $\|\vec{x}\| = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{0}$
- *Minkovského nerovnost*: pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ platí: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
- *homogenita*: pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ a každé $\lambda \in \mathbf{C}$ platí: $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$.

Dvojici $\{\mathcal{V}, \|\cdot\|\}$ nazýváme *normovaným prostorem*.

6.4.2 Příklad

Ukážeme, že pro libovolný prvek $x \in \mathcal{V}$ z normovaného prostoru $\mathcal{V}$ s normou $\|\cdot\|$ platí nerovnost $\|\vec{x}\| \geq 0$. Nejprve snadno prokážeme, že norma opačného vektoru je stejná jako norma vektoru původního. Položme $\lambda = -1$. Pak z axiomu homogenity plyne $\|-\vec{x}\| = |-1| \|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$. Dále pak v trojúhelníkové nerovnosti položíme $y := -x$. Pak $\|\vec{x} + (-\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\| + \|-\vec{x}\|$ a následně $0 \leq \|\vec{x}\|$.

6.4.3 Poznámka

Předešlá věta je v teorii normovaných prostorů naprosto zásadní, neboť umožňuje přenášet platnost jistých tvrzení mezi dvěma normovanými prostory $\{\mathcal{V}, \|\cdot\|_1\}$ a $\{\mathcal{V}, \|\cdot\|_2\}$. Platí-li totiž určité tvrzení o normě $\|\cdot\|_1$ v normovaném prostoru $\{\mathbf{R}^r, \|\cdot\|_1\}$, platí analogické tvrzení o normě $\|\cdot\|_2$ v normovaném prostoru $\{\mathbf{R}^r, \|\cdot\|_2\}$. Toho matematika hojně využívá především v důkazech vět z teorie funkce více proměnných a ve funkcionální analýze.

6.4.4 Poznámka

Standardní normu vektoru $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$, někdy také nazývanou normou *euklidovskou*, definujeme předpisem

$$\|\vec{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^r x_k^2}.$$

Ovšem podobně jako byl zobecněn skalární součin, může být zobecněna také norma. K tomuto zobecnění nám poslouží následující věta.

6.4.5 Věta

Nechť $\langle \cdot | \cdot \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathfrak{n}(\vec{x})$ definované předpisem

$$\mathfrak{n}(\vec{x}) := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \quad (6.23)$$

je normou na $\mathcal{V}$.

Důkaz:

- ověříme axiomy normy

- axiom nulovosti:

– je-li $\vec{x} = \vec{0}$, pak $\mathfrak{n}^2(\vec{0}) := \langle \vec{0} | \vec{0} \rangle = 0$

– je-li $\mathfrak{n}(\vec{x}) = 0$, pak tedy $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$, ale podle axiomu pozitivní definitnosti skalárního součinu toto může nastat pouze tehdy, je-li $\vec{x} = \vec{0}$

– tím je ekvivalence požadovaná v axiomu nulovosti normy prokázána

- axiom trojúhelníkové nerovnosti:

– provedeme následující sérii úprav

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^2(\vec{x} + \vec{y}) &= \langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle = \\ &= 2 \operatorname{Re}(\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle) + \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle \leq 2|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| + \mathfrak{n}^2(\vec{x}) + \mathfrak{n}^2(\vec{y}) \end{aligned}$$

– užijeme-li nyní Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (6.14), dostáváme

$$\mathfrak{n}^2(\vec{x} + \vec{y}) \leq 2\mathfrak{n}(\vec{x})\mathfrak{n}(\vec{y}) + \mathfrak{n}^2(\vec{x}) + \mathfrak{n}^2(\vec{y}) = (\mathfrak{n}(\vec{x}) + \mathfrak{n}(\vec{y}))^2$$

– tím je dokázáno, že $\mathfrak{n}(\vec{x} + \vec{y}) \leq \mathfrak{n}(\vec{x}) + \mathfrak{n}(\vec{y})$

- axiom homogenity:

– nechť tedy $\lambda \in \mathbf{C}$ je zvoleno libovolně

– pak snadno $\mathfrak{n}(\lambda\vec{x}) := \sqrt{\langle \lambda\vec{x} | \lambda\vec{x} \rangle} = \sqrt{\lambda\lambda^*} \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2} \mathfrak{n}(\vec{x}) = |\lambda| \mathfrak{n}(\vec{x})$

- tím je prokázáno, že zobrazení $\mathfrak{n}(\vec{x})$ je normou na $\mathcal{V}$

6.4.6 Definice

Nechť $\langle \cdot | \cdot \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathfrak{n}(\vec{x})$ definované vztahem (6.23) nazýváme *normou generovanou skalárním součinem*.

6.4.7 Věta – o rovnoběžníkové rovnosti

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Pak pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ platí tzv. *rovnoběžníková rovnost* tvaru

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} - \vec{y} | \vec{x} - \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + \\ &+ \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} | -\vec{y} \rangle + \langle -\vec{y} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle = 2\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

6.4.8 Věta – Pythagorova věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Pak platí implikace

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2.$$

Důkaz:

- jelikož $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, plyne z hermiticity skalárního součinu, že také $\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle = 0$
- dále snadno $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle$
- a protože prostřední dva členy tohoto součtu jsou nulové, platí $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

6.4.9 Poznámka

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Z věty 6.2.10 mimo jiné vyplývá následující skutečnost. Platí-li pro nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ rovnost

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

pak existuje kladné λ tak, že $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. Platí-li naopak rovnost

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

pak je rovnost $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ splněna pro jisté záporné λ .

6.4.10 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{R}$ se skalárním součinem. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť jsou dále zadány dva libovolné vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. Pak $\vec{x}, \vec{y}$ jsou lineárně závislé (ve smyslu $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, kde $\lambda \geq 0$) právě tehdy, je-li splněna rovnost

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \quad (6.24)$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve první implikaci
 - nechť tedy existuje $\lambda \in \mathbf{R}$ takové, že $\vec{y} = \lambda \vec{x}$
 - pak pro levou stranu rovnosti (6.24) máme $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x} + \lambda \vec{x}\| = |1 + \lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
 - pro pravou stranu vychází $\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + |\lambda| \|\vec{x}\| = (1 + |\lambda|) \|\vec{x}\|$
 - nyní již snadno prokážeme, že rovnost $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$ nastává právě tehdy, když $\lambda \geq 0$
- dokážeme nyní druhou implikaci
 - nechť naopak platí rovnost (6.24), tj. $\langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$
 - jelikož tělesem v této větě je množina $\mathbf{R}$ reálných čísel, mění se hermiticity z definice skalárního součinu na obyčejnou symetrii, čili $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$
 - odtud ale $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + 2 \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, potažmo $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$
 - díky této rovnosti a větě 6.2.10 (včetně poznámky 6.4.9) odtud vyplývá, že existuje nezáporné λ takové, že $\vec{y} = \lambda \vec{x}$
 - tím je důkaz zakončen

6.4.11 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{R}$ se skalárním součinem. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť jsou dále zadány dva libovolné vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. Pak $\vec{x}, \vec{y}$ jsou lineárně závislé (přesněji $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, kde $\lambda \in \langle -1, 0 \rangle$) právě tehdy, je-li splněna rovnost

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| + \|\vec{x} + \vec{y}\|. \quad (6.25)$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve první implikaci

- nechť tedy existuje $\lambda \in \langle -1, 0 \rangle$ takové, že $\vec{y} = \lambda \vec{x}$
- pak pro pravou stranu rovnosti (6.25) máme

$$\|\vec{y}\| + \|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\lambda \vec{x}\| + \|\vec{x} + \lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| + |1 + \lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

- nyní již snadno prokážeme, že rovnost $|\lambda| + |1 + \lambda| = 1$ nastává právě tehdy, když $\lambda \in \langle -1, 0 \rangle$

- dokážeme nyní druhou implikaci

- nechť naopak platí rovnost (6.25)
- to mimo jiné znamená, že $\|\vec{x}\| \geq \|\vec{y}\|$
- ze vztahu (6.25) máme

$$\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + 2 \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

$$\text{potažmo } \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

- díky této rovnosti a větě 6.2.10 (včetně poznámky 6.4.9) odtud vyplývá, že existuje záporné λ takové, že $\vec{y} = \lambda \vec{x}$
- aby byla splněna podmínka $\|\vec{x}\| \geq \|\vec{y}\|$, musí navíc platit $|\lambda| \leq 1$, tedy $\lambda \in \langle -1, 0 \rangle$

- tím je důkaz zakončen

6.4.12 Příklad

Nechť je v prostoru $\mathbf{R}^2$ zaveden skalární součin předpisem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

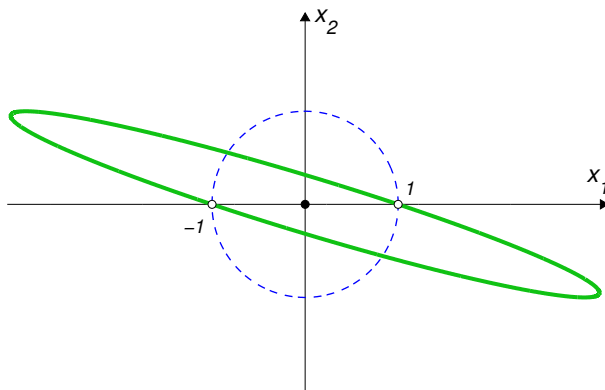
Nechť jsou dány body $\vec{a} = (-1, 0)$ a $\vec{b} = (1, 0)$. Nalezněme všechny body $\vec{c} \in \mathbf{R}^2$ tak, aby trojúhelník $\triangle \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ byl pravoúhlý a měl pravý úhel při vrcholu $\vec{c}$. Úlohu budeme nejprve řešit pro standardní skalární součin. Označme tedy $\vec{x} := \vec{c} - \vec{a} = (c_1 + 1, c_2)$ a $\vec{y} := \vec{c} - \vec{b} = (c_1 - 1, c_2)$. Aby $\vec{x} \perp \vec{y}$ v klasickém smyslu, musí platit $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = c_1^2 + c_2^2 - 1 = 0$, tudíž všechny hledané body $\vec{c}$ leží na jednotkové *Thaletově kružnici* $c_1^2 + c_2^2 = 1$. V případě skalárního součinu (6.26) pak musí platit

$$(c_1 + 1, c_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 - 1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1^2 + 10c_2^2 + 6c_1c_2 - 1 = 0.$$

Jedná se o rovnici kvadratické plochy. Její tvar vyšetříme standardním postupem.

$$Q(c_1, c_2) = c_1^2 + 10c_2^2 + 6c_1c_2 - 1 = (c_1 + 3c_2)^2 + c_2^2 - 1 = 0.$$

Vhodnými body $\vec{c}$ jsou tedy takové body vyhovující rovnici $(c_1 + 3c_2)^2 + c_2^2 = 1$, jež představuje *Thaletovu elipsu* procházející body $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (viz obrázek).



Obrázek 6.33

Thaletova kružnice (čárkovaně) a Thaletova elipsa (plnou čarou).

6.4.13 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ skalární součin. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Řekneme, že množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r\}$ je *ortonormální* ve $\mathcal{V}$, je-li ortogonální a zároveň pro každé $i \in \hat{r}$ platí $\|\vec{x}_i\| = 1$.

6.4.14 Věta – Grammův-Schmidtův ortonormalizační proces

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ skalární součin. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť $\{\vec{y}_n \in \mathcal{V} : n \in \mathbf{N}\}$ je množina lineárně nezávislých vektorů z $\mathcal{V}$. Pak existuje ortonormální množina $\{\vec{x}_n \in \mathcal{V} : n \in \mathbf{N}\}$ vektorů z prostoru $\mathcal{V}$ taková, že pro každé $k \in \hat{n}$ platí

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k]_{\lambda} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k]_{\lambda}.$$

Důkaz:

- označme $\vec{u}_1 = \vec{y}_1$
- jelikož $\|\vec{u}_1\| \neq 0$, lze definovat $\vec{x}_1 = \vec{u}_1 / \|\vec{u}_1\|$
- tedy $\|\vec{x}_1\| = 1$
- položíme $\vec{u}_2 = \vec{y}_2 - \langle \vec{y}_2 | \vec{x}_1 \rangle \vec{x}_1$
- pak platí $\langle \vec{u}_2 | \vec{x}_1 \rangle = 0$
- protože jsou vektory $\vec{y}_1$ a $\vec{y}_2$ lineárně nezávislé, je $\|\vec{u}_2\| \neq 0$ a lze definovat $\vec{x}_2 = \vec{u}_2 / \|\vec{u}_2\|$
- množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ je ortonormální a navíc $[\vec{y}_1, \vec{y}_2]_{\lambda} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2]_{\lambda}$
- dále postupujeme indukcí
- nechť máme sestrojenou ortonormální množinu $S_m = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$ takovou, že $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_{\lambda} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]_{\lambda}$
- uvažme prvek $\vec{u}_{m+1} = \vec{y}_{m+1} - \sum_{k=1}^m \langle \vec{y}_{m+1} | \vec{x}_k \rangle \vec{x}_k$
- zřejmě $\langle \vec{u}_{m+1} | \vec{x}_k \rangle = 0$ pro každé $k \in \hat{m}$
- protože dle předpokladů věty jsou vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m, \vec{y}_{m+1}$ lineárně nezávislé, je $\vec{u}_{m+1} \neq \vec{0}$
- definujme vektor $\vec{x}_{m+1} = \vec{u}_{m+1} / \|\vec{u}_{m+1}\|$
- pak je množina $S_{m+1} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}\}$ ortonormální ve $\mathcal{V}$ a navíc

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m, \vec{y}_{m+1}]_{\lambda} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}]_{\lambda}$$

- tím je důkaz proveden

6.4.15 Příklad

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor polynomů definovaných na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Nechť je ve $\mathcal{V}$ zadána spočetná množina $S = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots\}$ lineárně nezávislých prvků z $\mathcal{V}$. Skalární součin libovolných prvků $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$ nechť je podle vztahu (6.20) na $\mathcal{V}$ zadán vztahem

$$\langle f(x) | g(x) \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

Budeme nyní hledat ortonormální ekvivalent k množině S . Užijeme Grammův-Schmidtův ortonormalizační proces diskutovaný v předešlé větě. Jelikož

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1 | 1 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 1 \, dx} = 1,$$

je tedy první z hledaných funkcí funkce $\ell_1(x) = 1$. Dále protože

$$\langle x | \ell_1(x) \rangle = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2},$$

položíme $u_2(x) = x - \frac{1}{2}$. Pak tedy $\langle x - \frac{1}{2} | 1 \rangle = 0$. Jelikož $\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx = \frac{1}{12}$, je druhou z hledaných funkcí funkce $\ell_2(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$. Dále

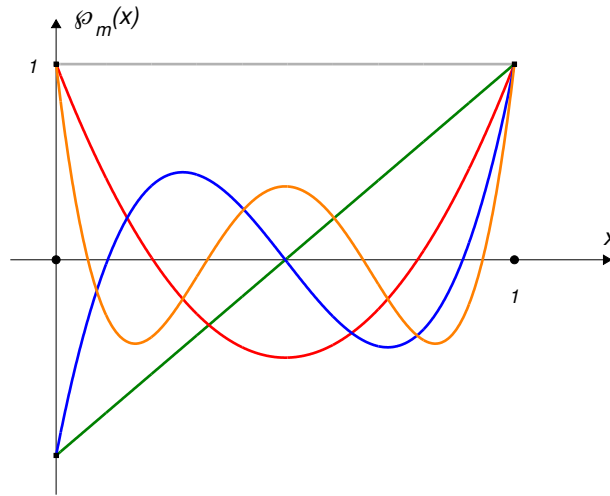
$$\langle x^2 | \ell_1(x) \rangle = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

$$\langle x^2 | \ell_2(x) \rangle = \sqrt{3} \int_0^1 x^2 (2x - 1) \, dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Proto dle Grammovy-Schmidtovy procedury klademe

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(2x - 1) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Z normalizace $\|u_3\|^2 = \frac{1}{180}$ pak plyne, že $\ell_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$. Analogicky $\ell_4(x) = \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)$, $\ell_5(x) = \sqrt{9}(70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1)$ atd. Tímto způsobem obdržíme tzv. *Legendreovy polynomy* $\ell_m(x)$ vyhovující rovnosti $\int_0^1 \ell_m(x)\ell_k(x) \, dx = \delta_{mk}$. Jejich nenormované průběhy $\wp_m(x) = \frac{\ell_m(x)}{\sqrt{2m+1}}$ vykresluje v následujícím grafu.



Obrázek 6.34
Nenormované Legendreovy polynomy.

6.4.16 Příklad

Ukážeme nyní, jakým způsobem zavést normu na prostoru matic. Nechť $\mathcal{M}$ je vektorový prostor všech čtvercových matic řádu r nad tělesem $\mathbf{R}$. Ukážeme, že zobrazení $\mathfrak{n}(\mathbb{A}) := \max\{|\mathbb{A}_{ij}| : i, j \in \widehat{r}\}$ definuje na $\mathcal{M}$ normu. Rovnost $\mathfrak{n}(\mathbb{A}) = 0$ nastává právě tehdy, když $\mathbb{A}$ je nulovou maticí. Nerovnost

$$\mathfrak{n}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \leq \mathfrak{n}(\mathbb{A}) + \mathfrak{n}(\mathbb{B})$$

plyne z faktu, že maximálním elementem matice součtu může být součet maximálních elementů obou matic, a to ještě pouze v případě, že se tyto dva maximální elementy vyskytovaly na stejné pozici jak v matici $\mathbb{A}$, tak v matici $\mathbb{B}$. Dále pro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\mathfrak{n}(\alpha\mathbb{A}) = \max\{|\alpha\mathbb{A}_{ij}| : i, j \in \widehat{r}\} = |\alpha| \max\{|\mathbb{A}_{ij}| : i, j \in \widehat{r}\} = |\alpha| \mathfrak{n}(\mathbb{A}).$$

O normu se tudíž jedná.

6.5 Ekvivalence norem

V celé sekci předpokládáme, že je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad $\mathbf{C}$ konečné dimenze $\dim(\mathcal{V}) = n$, v němž je zvolena pevná ale libovolná báze $\mathcal{X} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$. Souřadnice libovolného vektoru $\vec{x} \in \mathcal{V}$ v bázi $\mathcal{X}$ označme $\omega_k \in \mathbf{C}$, tj. $\vec{x} = \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k$.

6.5.1 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Řekneme, že norma $\|\cdot\|_2$ *není silnější* než norma $\|\cdot\|_1$, jestliže existuje $\alpha > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí $\|\vec{x}\|_2 \leq \alpha \|\vec{x}\|_1$.

6.5.2 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, není-li jedna silnější druhé, t.j. existují-li $\alpha, \beta > 0$ taková, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí:

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \alpha \|\vec{x}\|_1 \quad \wedge \quad \|\vec{x}\|_1 \leq \beta \|\vec{x}\|_2.$$

6.5.3 Věta

Zobrazení $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}_0^+$, které každému vektoru $\vec{x} \in \mathcal{V}$ přiřazuje číslo

$$\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} := \sum_{k=1}^n |\omega_k|$$

splňuje axiomy normy.

Důkaz:

- norma $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$ je nulová právě tehdy, když všechny $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ jsou nulové, což může nastat pouze pro nulový vektor, čímž je naplněn axiom nulovosti
- pro každé $\lambda \in \mathbf{C}$ a $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí, že

$$\|\lambda\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = \left\| \lambda \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda\omega_k) \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^n |\lambda\omega_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |\omega_k| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$$

- proto je splněn také axiom homogenity
- axiom trojúhelníkové nerovnosti prokážeme sérií následujících úprav

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|_{\mathcal{X}} &= \left\| \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k + \sum_{k=1}^n \varkappa_k \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=1}^n (\omega_k + \varkappa_k) \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^n |\omega_k + \varkappa_k| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\omega_k| + \sum_{k=1}^n |\varkappa_k| = \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} + \|\vec{y}\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

kde bylo využito faktu, že nerovnost $|a + b| \leq |a| + |b|$ platí pro každá komplexní $a, b \in \mathbf{C}$

6.5.4 Definice

Normu $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}_0^+$ z věty 6.5.3 nazýváme *souřadnicovou normou v bázi $\mathcal{X} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$* , nebo krátce *souřadnicovou normou*.

6.5.5 Lemma

Relace *býti ekvivalentní* (označme ji symbolem $\triangleq$) je ve třídě všech norem zavedených nad týmž vektorovým prostorem

- a) *reflexivní*, tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_1$,
- b) *symetrická*, tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_1$,
- a) *tranzitivní*, tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2 \wedge \|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_3 \Rightarrow \|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_3$.

6.5.6 Věta

Pro každé $\vec{x}$ z normovaného prostoru $\{V, \|\cdot\|\}$ s libovolnou normou platí nerovnost

$$\|\vec{x}\| \leq \sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|.$$

Důkaz:

- snadno:

$$\|\vec{x}\| = \left\| \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k \right\| \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \sum_{k=1}^n \|\omega_k \vec{\varepsilon}_k\| \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \|\vec{\varepsilon}_k\| \stackrel{\textcircled{3}}{\leq} \sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|$$

- v odvození bylo využito $\textcircled{1}$ axiomu trojúhelníkové nerovnosti, $\textcircled{2}$ axiomu homogenity a nakonec také $\textcircled{3}$ rovnosti $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k$ platné pro libovolná nezáporná čísla

6.5.7 Věta

Pro libovolnou normu v normovaném prostoru $\{V, \|\cdot\|\}$ existuje číslo $\mu \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro všechny $\vec{x} \in \mathcal{V}$, pro něž $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$, je $\|\vec{x}\| \geq \mu$.

Důkaz:

- předpokládejme naopak, že pro všechny $\mu \in \mathbf{R}^+$ existuje vektor takový, že $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$ a $\|\vec{x}\| \leq \mu$
- je-li ale $\|\vec{x}\|$ menší než libovolné kladné číslo μ , pak zjevně $\|\vec{x}\| = 0$, odkud plyne, že $\vec{x} = \vec{0}$
- to je ale ve sporu s faktem, že $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$, protože podle axiomu nulovosti nemůže nulový vektor mít nenulovou normu

6.5.8 Věta

Všechny normy zkonstruované nad $\mathcal{V}$ jsou ekvivalentní se souřadnicovou normou $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$.

Důkaz:

- podle definice ekvivalence norem je třeba pro libovolně zvolenou normu $\|\cdot\|$ dokázat, že $\|\cdot\| \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, tedy, že existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro všechny $\vec{x} \in \mathcal{V}$:

$$\|\vec{x}\| \leq \alpha \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \quad \wedge \quad \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \beta \|\vec{x}\|$$

- z povahy definice ekvivalence norem je zřejmé, že není třeba se zabírat vektorem $\vec{x} = \vec{0}$, proto ho z následujících odvození vyjme
- z věty 6.5.6 vyplývá, že

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|}{\sum_{k=1}^n |\omega_k|} = \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|,$$

kde číslo $\sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|$ je nezávislé na volbě $\vec{x}$, neboť se jedná o konečný součet norem vektorů pevně zvolené báze ve $\mathcal{V}$

- za hledané α z definice ekvivalence norem lze tedy klást $\alpha := \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|$

- pak totiž $\|\vec{x}\| \leq \alpha \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$
- pro důkaz druhé nerovnosti nejprve uvažme, že pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathcal{V}$ existují číslo $\sigma > 0$ a vektor $\vec{x}_0 \in \mathcal{V}$ tak, že $\|\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}} = 1$ a $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = \|\sigma \vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}$
- pro libovolné $\vec{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}$ tedy nalezneme σ a $\vec{x}_0$ dle předchozího a provedeme sérii těchto úprav záložených na substituci $\vec{x} = \sigma \vec{x}_0$:

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} = \frac{\|\sigma \vec{x}_0\|}{\|\sigma \vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}} = \frac{\|\vec{x}_0\|}{\|\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}} = \|\vec{x}_0\|$$

- hodnota $\|\vec{x}_0\|$ je ale podle věty 6.5.7 omezena zdola univerzální hodnotou $\mu > 0$ nezávislou na volbě $\vec{x}_0$, a tedy nezávislou na volbě $\vec{x}$
- proto

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} \geq \mu \quad \Rightarrow \quad \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\|\vec{x}\|}{\mu} =: \beta \|\vec{x}\|,$$

což bylo dokázat

6.5.9 Věta – o ekvivalenci všech norem

Je-li dimenze normovaného prostoru $\mathcal{V}$ konečná, jsou každé dvě normy na $\mathcal{V}$ ekvivalentní.

Důkaz:

- zvolme tedy dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ zavedené na týmž vektorovém prostoru $\mathcal{V}$
- podle věty 6.5.8 platí, že $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ a $\|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$
- jelikož je ale relace ekvivalence podle lematu 6.5.5 symetrická a tranzitivní, vyplývá odsud, že také $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2$, což dokládá platnost tvrzení

6.6 Metrické prostory

Třetí ze základních pojmů této kapitoly je pojem metriky, tj. zobecnění pojmu vzdálenost. Jemu bude věnována tato sekce.

6.6.1 Definice

Nechť M je libovolná neprázdná množina. Zobrazení $\varrho : M \times M \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *metrikou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy metriky*:

- *nulovost*: $\varrho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$
- *symetrie*: pro všechna $x, y \in M$ platí $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
- *trojúhelníková nerovnost*: pro všechna $x, y, z \in M$ platí $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

Dvojici $\{M, \varrho\}$ nazýváme *metrickým prostorem*.

6.6.2 Poznámka

Povšimněte si, že na rozdíl od skalárního součinu a normy je metrika definovaná na obecné množině, ne tedy nutně na prostoru vektorovém. Prvky z M totiž nepotřebujeme v definici 6.6.1 sčítat ani násobit číslem.

6.6.3 Příklad

Ukážeme, že pro libovolné prvky $x, y \in M$ z metrického prostoru M s metrikou ϱ platí nerovnost $\varrho(x, y) \geq 0$. Položme v trojúhelníkové nerovnosti $z := x$. Pak $\varrho(x, x) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x)$ a následně za použití prvního a druhého axiomu získáváme $0 \leq \varrho(x, y)$.

6.6.4 Lemma

Zobrazení zavedené předpisem

$$\tau(x, y) := \begin{cases} 0 & \dots & x = y \\ 1 & \dots & x \neq y \end{cases} \quad (6.27)$$

je metrikou na libovolné množině M .

6.6.5 Definice

Metriku zavedenou množině M vztahem (6.27) nazýváme *triviální metrikou*.

6.6.6 Věta

Nechť $p \geq 1$. Pak zobrazení zavedené předpisem

$$\varrho_p(\vec{x}, \vec{y}) := \left(\sum_{k=1}^r |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6.28)$$

je metrikou v $\mathbf{R}^r$.

Důkaz:

- vlastnosti nulovosti a symetrie jsou splněny triviálně
- trojúhelníková nerovnost je splněna podle vztahu (6.12), kde klademe $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$, a tedy $a_k + b_k = x_k - z_k$

6.6.7 Definice

Metriku zavedenou na prostoru $\mathbf{R}^r$ vztahem (6.28) nazýváme *p-metrikou*.

6.6.8 Věta

Zobrazení zavedené předpisem

$$\sigma(\vec{x}, \vec{y}) := \max_{1 \leq i \leq r} |x_i - y_i| \quad (6.29)$$

je metrikou v $\mathbf{R}^r$.

Důkaz:

- vlastnosti nulovosti a symetrie jsou opět splněny triviálně
- trojúhelníková nerovnost vyplývá z nerovností $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq \sigma(\vec{x}, \vec{z}) + \sigma(\vec{z}, \vec{y})$
- jelikož každý rozdíl $|x_i - y_i|$ je menší než $\sigma(\vec{x}, \vec{z}) + \sigma(\vec{z}, \vec{y})$, platí také, že $\max_{1 \leq i \leq r} |x_i - y_i| \leq \sigma(\vec{x}, \vec{z}) + \sigma(\vec{z}, \vec{y})$, což bylo dokázat

6.6.9 Definice

Metriku zavedenou na prostoru $\mathbf{R}^r$ vztahem (6.29) nazýváme *σ -metrikou*, popř. *Čebyševovou metrikou*.

6.6.10 Poznámka

Vztah mezi σ -metrikou a p -metrikou může být vyjádřen rovnicí $\sigma(\vec{x}, \vec{y}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varrho_p(\vec{x}, \vec{y})$.

6.6.11 Poznámka

Speciálními případy p –metriky jsou tzv. *síťová metrika* ($p = 1$)

$$\varrho_1(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \sum_{i=1}^r |x_i - y_i|$$

a klasická tzv. *euklidovská metrika* ($p = 2$)

$$\varrho_e(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^r (x_i - y_i)^2}.$$

6.6.12 Poznámka

Mezi síťovou, euklidovskou, obecnou p –metrikou a σ –metrikou platí následující vztah. Nechť $p > 2$. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^r$ platí

$$\sigma(\vec{x}, \vec{y}) \leq \varrho_p(\vec{x}, \vec{y}) \leq \varrho_e(\vec{x}, \vec{y}) \leq \varrho_1(\vec{x}, \vec{y}).$$

Navíc také

$$\varrho_p(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt[p]{r} \sigma(\vec{x}, \vec{y}) \leq r \sigma(\vec{x}, \vec{y}),$$

kde tentokrát $p \geq 1$.

6.6.13 Věta

Nechť $\varrho_{1D}(x, y)$ je metrika na $\mathbf{R}$. Pak zobrazení

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^r \varrho_{1D}(x_i, y_i)$$

je metrikou na prostoru $\mathbf{R}^r$.

Důkaz:

- není obtížné ukázat, že pokud $\vec{x} = \vec{y}$, pak $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = 0$
- pokud naopak $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, je z definičního vztahu zřejmé, že všechny sčítance $\varrho_{1D}(x_i, y_i)$ musejí být nulové
- to ale z axiomu nulovosti metriky $\varrho_{1D}(x, y)$ vede na rovnost $x_i = y_i$ pro všechna $i \in \hat{r}$, odkud $\vec{x} = \vec{y}$
- tím je dokázána ekvivalence axiomu nulovosti
- axiom symetrie je splněn triviálně
- zvolme dále $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^r$ libovolně
- z axiomu trojúhelníkové nerovnosti víme, že pro všechna $i \in \hat{r}$ platí

$$\varrho_{1D}(x_i, z_i) \leq \varrho_{1D}(x_i, y_i) + \varrho_{1D}(y_i, z_i)$$

- sečtením všech r těchto rovností dostáváme požadovanou nerovnost $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

6.6.14 Věta

Zobrazení zavedené předpisem $\varrho(x, y) := |x - y|^p$ pro $p \in (0, 1)$ je metrikou na prostoru $\mathbf{R}$.

Důkaz:

- axiomy nulovosti a symetrie jsou splněny triviálně
- axiom trojúhelníkové nerovnosti je splněn díky platnosti následujícího tvrzení:

$$(\forall a, b \in \mathbf{R}) (\forall p \in (0, 1)) : |a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq |a|^p + |b|^p$$

- položíme-li v něm $a = x - y$ a $b = y - z$, dostáváme $|x - z|^p \leq |x - y|^p + |y - z|^p$, což bylo dokázat

6.6.15 Lemma

Zobrazení zavedené předpisem $\varrho(x, y) := \lceil |x - y| \rceil$ je metrikou na prostoru $\mathbf{R}$.

6.6.16 Věta

Nechť $p \in (0, 1)$. Pak zobrazení zavedené předpisem

$$\chi_p(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i=1}^r |x_i - y_i|^p \quad (6.30)$$

je metrikou na prostoru $\mathbf{R}^r$.

Důkaz:

- plyne z vět 6.6.13 a 6.6.14

6.6.17 Definice

Metriku zavedenou na prostoru $\mathbf{R}^r$ vztahem (6.30) nazýváme χ_p -metrikou.

6.6.18 Věta

Zobrazení zavedené předpisem

$$\varrho_j(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i=1}^r \lceil |x_i - y_i| \rceil \quad (6.31)$$

je metrikou na prostoru $\mathbf{R}^r$.

Důkaz:

- plyne z lemmatu 6.6.15 a z věty 6.6.13

6.6.19 Definice

Metriku zavedenou na prostoru $\mathbf{R}^r$ vztahem (6.31) nazýváme *skokovou metrikou*.

6.6.20 Definice

Nechť $\{M, \varrho\}$ je metrický prostor s libovolnou metrikou $\varrho(x, y)$. Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny množiny $M \neq \emptyset$. Vzdáleností množin A a B rozumíme číslo

$$\text{dist}(A, B) := \inf \{ \varrho(x, y) : x \in A \wedge y \in B \}.$$

Vzdálenost bodu $a \in M$ od množiny $A \subset M$ definujeme jako $\text{dist}(A, a) := \text{dist}(A, \{a\})$.

6.6.21 Lemma

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ a norma $\|\cdot\|$. Pak zobrazení $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ je metrikou na $\mathcal{V}$.

6.6.22 Definice

Metriku zavedenou na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ vztahem $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ nazýváme *metrikou generovanou normou*.

6.6.23 Poznámka

Z definic 6.4.6 a 6.6.22 vyplývá, že základním stavebním kamenem (generátorem) zkoumaných prostorů je skalární součin. Pomocí něho lze totiž definovat normu a pomocí této normy pak metriku.

6.6.24 Poznámka

Z poznámky 6.4.3 plyne následující fakt pro metriky $\varrho, \tilde{\varrho}$ generované po řadě normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Platí-li určité tvrzení o metrice ϱ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$, platí analogické tvrzení o metrice $\tilde{\varrho}$ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \tilde{\varrho}\}$.

6.6.25 Definice

Nechť jsou ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ dány dva body $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Pak *úsečkou* s krajními body $\vec{a}$ a $\vec{b}$ rozumíme množinu

$$\leftrightarrow \vec{ab} := \{\vec{x} \in \mathcal{V} : \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

6.6.26 Definice

Nechť je zadán vektorový prostor $\mathcal{V}$. Řekneme, že množina $M \subset \mathcal{V}$ je *konvexní* ve $\mathcal{V}$, jestliže pro každé dva body $\vec{x}, \vec{y} \in M$ platí $\leftrightarrow \vec{xy} \subset M$.

6.6.27 Věta

Nechť je dán normovaný prostor $\{\mathcal{V}, \|\cdot\|\}$ a metrika $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ generovaná uvedenou normou. Nechť jsou dány body $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$ tak, že bod $\vec{z}$ leží na úsečce $\leftrightarrow \vec{xy}$. Pak platí $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{z}, \vec{y})$.

Důkaz:

- nechť $\vec{z} \in \leftrightarrow \vec{xy}$
- pak existuje $t \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $\vec{z} = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})$
- tudíž $\varrho(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) - \vec{x}\| = \|t(\vec{y} - \vec{x})\| = |t| \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\| = |t|\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = t\varrho(\vec{x}, \vec{y})$
- dále $\varrho(\vec{y}, \vec{z}) = \|\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) - \vec{y}\| = \|(t-1)(\vec{y} - \vec{x})\| = |t-1| \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\| = |t-1|\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = (1-t)\varrho(\vec{x}, \vec{y})$
- odtud pak $\varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{z}, \vec{y}) = t\varrho(\vec{x}, \vec{y}) + (1-t)\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{y})$

6.6.28 Poznámka

Upozorňujeme, že předešlé tvrzení platí pouze pro metriky generované normou. Např. pro triviální metriku tvrzení neplatí, neboť pro body $\vec{x} = (0, 0)$, $\vec{y} = (2, 0)$ a $\vec{z} = (1, 0)$, jež zjevně leží na jedné přímce, platí

$$\tau(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \neq \tau(\vec{x}, \vec{z}) + \tau(\vec{z}, \vec{y}) = 1 + 1 = 2.$$

6.6.29 Věta

Nechť je dán normovaný prostor $\{\mathcal{V}, \|\cdot\|\}$ a metrika $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ generovaná uvedenou normou, jež byla generována skalárním součinem. Nechť jsou dány body $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$ tak, že platí rovnost $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{z}, \vec{y})$. Pak $\vec{z}$ leží na úsečce $\leftrightarrow \vec{xy}$.

Důkaz:

- z předpokladů věty platí $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{y}\|$
- označme $\vec{a} := \vec{x} - \vec{y}$, $\vec{b} := \vec{z} - \vec{x}$
- pak tedy $\vec{z} - \vec{y} = \vec{b} + \vec{a}$ a platí $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| + \|\vec{b} + \vec{a}\|$
- podle věty 6.4.11 tedy existuje $\lambda \in \langle -1, 0 \rangle$ takové, že $\vec{b} = \lambda\vec{a}$
- podotýkáme, že věty 6.4.11 bylo možno užít také proto, že pracujeme s normou generovanou skalárním součinem
- pak ale $\vec{z} - \vec{x} = \lambda(\vec{x} - \vec{y})$
- položíme-li $t = -\lambda$, máme $\vec{z} = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$, což bylo dokázat

6.7 Konvergence v metrických prostorech

Budeme nyní definovat tzv. Hilbertovy prostory, jejichž užitečnost oceníme již v úvodních partiích funkcionální analýzy, dále při řešení parciálních diferenciálních rovnic nebo např. v základním kurzu kvantové mechaniky. Nejprve ale rozšíříme pojem konvergence do obecných metrických prostorů.

6.7.1 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou ϱ . Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z M *konverguje* k prvku $a \in M$, a píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, a) < \varepsilon$. Je-li splněna předchozí vlastnost, říkáme, že *posloupnost* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* rovnou prvku a . Posloupnost, která má, resp. nemá limitu nazýváme *konvergentní*, resp. *divergentní*.

6.7.2 Věta

Nechť je dán metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou ϱ . Pak každá posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z M má nejvýše jednu limitu.

Důkaz:

- předpokládejme pro spor, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ a $a \neq b$
- z axiomu nulovosti metriky vyplývá, že $\varrho(a, b) > 0$
- z faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, plyne $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbf{N}) : n > n_1 \Rightarrow \varrho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$
- z faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, plyne $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbf{N}) : n > n_2 \Rightarrow \varrho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$
- položíme-li $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, pak pro jakékoli $n \geq n_0$ platí

$$\varrho(a, b) \leq \varrho(a, x_n) + \varrho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- tedy $\varrho(a, b) < \varepsilon$ pro jakékoliv kladné ε , tudíž $\varrho(a, b) = 0$, což je ale spor s předpokladem, že $a \neq b$

6.7.3 Příklad

Rozhodněme o limitě posloupnosti

$$\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n=1}^{\infty}$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou a v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \tau\}$ s triviální metrikou. V prvním případě lze limitu přímo vypočítat, jde totiž o standardní limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = (0, 0).$$

Ověřme ovšem výsledek užitím definice. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$$\varrho_e \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), (0, 0) \right) < \varepsilon,$$

tedy aby

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} < \varepsilon,$$

tj. $n^2 > 2/\varepsilon^2$. Za n_0 tedy stačí zvolit

$$n_0 := \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rceil + 1,$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ reprezentuje dolní celou část. V případě triviální metriky však tatáž posloupnost limitu nemá. Ukážeme, že např. bod $(0, 0)$ onou limitou skutečně není. Kdyby byl, pak by např. pro $\varepsilon = 1/2$ muselo existovat $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$$\tau\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (0, 0)\right) < \varepsilon,$$

tedy aby $1 < \varepsilon$, což zcela jistě možné není. Na tomto místě je dobré si uvědomit, že v $\{\mathbf{R}^2, \tau\}$ konvergují pouze konstantní posloupnosti nebo *posléze konstantní posloupnosti*, tj. posloupnosti, které jsou konstantní až od jistého členu.

6.7.4 Příklad

V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \sigma\}$ nalezneme limitu posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$, kde

$$\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{4}{n}\right).$$

Pravděpodobnou hodnotou limity se zdá být

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n}\right) = (0, 1, 0) =: \vec{a}.$$

Ověřme to podle definice. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby pro všechna $n \geq n_0$ platila nerovnost

$$\sigma(\vec{x}_n, \vec{a}) = \max\left\{\frac{1}{n} - 0, \frac{n+1}{n} - 1, \frac{4}{n} - 0\right\} < \varepsilon,$$

tedy

$$\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{4}{n}\right\} = \frac{4}{n} < \varepsilon.$$

Za n_0 tedy postačí volit

$$n_0 := \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Limitou hledané posloupnosti tedy skutečně je bod $(0, 1, 0)$.

6.7.5 Definice

Nechť je dána posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ prvků z metrického prostoru $\{M, \varrho\}$. Řekneme, že prvek $a \in M$ je *hromadným bodem* posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ splňuje nerovnost $\varrho(x_n, a) < \varepsilon$ nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbf{N}$.

6.7.6 Věta

Je-li prvek $a \in M$ limitou posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, je prvek a také hromadným bodem posloupnosti této posloupnosti.

Důkaz:

- plyne ihned z příslušných definic

6.7.7 Poznámka

Obrácené tvrzení obecně neplatí. Např. číslo -1 je hromadným bodem posloupnosti $((-1)^n)_{n=1}^\infty$ v $\{\mathbf{R}, \varrho_\varepsilon\}$, ale limitou není.

6.7.8 Lemma

Je-li posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ omezená v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho_\varepsilon\}$, pak má alespoň jeden hromadný bod.

6.7.9 Poznámka

Existují metriky generované normou ale také ty, jenž žádnou normou generovány být nemohou. Je-li totiž $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ vhodná metrika, definuje vztah $\mathfrak{n}(\vec{x}) = \varrho(\vec{0}, \vec{x})$ normu. Toto ale nenastává ve všech případech. Doporučujeme čtenáři, aby rozvážil, jaké dodatečné předpoklady musí splňovat metrika, aby zobrazení $\mathfrak{n}(\vec{x}) = \varrho(\vec{0}, \vec{x})$ naplnilo axiomy normy.

6.7.10 Definice

Nechť je dán normovaný prostor $\{\mathcal{V}, \|\cdot\|\}$. Řekneme, že posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathcal{V}$ *konverguje podle normy* k vektoru $\vec{a} \in \mathcal{V}$, a píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{norm } \vec{x}_n = \vec{a}, \quad \text{resp.} \quad \vec{x}_n \rightarrow \vec{a},$$

jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\|\vec{x}_n - \vec{a}\| < \varepsilon$.

6.7.11 Poznámka

Klademe-li v předešlé definici $\mathcal{V} = \mathbf{R}^r$ a považujeme-li normu za standardní, tj. euklidovskou, pojmy konvergence a konvergence podle normy splývají. Situace se ovšem podstatně změní, budeme-li studovat obecnější vektorové prostory než jsou prostory uspořádaných r -tic. Podotýkáme například, že je-li $\mathcal{V}$ vektorový prostor jistých funkcí, pak na něm lze dobře definovat (kromě bodové a stejnoměrné konvergence) rovněž konvergenci podle normy. Uveďme zde jeden příklad za všechny. Nechť $\mathcal{V} = C(\langle 0, 1 \rangle)$ je prehilbertův prostor funkcí spojitých na $\langle 0, 1 \rangle$ a skalární součin nechť je na něm zaveden standardním vztahem

$$\langle f | g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

Pak jsou zmíněné typy konvergence reprezentovány následujícími ekvivalencemi. Pro bodovou konvergenci posloupnosti $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$f_n(x) \xrightarrow{\langle 0, 1 \rangle} f(x) \Leftrightarrow (\forall x \in \langle 0, 1 \rangle) (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x \in \langle 0, 1 \rangle) : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pro konvergenci posloupnosti $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ podle normy platí:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| = \sqrt{\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx} < \varepsilon.$$

6.7.12 Věta

Nechť je dán prehilbertův a normovaný prostor $\mathcal{V} = C(\langle a, b \rangle)$ se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)w(x) \, dx$$

a normou $\|f(x)\| := \sqrt{\langle f | f \rangle}$, kde $w(x) \in C(\langle a, b \rangle)$ je příslušná váha. Pak platí implikace

$$f_n(x) \xrightarrow{\langle a, b \rangle} f(x) \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Důkaz:

- jelikož je váha $w(x)$ spojitou a nezápornou funkcí na kompaktním intervalu $\langle a, b \rangle$ (viz definice 6.2.14), existuje jistě $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí $w(x) < K$
- zvolme nyní $\varepsilon > 0$ zcela libovolně
- z předpokladu věty vidíme, že pro toto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechny indexy $n \geq n_0$ je

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{K(b-a)}}$$

- pak platí

$$\|f_n(x) - f(x)\|^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 w(x) \, dx \leq (b-a) \cdot \sup_{x \in \langle a, b \rangle} \{|f_n(x) - f(x)|^2 w(x)\} < (b-a) \frac{\varepsilon^2}{K(b-a)K} = \varepsilon^2$$

- tím je prokázáno, že pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí implikace $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

6.8 Hilbertovy prostory

6.8.1 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(x, y)$. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z M je *cauchyovská* v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

6.8.2 Věta

Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je cauchyovská.

Důkaz:

- uvažme posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a předpokládejme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
- z tohoto faktu plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $m \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \varrho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pak pro jakékoli $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, a) + \varrho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

6.8.3 Poznámka

Obrácené tvrzení k tvrzení 6.8.2 ale obecně neplatí. Mohou tedy existovat posloupnosti, jež jsou cauchyovské, ale přesto nejsou konvergentní. Takovou posloupností je například posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ racionálních čísel s euklidovskou metrikou. Snadno se lze přesvědčit, že se o cauchyovskou posloupnost skutečně jedná. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a zkoumejme rozdíl

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right|.$$

Je známo, platí, že $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 4$, kde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ostře roste a $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ostře klesá. Chceme tedy dokázat, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n, m \geq n_0)(|a_n - a_m| < \varepsilon).$$

Snadno ale:

$$|a_n - a_m| \leq \max\{b_m - a_m, b_n - a_n\} = \max\left\{\frac{a_m}{m}, \frac{a_n}{n}\right\} \leq \max\left\{\frac{4}{m}, \frac{4}{n}\right\} < \varepsilon,$$

což lze pro volbu $n_0 := \lfloor \frac{4}{\varepsilon} \rfloor + 1$ garantovat. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je zjevně posloupností racionálních čísel, ale limita v $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ neexistuje, neboť e je iracionální číslo.

6.8.4 Definice

Metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(x, y)$ nazveme *úplným*, jestliže každá cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní.

6.8.5 Poznámka

Metrický prostor $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ racionálních čísel s euklidovskou metrikou není podle poznámky 6.8.3 úplný. Zúplněním prostoru $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$, tj. přidáním limit všech cauchyovských posloupností, vznikne právě prostor $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$.

6.8.6 Poznámka

V předešlých sekcích jsem se seznámil s obecnými normami a obecnými metrikami. Přitom některé normy byly generovány skalárním součinem a jiné ne. Podobně také některé metriky byly generovány normami a jiné ne. My v dalším textu přejdeme ke speciálním prostorům, ve kterých bude zaveden obecný skalární součin, dále norma generovaná tímto součinem a metrika generovaná předešlou normou. Upozorňujeme ale, že mohou existovat i prostory jiného typu, v nichž je např. zavedena metrika nebo norma jiného typu. Zужujeme tedy oblast zkoumání na výše citované prostory, u nichž navíc budeme požadovat úplnost. Korektně je zavedeme v další definici.

6.8.7 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná zadaným skalárním součinem a $\varrho(x, y)$ metrika generovaná výše uvedenou normou. Nechť navíc $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, \varrho\}$ je úplným metrickým prostorem. Pak takový prostor $\mathcal{H} := \{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, \varrho\}$ nazýváme *Hilbertovým prostorem*.

6.8.8 Poznámka

Frekventovaným případem Hilbertova prostoru je prostor $\mathbf{C}^r$ uspořádaných r -tic komplexních čísel definovaný společně se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$, jež je zaveden hermitovskou formou, tj. $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = qq(\vec{x}, \vec{y})$, normou $\|\vec{x}\| = \sqrt{qq(\vec{x}, \vec{x})}$ a metrikou $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{qq(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y})}$. Podobně také $\mathbf{R}^r$ s výše uvedenými vlastnostmi je Hilbertovým prostorem. Speciálně: je-li matice formy $qq(\vec{x}, \vec{y})$ jednotková, vzniká tak nejznámější případ Hilbertova prostoru, prostor Eukleidův.

6.8.9 Definice

Euklidovským r -dimenzionálním prostorem budem rozumět množinu uspořádaných r -tic $\mathbf{R}^r$ společně se standardním skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_s := \sum_{i=1}^r x_i y_i,$$

normou generovanou tímto součinem, tj.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^r x_i^2},$$

a metrikou generovanou touto normou, tj. euklidovskou metrikou

$$\varrho_e(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^r (x_i - y_i)^2}.$$

Tento r -dimenzionální euklidovský prostor, tj. čtveřici $\{\mathbf{R}^r, \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_s, \|\vec{x}\|_e, \varrho_e\}$ budeme označovat souhrnným symbolem $\mathbf{E}^r$.

6.8.10 Věta

Nechť jsou dány Hilbertovy prostory $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ zkonstruované nad stejným vektorovým prostorem $\mathcal{V}$, jež je konečnědimenzionální. Pak pro libovolnou posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ vektorů z $\mathcal{V}$ jsou tvrzení $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v $\mathcal{H}_1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v $\mathcal{H}_2$ ekvivalentní.

Důkaz:

- nechť dle předpokladu $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v $\mathcal{H}_1$
- pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ taková, že $n \geq n_0$ platí $\|\vec{x}_n - \vec{a}\|_1 < \varepsilon$
- přitom symbol $\|\cdot\|_1$ chápeme jako normu na $\mathcal{H}_1$
- z tvrzení věty 6.5.9 plyne, že norma $\|\cdot\|_2$ na $\mathcal{H}_2$ je s normou $\|\cdot\|_1$ ekvivalentní
- existuje tedy (podle definice 6.5.2 ekvivalentních norem) $\alpha \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí nerovnost $\|\vec{x}\|_1 \leq \alpha \|\vec{x}\|_2$

- od výše řečeného n_0 tedy pro indexy n platí $\|\vec{x}_n - \vec{a}\|_2 \leq \alpha \|\vec{x}_n - \vec{a}\|_1 < \alpha \varepsilon =: \tilde{\varepsilon}$, což dokazuje, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v prostoru $\mathcal{H}_2$
- dokázat druhou ekvivalenci je nyní již snadné

6.8.11 Věta

Nechť je dán Hilbertův prostor $\{\mathcal{H}, \|\cdot\|\}$ s metrikou $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbf{R}$. Nechť jsou dány body $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{H}$. Pak

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{z}, \vec{y})$$

právě tehdy, když bod $\vec{z}$ leží na úsečce s krajními body $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Důkaz:

- vyplývá z vět 6.6.27 a 6.6.29

6.8.12 Věta – o spojitosti skalárního součinu

Skalární součin je na každém Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ spojitý, tj. pro každou posloupnost $(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathcal{H}$ konvergující podle normy k $\vec{a} \in \mathcal{H}$ a pro každé $\vec{b} \in \mathcal{H}$ platí rovnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \vec{a}_n | \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \vec{b} | \vec{a}_n \rangle = \langle \vec{b} | \vec{a} \rangle.$$

Důkaz:

- předpokládejme, že $\vec{b} \neq \vec{0}$, neboť pro $\vec{b} = \vec{0}$ je důkaz triviální
- jelikož $\vec{a}_n \rightarrow \vec{a}$ platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$\|\vec{a}_n - \vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}_n - \vec{a} | \vec{a}_n - \vec{a} \rangle} < \frac{\varepsilon}{\|\vec{b}\|}$$

- pro uvedená $n \geq n_0$ odtud ale platí

$$|\langle \vec{a}_n | \vec{b} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle| = |\langle \vec{a}_n - \vec{a} | \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}_n - \vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| < \varepsilon,$$

což dokazuje tvrzení

- druhé tvrzení se dokazuje analogicky

6.9 Klasifikace množin a jejich bodů

V této sekci zavedeme obecný pojem okolí a navazující topologické pojmy, jako jsou otevřená, uzavřená či kompaktní množina. Dále budeme klasifikovat vlastnosti bodů vzhledem k vybraným množinám a vyložíme základní pojmy teorie množin, jako jsou konečnost, spočetnost a nespočetnost.

6.9.1 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{E, \varrho\}$ s libovolnou metrikou ϱ a číslo $\varepsilon > 0$. Okolím o poloměru ε nebo ε -okolím bodu $x \in E$ (při metrice ϱ) rozumíme množinu $\mathcal{U}_\varepsilon(x) := \{y \in E : \varrho(x, y) < \varepsilon\}$. Redukovaným okolím bodu x nazýváme množinu $\mathcal{U}_\varepsilon^*(x) := \mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$. Je-li důležité zvýraznit, při jaké metrice se dané okolí chápe, užíváme symboly ${}^{(\varrho)}\mathcal{U}_\varepsilon(x)$, resp. ${}^{(\varrho)}\mathcal{U}_\varepsilon^*(x)$.

6.9.2 Lemma

Nechť ${}^{(\varrho)}\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ je libovolné okolí v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak pro každé $x, y \in {}^{(\varrho)}\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ platí nerovnost $\varrho(x, y) < 2\varepsilon$.

6.9.3 Věta

Všechna okolí v Hilbertově prostoru jsou konvexními množinami.

Důkaz:

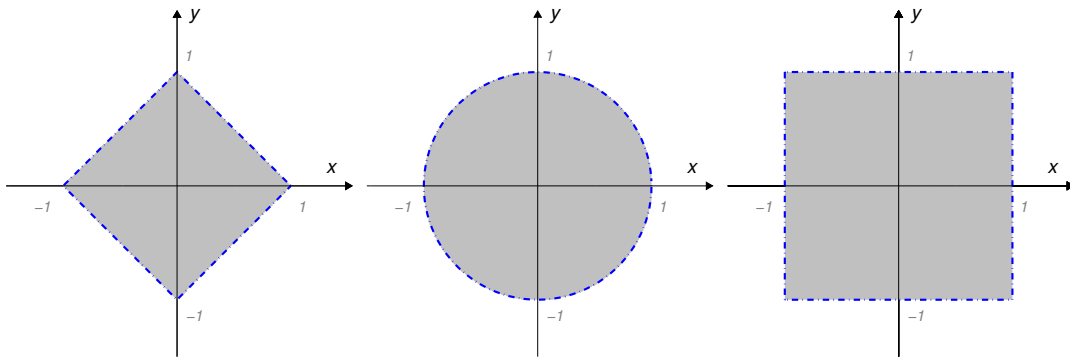
- označme $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor a zvolme libovolně $\vec{a} \in \mathcal{H}$ a $\varepsilon > 0$
- uvažujme okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ a dokažme jeho konvexitu
- proto zvolíme ve $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ libovolně dva různé body $\vec{y}$ a $\vec{z}$ a dokážeme, že body úsečky $\leftrightarrow \vec{y}\vec{z}$ leží v okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$
- nechť $\vec{x}$ je bodem úsečky $\leftrightarrow \vec{y}\vec{z}$
- pak existuje $t \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $\vec{x} = \vec{y} + t(\vec{z} - \vec{y})$
- odtud $\|\vec{x} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{a} + t(\vec{z} - \vec{a} - \vec{y} + \vec{a})\| = \|t(\vec{z} - \vec{a}) + (1-t)(\vec{y} - \vec{a})\| \leq t\|\vec{z} - \vec{a}\| + (1-t)\|\vec{y} - \vec{a}\| < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon$, kde jsme využili faktu, že $\vec{y}$ a $\vec{z}$ jsou z $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$

6.9.4 Příklad

Analyzujeme podobu okolí v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s triviální metrikou. Zvolme tedy $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$ a zkoumejme okolí $(\tau)\mathcal{U}_{1/2}(\vec{a})$, $(\tau)\mathcal{U}_1(\vec{a})$ a $(\tau)\mathcal{U}_2(\vec{a})$. Z definice triviální metriky vyplývá, že okolí $(\tau)\mathcal{U}_{1/2}(\vec{a}) = (\tau)\mathcal{U}_1(\vec{a}) = \{\vec{a}\}$ jsou jednobodová, zatímco okolím bodu $\vec{a}$ o poloměru $\varepsilon = 2$ je celý prostor $\mathbf{R}^2$.

6.9.5 Příklad

Zkoumejme tvary okolí v metrických prostorech $\mathbf{R}^2$ se síťovou metrikou, euklidovskou metrikou a σ -metrikou. Zvolme např. $\vec{a} = (0, 0)$ a znázorněme $\mathcal{U}_1(\vec{a})$ při zmíněných metrikách. Pro body síťového okolí podle definice síťové metriky platí $|x - 0| + |y - 0| < 1$. Z důvodu symetrie postačí vyšetřovat tvar okolí pouze v prvním kvadrantu, kde platí $y < 1 - x$, tj. množinou $(e_1)\mathcal{U}_1(\vec{a})$ je otevřený čtverec (viz obrázek dole vlevo). Pro body euklidovského okolí musí platit $x^2 + y^2 < 1$, a jedná se tudíž o otevřený kruh. Nakonec pro body σ -okolí platí $\max\{|x|, |y|\} < 1$, tj. množinou $(\sigma)\mathcal{U}_1(\vec{a})$ je otevřený čtverec (viz obrázek dole vpravo).



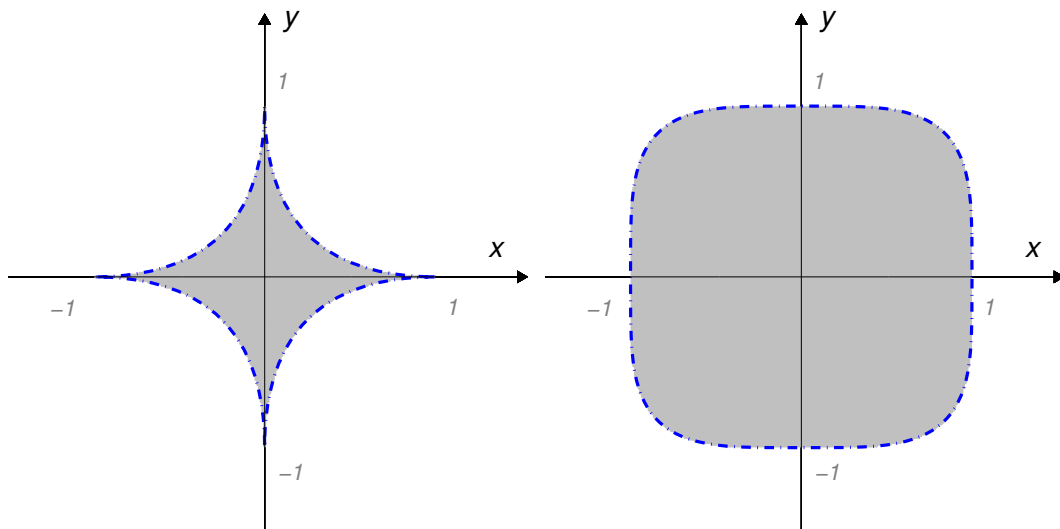
Obrázek 6.35

Síťové okolí, euklidovské okolí a σ -okolí bodu $(0, 0)$ o poloměru $\varepsilon = 1$.

Přejdeme-li k p -metrice, kde $p = 4$, budou body množiny $(e_4)\mathcal{U}_1(\vec{a})$ vyhovovat rovnici $x^4 + y^4 < 1$, tj. v prvním kvadrantu má hranice zkoumaného okolí rovnici $y = \sqrt[4]{1 - x^4}$ (viz obrázek 6.36 vpravo). Připomínáme, že definiční vztah (6.28) není pro $p < 1$ metrikou (viz obrázek 6.36 vlevo). Demonstrujme to na příkladě $p = 1/2$ a $\vec{x} = (0, 4)$, $\vec{y} = (4, 0)$ a $\vec{z} = (0, 0)$. Za těchto okolností by platilo

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \left((x_1 - y_1)^{1/2} + (x_1 - y_1)^{1/2} \right)^2 = (2 + 2)^2 = 16$$

a zároveň $\varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{y}, \vec{z}) = 4 + 4 = 8$. Tím pádem by ale neplatila trojúhelníková nerovnost, neboť $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) > \varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{y}, \vec{z})$. To odporuje třetímu axiomu metriky. Tedy množina $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$ (viz obrázek vlevo dole) není okolím.

**Obrázek 6.36**

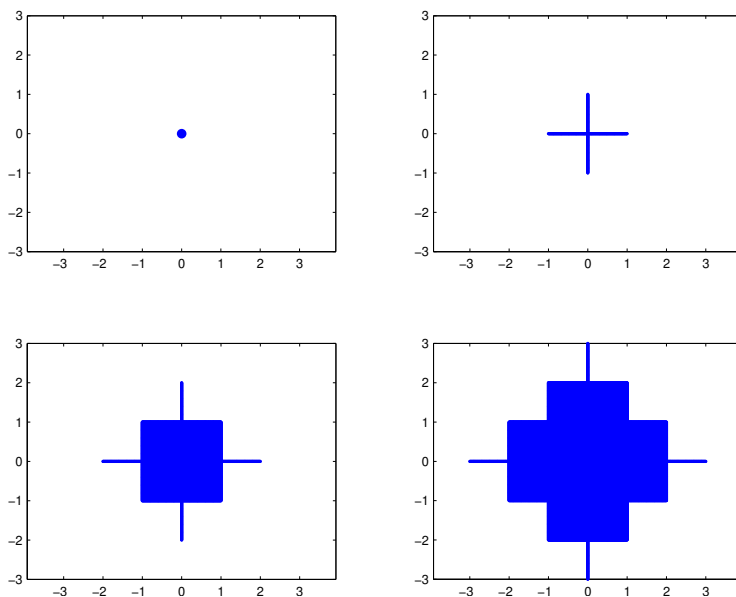
Grafická reprezentace χ_p —okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 1$, kde $p = 1/2$,
 a_{ϱ_p} —okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 1$, kde $p = 4$.

Z poznámky 6.6.12 vyplývá, že pro jakékoliv $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$, $\varepsilon > 0$ a $p > 2$ platí série inkluzí

$$({}_{\varrho_1})\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a}) \subset ({}_{\varrho_\varepsilon})\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a}) \subset ({}_{\varrho_p})\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a}) \subset ({}^\sigma)\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a}).$$

6.9.6 Příklad

Zkonstruuje nyní okolí bodu $(0,0)$ při skokové metrice (6.31) zavedené na prostoru $\mathbf{R}^2$. Zajímá nás budou okolí $\mathcal{U}_{1/2}(0,0)$, $\mathcal{U}_{3/2}(0,0)$, $\mathcal{U}_{5/2}(0,0)$ a $\mathcal{U}_{7/2}(0,0)$.

**Obrázek 6.37**

Grafická reprezentace okolí bodu $(0,0)$ při skokové metrice. Jedná se o okolí $\mathcal{U}_{1/2}(0,0)$, $\mathcal{U}_{3/2}(0,0)$, $\mathcal{U}_{5/2}(0,0)$ a $\mathcal{U}_{7/2}(0,0)$.

Povšimněme si, že žádná z vykreslených množin (až na první banální případ) není konvexní množinou. To mimo jiné plyne z faktu, že skoková metrika není (a nemůže být) generována žádným skalárním součinem. Jinak by totiž mohlo být uplatněno znění věty 6.9.3.

6.9.7 Úmluva

V celé sekci předpokládáme, že je dán metrický prostor $\{E, \varrho\}$ s obecnou metrikou ϱ .

6.9.8 Definice

Bod $x \in M$ nazveme *vnitřním bodem množiny* $M \subset E$, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ takové, že $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů M nazýváme *vnitřkem množiny* M a značíme M° . Bod $x \in E$ nazveme *hraničním bodem* množiny M , jestliže ke každému okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ existují $y, z \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$ takové, že $y \in M$ a zároveň $z \notin M$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme *hranicí množiny* M a značíme $\text{bd}(M)$ nebo ∂M . Množinu $\overline{M} := M \cup \text{bd}(M)$ nazýváme *uzávěrem množiny* M .

6.9.9 Definice

Řekneme, že množina M je *otevřená* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže $M = M^\circ$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže $M = \overline{M}$.

6.9.10 Poznámka

Pojmy otevřenosti a uzavřenosti nejsou z matematického hlediska doplňkové. Existují totiž množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené. Jde například o množinu $\mathbf{R}$ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$. Navíc významně záleží na tom, jakou metriku uvažujeme. Tak zvaný uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ je v prostoru $\mathbf{R}$ s euklidovskou metrikou skutečně uzavřený, ale v prostoru $\mathbf{R}$ s triviální metrikou metrikou je otevřený i uzavřený zároveň.

6.9.11 Věta

Nechť je množina M otevřená v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak $E \setminus M$ je v $\{E, \varrho\}$ uzavřenou množinou. Nechť je množina N uzavřená v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak $E \setminus N$ je v $\{E, \varrho\}$ otevřenou množinou.

Důkaz:

- postačí si uvědomit, že $\text{bd}(M) = \text{bd}(E \setminus M)$ a podobně $\text{bd}(N) = \text{bd}(E \setminus N)$
- jelikož pro jakoukoli množinu X platí rovnost $\text{bd}(X) \cap X^\circ = \emptyset$, je tvrzení dokázáno

6.9.12 Věta

Nechť A a B jsou otevřené množiny v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak také $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou v $\{E, \varrho\}$ otevřené.

Důkaz:

- Pro průnik:
 - nechť $A = A^\circ$ a $B = B^\circ$
 - zvolme $x \in A \cap B$, tedy $x \in A$ a $x \in B$
 - jelikož $A = A^\circ$, existuje $\varepsilon_1 > 0$ tak, že $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(x) \subset A$
 - jelikož $B = B^\circ$, existuje $\varepsilon_2 > 0$ tak, že $\mathcal{U}_{\varepsilon_2}(x) \subset B$
 - položíme $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$
 - pak $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset (A \cap B)$
 - x je tedy vnitřním bodem průniku $A \cap B$
- Pro sjednocení:
 - nechť $A = A^\circ$ a $B = B^\circ$
 - zvolme $x \in A \cup B$, tedy $x \in A$ nebo $x \in B$
 - nechť tedy např. $x \in A$
 - pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset A \subset (A \cup B)$
 - našli jsme tedy okolí bodu x , které celé leží ve sjednocení $A \cup B$
 - tím je důkaz proveden

6.9.13 Věta

Nechť A a B jsou uzavřené množiny v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak také $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou v $\{E, \varrho\}$ uzavřené.

Důkaz:

- plyne z vět 6.9.11 a 6.9.12

6.9.14 Důsledek

Sjednocení a průnik konečného počtu otevřených množin je množina otevřená. Sjednocení a průnik konečného počtu uzavřených množin je množina uzavřená.

6.9.15 Lemma

Sjednocení spočetného počtu otevřených množin je množina otevřená. Průnik spočetného počtu uzavřených množin je množina uzavřená.

6.9.16 Poznámka

Povšimněte si například, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \langle 0, 1 \rangle, \quad \bigcup_{n=3}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle = (0, 1).$$

6.9.17 Věta

Každé okolí je otevřenou množinou.

Důkaz:

- uvažme bod a a jeho okolí $\mathcal{U}_{\varepsilon}(a)$
- zvolme libovolně $x \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(a)$ a označme $\mu := \varrho(a, x)$
- je-li $\mu = 0$, pak přímo $\mathcal{U}_{\varepsilon}(x)$ je oním hledaným okolím, které celé leží v $\mathcal{U}_{\varepsilon}(a)$
- je-li $\mu \neq 0$, pak položme $\delta := \varepsilon - \mu > 0$
- tvrdíme, že $\mathcal{U}_{\delta}(x) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon}(a)$ a to dokážeme
- vezměme $c \in \mathcal{U}_{\delta}(x)$ a ukažme, že $c \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(a)$
- z axiomu trojúhelníkové nerovnosti metriky platí $\varrho(a, c) \leq \varrho(a, x) + \varrho(x, c) < \mu + \delta = \varepsilon$
- všechny body c tudíž leží v $\mathcal{U}_{\varepsilon}(a)$, a tedy skutečně $\mathcal{U}_{\delta}(x) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon}(a)$

6.9.18 Poznámka

Za povšimnutí stojí fakt, že v metrických prostorech s triviální, popř. skokovou metrikou je hranice každé množiny prázdná a každá množina je tudíž zároveň otevřená i uzavřená.

6.9.19 Poznámka

V Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ konečné dimenze jsou podle věty 6.5.9 každé dvě normy ekvivaletní. Proto také vlastnosti otevřenosti či uzavřenosti zůstávají při změně výchozího skalárního součinu, který generuje normu i metriku na $\mathcal{H}$, v platnosti.

6.9.20 Definice

Bod $x \in M$ nazveme *izolovaným bodem* množiny M , jestliže existuje okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ tak, že $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$. Bod $x \in \overline{M}$ nazveme *hromadným bodem* množiny M , není-li v ní bodem izolovaným. Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme *derivací množiny* M a značíme $\text{der}(M)$.

6.9.21 Příklad

Pro síťovou, euklidovskou a sigma metriku platí vztah $\text{der}(\mathcal{U}_\varepsilon(x)) = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(x)}$. Naproti tomu pro každou podmnožinu A metrického prostoru s triviální nebo skokovou metrikou platí, že $\text{der}(A) = \emptyset$, tj. všechny body v A jsou izolované.

6.9.22 Definice

Množina $M \subset E$ se nazývá *omezenou* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže existuje $y \in E$ a existuje $K \in \mathbf{R}^+$ tak, že nerovnost $\varrho(x, y) \leq K$ platí pro všechna $x \in M$.

6.9.23 Poznámka

Při zjišťování, zda je množina M omezená, je opět zcela zásadní, při jaké metrice tuto vlastnost vyšetřujeme. Například interval $(0, \infty)$ zcela jistě neomezený v $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$, je v prostoru $\mathbf{R}$ s triviální metrikou omezený, neboť například pro $y = 0$ a $K = 2$ je nerovnost $\varrho(x, y) \leq K$ splněna pro všechna $x \in (0, \infty)$.

6.9.24 Definice

Řekneme, že množina M je *kompaktní* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže z každé posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ prvků $x_n \in M$ lze vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží v M .

6.9.25 Příklad

Množina $(0, 2)$ není kompaktní v euklidovském prostoru $\mathbf{E}^1$, neboť z posloupnosti $(1/n)_{n=1}^\infty$ nelze vybrat žádnou jinou konvergentní posloupnost než takovou, jejíž limitou v $\{\mathbf{E}^1, \varrho_e\}$ je nula. Nula ale do množiny $(0, 2)$ nepatří, tudíž $(0, 2)$ není v $\{\mathbf{E}^1, \varrho_e\}$ kompaktní.

6.9.26 Věta

Nechť M je kompaktní množina v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak M je omezená a uzavřená v $\{E, \varrho\}$.

Důkaz:

- nechť tedy M je kompaktní v $\{E, \varrho\}$
- dokážeme nejprve omezenost M :
 - zvolme $y \in E$ libovolně
 - předpokládejme pro spor, že M není omezená
 - pak pro každé $K > 0$ existuje jistě $x \in M$ tak, že $\varrho(x, y) > K$
 - vyberme touto procedurou pro každé K rovné po řadě hodnotám $1, 2, 3, \dots$ taková $x_1, x_2, x_3, \dots$
 - pak jistě $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ neexistuje a nelze z ní ani vybrat žádnou nekonečnou podposloupnost $(x_{n_k})_{n=1}^\infty$ takovou, aby pro nějaké $a \in E$ od jistého indexu platilo $\varrho(x_m, a) < \varepsilon$
 - to je ale spor
- dokážeme dále uzavřenost M :
 - předpokládejme pro spor, že M není uzavřená
 - pak ale jistě existuje nějaké $a \in \text{bd}(M)$ takové, že $a \notin M$
 - a je tedy v M hraničním bodem, a tudíž v každém jeho okolí lze nalézt nějaký bod z M
 - nechť tedy x_ℓ je libovolný bod ležící v $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap M$, kde $\varepsilon = \ell^{-1}$ pro $\ell = 1, 2, 3, \dots$
 - posloupnost $(x_\ell)_{\ell=1}^\infty$ je zjevně konvergentní a platí $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_\ell = a$, ale $a \notin M$
 - z posloupnosti $(x_\ell)_{\ell=1}^\infty$ již nelze vybrat žádnou podposloupnost, jež by měla jinou limitu než a
 - to je očekávaný spor

6.9.27 Poznámka

Obrácené tvrzení k předešlému neplatí. Existuje tedy množina, jež je omezená a uzavřená v $\{E, \varrho\}$, ale přesto není kompaktní. Uvažme například $M = \langle 0, 1 \rangle$ v prostoru $\mathbf{R}$ s triviální metrikou. M je zcela jistě omezená a uzavřená, neboť všechny množiny z $\{\mathbf{R}, \tau\}$ tyto dvě vlastnosti splňují. Z posloupnosti $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ však nelze v $\{\mathbf{R}, \tau\}$ vybrat konvergentní. Za určitých okolností však obrácené tvrzení k předešlému platí, jak uvidíme v následující větě.

6.9.28 Věta

Množina M je kompaktní v Hilbertově prostoru $\mathbf{R}^r$ právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Důkaz:

- díky ekvivalentnosti všech norem v Hilbertově prostoru postačí dokázat, že dané tvrzení platí v euklidovském prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho_e\}$
- implikace zprava doleva je univerzální a byla již dokázána ve větě 6.9.26
- předpokládejme tedy, že M je omezená a uzavřená v $\{\mathbf{R}^r, \varrho_e\}$
- vyberme libovolně posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků $x_n \in M$
- je-li $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, označme $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- ukážeme, že $a \in M$
- kdyby $a \notin \overline{M}$, pak by jistě existovalo okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ takové, že $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$
- pak by ale a jistě nemohlo být limitou posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
- proto $a \in \overline{M}$, a protože $M = \overline{M}$, je $a \in M$
- je-li $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ divergentní, označme a libovolný hromadný bod posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
- jelikož M je omezená, je také posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená, a tudíž podle věty 6.7.8 má jistě hromadný bod, který leží v $\mathbf{R}^r$
- dále analogicky
- kdyby $a \notin \overline{M}$, pak by jistě existovalo okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ takové, že $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$
- pak by ale a jistě nemohlo být hromadným bodem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
- proto $a \in \overline{M}$, a protože $M = \overline{M}$, je $a \in M$
- tím je důkaz dokončen

6.9.29 Věta – Cantorova

Nechť je dána posloupnost neprázdných kompaktních množin A_n , pro které platí série inkluzí

$$A_{n+1} \subset A_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Pak $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \emptyset$.

Bez důkazu.

6.9.30 Poznámka

Předpoklad kompaktnosti je v předešlé větě velice důležitý, jak lze potvrdit na následujícím příkladě. Uvažme sadu podmnožin tvaru $(0, 1) \supset (0, \frac{1}{2}) \supset (0, \frac{1}{4}) \supset \dots$. Pro tu ale platí, že $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$.

6.9.31 Definice

Nechť jsou dány dvě množiny M_1 a M_2 v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Řekneme, že množiny M_1, M_2 jsou *disjunktní* v $\{E, \varrho\}$, jestliže $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Řekneme, že množiny M_1, M_2 jsou *oddělené* v $\{E, \varrho\}$, jestliže

$$M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset \quad \wedge \quad \overline{M_1} \cap M_2 = \emptyset.$$

6.9.32 Poznámka

Je třeba si uvědomit, že pojem oddělené množiny je silnějším pojmem než pojem disjunktní množiny. Tedy každé dvě oddělené množiny jsou nutně disjunktní, ale ne každé dvě disjunktní množiny jsou nutně oddělené. Navíc také záleží na tom, při jaké metrice vlastnost oddělenosti zkoumáme.

6.9.33 Definice

Řekneme, že množina M je *souvislá* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže neexistují žádné dvě neprázdné oddělené množiny $M_1, M_2 \subset E$ takové, že $M_1 \cup M_2 = M$.

6.9.34 Příklad

Uvažme množinu $A = \langle 0, 7 \rangle$ a pokusme se rozhodnout, je-li souvislá v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho_j\}$ se skokovou metrikou. Dopředu podotýkáme, že A je zjevně souvislá v $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$. Položme $M_1 = \langle 0, 4 \rangle$ a $M_2 = \langle 4, 7 \rangle$. Obě jsou neprázdné a $M_1 \cup M_2 = A$. Jelikož $\text{bd}(M_1) = \text{bd}(M_2) = \emptyset$, je $M_1 = \overline{M_1}$, $M_2 = \overline{M_2}$, $M_2 \cap \overline{M_1} = \emptyset$ a $M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset$. Množina A tedy v $\{\mathbf{R}, \varrho_j\}$ souvislá není.

6.9.35 Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}^r$ je *oblastí* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, je-li v $\{E, \varrho\}$ otevřená a souvislá. Uzávěr oblasti pak nazýváme *uzavřenou oblastí*.

6.9.36 Definice

Řekneme, že množiny A, B jsou *ekvivalentní* a označíme symbolem $A \sim B$, existuje-li mezi nimi bijektivní zobrazení.

6.9.37 Poznámka

Např. množina $(0, \pi/2)$ je ekvivalentní množině $(0, \infty)$, neboť bijektivní zobrazení $f(x) = \arctg(x)$ zobrazuje interval $(0, \pi/2)$ na $(0, \infty)$.

6.9.38 Definice

Množinu A nazveme *konečnou*, je-li buď prázdná nebo existuje-li $n \in \mathbf{N}$ tak, že $A \sim \hat{n}$. Množinu, jež není konečná, nazveme *nekonečnou*. Množinu A nazveme *spočetnou*, je-li buď prázdná nebo existuje-li množina $M \subset \mathbf{N}$, taková, že $A \sim M$. Množinu, jež není spočetná, nazveme *nespočetnou*.

6.9.39 Věta

Každá konečná množina je spočetná. Každá podmnožina konečné množiny je konečná. Každá podmnožina spočetné množiny je spočetná.

Důkaz:

- plyne přímo z definice

6.9.40 Příklad

Množina $A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ je konečná, a tedy spočetná. Naproti tomu množina $\mathbf{Q}$ je sice rovněž spočetná (viz věta 6.9.41), neboť $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$, ale není konečná. Množina $\mathbf{R}$, a tudíž i $\mathbf{C}$, je nespočetná a tedy nekonečná.

6.9.41 Věta

Množina $\mathbf{Q}$ racionálních čísel je spočetná.

Důkaz:

- ukážeme nejprve, že množina P všech uspořádaných dvojic $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je spočetná
- uspořádané dvojice (m, n) budeme z pochopitelných důvodů ztotožňovat se zlomky tvaru $\frac{m}{n}$
- to lze nahlédnout z následující tabulky

	1	2	3	4	5	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	
...						$\ddots$

- začneme-li jednotlivým buňkám přiřazovat přirozená čísla v pořadí $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$ atd., vytvoříme tím bijektivní zobrazení mezi množinou P a množinou $\mathbf{N}$
- tedy P je spočetná
- nyní si pouze uvědomíme, že množina kladných racionálních čísel je ekvivalentní s jistou podmnožinou R množiny P
- jelikož ale R je také spočetná (podle věty 6.9.39), je zřejmě i množina $\mathbf{Q}^+$ spočetná
- navíc $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+$, a podle výsledku cvičení 6.39 tedy i sama množina $\mathbf{Q}$ je spočetná

6.9.42 Věta

Množina $\mathbf{R}$ reálných čísel je nespočetná.

Důkaz:

- důkaz pomocí Cantorovy věty 6.9.29:
 - předpokládejme pro spor, že existuje očíslování všech reálných čísel čísly přirozenými a všechna reálná čísla jsou seřazena do posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$
 - vybíráme postupně uzavřené intervaly I_n tak, aby $I_{n+1} \subset I_n$ a $x_n \notin I_n$
 - pak $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ je průnikem uzavřených do sebe vnořených intervalů, tedy je podle Cantorovy věty neprázdný
 - zároveň však nemůže obsahovat žádné reálné číslo, neboť každé takové číslo je nějaké x_n , což není již v I_n , a tedy ani v průniku
- důkaz pomocí diagonální metody
 - jistě postačí dokázat, že $\langle 0, 1 \rangle$ není spočetná
 - předpokládejme pro spor, že existuje očíslování všech reálných čísel z $\langle 0, 1 \rangle$ čísly přirozenými a všechna reálná čísla jsou seřazena do posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$
 - vypíšme pod sebe desítkové zápisy x_n (zakážeme-li sufix 99999..., pak jsou jednoznačné)
 - tedy např. $x_1 = 0.145627\dots$, $x_2 = 0.3415998\dots$ atd.
 - definujeme číslo z tak, že jeho j -tá cifra ($z_{\mathbb{H}j}$) je rovna $z_{\mathbb{H}j} = 5$, pokud j -tá cifra čísla x_j není rovna pěti, jinak $z_{\mathbb{H}j} = 7$
 - tak získáme nové reálné číslo, které není v posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$, čímž jsme obdrželi hledaný spor

6.10 Ortogonální polynomy

V nadcházejícím oddílu zavedeme nejznámější zástupce třídy tzv. ortogonálních polynomů generovaných na vektorových prostorech spojitých funkcí.

6.10.1 Příklad

Pokusme se na obecném uzavřeném omezeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ zkonstruovat z lineárně nezávislého souboru

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

ortonormální bázi. Pro normalizaci volíme standardní Gramovu-Schmidtovu proceduru (6.4.14) prováděnou při standardním funkčním skalárním součinu (6.20). Celý výpočet provedeme bez újmy na obecnosti pro speciální volbu $\alpha = -1$ a $\beta = 1$, tj. proces normalizace provádíme na prostoru $C(\langle -1, 1 \rangle)$. Za první funkci v nově vznikajícím ortogonálním souboru klademe $\omega_0 = 1$ a druhou podle Gramova-Schmidtova schématu hledáme ve tvaru $\omega_1(x) = x + a$. Podmínka ortogonalit pak vede na rovnost

$$\langle \omega_0 | \omega_1 \rangle = \int_{-1}^1 (x + a) dx = 2a = 0.$$

Proto $\omega_1(x) = x$. Dále uvažujeme $\omega_2(x) = x^2 + bx + c$. Dvě podmínky ortogonalit tentokrát vedou na dvě rovnosti

$$\langle \omega_0 | \omega_2 \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 + bx + c) dx = \frac{2}{3} + 2c = 0.$$

$$\langle \omega_1 | \omega_2 \rangle = \int_{-1}^1 x(x^2 + bx + c) dx = \frac{2}{3}b = 0.$$

Odtud $b = 0$ a $c = -\frac{1}{3}$. Proto $\omega_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Analogickým postupem bychom ze systému funkcí $\omega_3(x) = x^3 + dx^2 + ex + f$ vybrali díky třem podmínkám ortogonalit

$$\langle \omega_0 | \omega_3 \rangle = \langle \omega_1 | \omega_3 \rangle = \langle \omega_2 | \omega_3 \rangle = 0$$

funkci $\omega_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. Naznačený postup tudíž vede k přímé konstrukci ortogonální báze v prostoru $C(\langle -1, 1 \rangle)$. Její normalizaci provedeme snadno. Jelikož

$$\|\omega_0\|^2 = \int_{-1}^1 \omega_0^2(x) dx = 2,$$

je prvním normovaným vektorem hledané ortonormální báze funkce $L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Stejnou metodou snadno zjišťujeme, že další polynomy ortonormální báze jsou tvaru

$$L_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad L_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad L_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}\frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad \dots$$

Ačkoliv je tato metoda úplná a vede postupně k nalezení celé ortonormální báze v prostoru $C(\langle -1, 1 \rangle)$, je její praktické provedení poněkud zdlouhavé. Nabídneme proto schůdnější variantu, jak takovou bázi sestavit.

6.10.2 Příklad – Legendreovy polynomy

Zachovejme značení z předešlého příkladu a uvažme, že každá z funkcí $\omega_n(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$ je polynodem řádu n . Má proto smysl předpokládat, že existuje polynom $Y(x)$ stupně $\deg(Y) = 2n$ tak, že

$$\omega_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} Y(x) = Y^{(n)}(x).$$

Označme $\wp(x)$ libovolný polynom stupně $\deg(\wp) = m < n$ menšího než n . Pak po násobné aplikaci metody per partes platí

$$\begin{aligned} \langle \omega_n | \wp \rangle &= \int_{-1}^1 \omega_n(x) \wp(x) dx = \int_{-1}^1 Y^{(n)}(x) \wp(x) dx = \left[\wp(x) Y^{(n-1)}(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \wp'(x) Y^{(n-1)}(x) dx = \\ &= \left[\wp(x) Y^{(n-1)}(x) - \wp'(x) Y^{(n-2)}(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \wp''(x) Y^{(n-2)}(x) dx = \dots = \end{aligned}$$

$$= \left[\wp(x)Y^{(n-1)}(x) - \wp'(x)Y^{(n-2)}(x) + \dots + (-1)^n \wp^{(n-1)}(x)Y(x) \right]_{-1}^1.$$

Má-li získaný výraz být nulový, což je požadováno z důvodů ortogonalit $\langle \omega_n | \omega_m \rangle = 0$ pro všechna $m < n$, je třeba docílit nulovosti výrazu

$$\left[\wp(x)Y^{(n-1)}(x) - \wp'(x)Y^{(n-2)}(x) + \dots + (-1)^n \wp^{(n-1)}(x)Y(x) \right]_{-1}^1 = 0$$

vhodnou volnou polynomu $Y(x)$. Pro nulovost výše uvedeného výrazu postačí, aby čísla $x = -1$ i $x = 1$ byla n -násobným kořenem polynomu $Y(x)$. Proto tedy položíme $Y(x) = (x-1)^n(x+1)^n$. Odtud

$$\omega_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

Nyní zbývá tyto polynomy normalizovat. Snadno

$$\begin{aligned} \|\omega_n(x)\|^2 &= \int_{-1}^1 Y^{(n)}(x)Y^{(n)}(x) dx = \left[Y^{(n)}(x)Y^{(n-1)}(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Y^{(n+1)}(x)Y^{(n-1)}(x) dx = \\ &= \left[Y^{(n)}(x)Y^{(n-1)}(x) - Y^{(n+1)}(x)Y^{(n-2)}(x) - \dots + (-1)^{n+1}Y^{(2n-1)}(x)Y(x) \right]_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 Y^{(2n)}(x)Y(x) dx = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 Y^{(2n)}(x)Y(x) dx = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin(t) \\ dx = \cos(t) dt \end{array} \right| = \\ &= 2(2n)! \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(x) dx = 2(2n)! \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1} [(2n)!!]^2. \end{aligned}$$

Normalizovaný tvar zkoumaných polynomů má tedy podobu

$$L_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n). \quad (6.32)$$

6.10.3 Definice

Polynomy $L_n(x)$ z rovnice (6.32) nazýváme *Legendreovými polynomy* a rovnici (6.32) *Rodriguesovou formulí* pro Legendreovy polynomy.

6.10.4 Příklad – Legendreova diferenciální rovnice

Pokusme se nyní odvodit diferenciální rovnici, jíž řeší výše zavedené Legendreovy polynomy. Vycházejme přitom z rovnosti $Y(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ a derivujme ji podle proměnné x . Po drobné úpravě obdržíme rovnici

$$Y'(x^2 - 1) = 2nxY.$$

Derivujme ji dále $(n+1)$ krát podle x . Dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} Y^{(n+2+i)}(x^2 - 1)^{(i)} = 2n \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{(i)} Y^{(n+1-i)}$$

a po dalších úpravách

$$Y^{(n+2)} + 2(n+1)xY^{(n+1)} + n(n+1)Y^{(n)} = 2n \left(xY^{(n+1)} + (n+1)Y^{(n)} \right),$$

čili

$$(x^2 - 1)Y^{(n+2)} + 2xY^{(n+1)} = n(n+1)Y^{(n)}.$$

Ze vztahu (6.32) pak odtud získáváme hledanou diferenciální rovnici

$$(x^2 - 1)L''(x) + 2xL'(x) = n(n+1)L(x).$$

6.10.5 Definice

Diferenciální rovnici

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \quad (6.33)$$

nazýváme *Legendreovou diferenciální rovnicí*.

6.10.6 Poznámka

Rovnici (6.33) lze také přepsat do tvaru $((x^2 - 1)y')' - n(n+1)y = 0$. Legendreovy polynomy jsou tedy jejími řešeními.

6.10.7 Poznámka

Další z bází, která může být standardním ortonormalizačním procesem převedena na bázi ortonormální, je báze

$$(e^{-\frac{x}{2}}, xe^{-\frac{x}{2}}, x^2e^{-\frac{x}{2}}, x^3e^{-\frac{x}{2}}, \dots).$$

Tentokrát ale klademe za analyzovaný vektorový prostor $C(\langle 0, \infty \rangle)$, Skalární součiny mezi funkcemi tvaru $x^n e^{-\frac{x}{2}}$ budou mít podobu $\int_0^\infty x^{n+m} e^{-x} dx$. Proto je úloha normalizovat výše uvedenou množinu ekvivalentní úloze normalizovat množinu $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ vzhledem k Laguerreovu skalárnímu součinu

$$\langle f|g \rangle_{e^{-x}} := \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx. \quad (6.34)$$

Polynomy ortogonální vzhledem k tomuto skalárnímu součinu budeme nazývat Laguerreovými polynomy.

6.10.8 Příklad – Laguerreovy polynomy

Způsobů, jak zavést Laguerreovy polynomy, je více. Zřejmě nejobvyklejším je zavedení pomocí diferenciálního výrazu

$$\widetilde{L}_n(x)e^{-x} = \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.35)$$

nazývaného (podobně jako u Legendreových polynomů) Rodriguesovou formulí. Pomocí Leibnizovy formule pro derivování součinu dostaneme explicitní výraz Laguerreových polynomů ve tvaru

$$\widetilde{L}_n(x)e^{-x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} = e^{-x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k},$$

a tedy

$$\widetilde{L}_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n(n-1) \dots (n-k+1))^2}{k!} x^{n-k},$$

což reprezentuje zjevně polynom stupně n . Snadno ukážeme, že se jedná o ortogonální polynomy při skalárním součinu s vahou e^{-x} , neboť platí, že

$$\langle x^k | \widetilde{L}_n(x) \rangle_{e^{-x}} = 0 \quad (k < n).$$

To prokážeme následujícím výpočtem. Zjevně

$$\langle x^k | \widetilde{L}_n(x) \rangle_{e^{-x}} = \int_0^\infty e^{-x} x^k \widetilde{L}_n(x) dx = \int_0^\infty x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx$$

a násobným použitím integrace per partes pak

$$\begin{aligned} \langle x^k | \widetilde{L}_n(x) \rangle_{e^{-x}} &= \underbrace{\left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \right]_0^\infty}_{=0} - k \int_0^\infty x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx = \dots = \\ &= (-1)^k k! \int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) dx = (-1)^k k! \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^n e^{-x}) \right]_0^\infty = 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Poslední rovnost je skutečně zaručena právě pro všechna $k < n$, neboť vždy po provedení $(n - k - 1)$ derivací bude stupeň polynomu před e^{-x} větší nebo roven jedné. Tedy Laguerreovy polynomy jsou skutečně ortogonální. Zbývá spočítat normu. Analogickými úpravami dostáváme

$$\|\widetilde{L}_n(x)\|^2 = \int_0^\infty e^{-x} \widetilde{L}_n^2(x) dx = \int_0^\infty e^{-x} \widetilde{L}_n(x) (-1)^n x^n dx = (-1)^{2n} n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (n!)^2.$$

Normalizovaný tvar vyšetřovaných polynomů je tedy

$$L_n(x) = \frac{1}{\|\widetilde{L}_n(x)\|} \widetilde{L}_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (6.37)$$

6.10.9 Definice

Polynomy $L_n(x)$ z rovnice (6.37) nazýváme *Laguerreovými polynomy* a rovnici (6.37) *Rodriguesovou formulí* pro Laguerreovy polynomy.

6.10.10 Příklad – Laguerreova diferenciální rovnice

Jiný možný způsob zavedení ortogonálních polynomů je za pomoci rekurentního vztahu. Pro Laguerreovy polynomy má tento rekurentní vztah podle [11] podobu

$$L_{n+1}(x) - (2n + 1 - x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.38)$$

Ekvivalence zavedení Laguerreových polynomů pomocí Rodriguesovy formule či pomocí tohoto rekurentního vztahu je prověřena také v [11]. Důležitý vztah obdržíme také derivováním rovnice (6.35), a sice

$$L_{n+1}(x)e^{-x} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}e^{-x}) = x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^n e^{-x}) + (n+1) \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = x \frac{d}{dx}(L_n(x)e^{-x}) + (n+1)L_n(x)e^{-x},$$

což přenásobením rovnice funkcí e^x převedeme na

$$L_{n+1}(x) = x(L'_n(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x).$$

Nyní kombinováním posledního vztahu s rekurentním vzorcem (6.38) obdržíme rovnici

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x). \quad (6.39)$$

Sečteme-li dále rovnice (6.39) vyjádřené pro n a $n+1$, získáme

$$x(L'_{n+1}(x) - (n+1)L'_n(x)) = (n+1)(L_{n+1}(x) - (2n+1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x))$$

a po dosazení zderivovaného rekurentního vztahu (6.38) odtud plyne

$$L'_n(x) = nL'_{n-1}(x) - nL_{n-1}(x).$$

Ještě si přepíšeme tuto rovnici pro $n+1$: $L'_{n+1}(x) = (n+1)L'_n(x) - (n+1)L_n(x)$. Zbývá zderivovat vztah (6.39)

$$nL'_n(x) - xL''_n(x) - L'_n(x) = n^2 L'_{n-1}(x)$$

a sečtení posledních dvou uvedených rovnic spolu se zderivovaným rekurentním vztahem

$$L'_{n+1}(x) - (2n+1-x)L'_n(x) + L_n(x) + n^2 L'_{n-1}(x) = 0$$

vede na diferenciální rovnici

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

jejímž řešením jsou právě Laguerreovy polynomy.

6.10.11 Definice

Diferenciální rovnici

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (6.40)$$

nazýváme *Laguerreovou diferenciální rovnici*.

6.10.12 Poznámka

Rovnici (6.40) lze také přepsat do tvaru $xy'' + (1-x)y' = \lambda y$, což je úloha na hledání vlastních hodnot diferenciálního operátoru

$$\hat{L} = x \frac{d^2}{dx^2} + (1-x) \frac{d}{dx}.$$

6.10.13 Poznámka

Bázi v prostoru $C(\mathbf{R})$ všech spojitých funkcí na $\mathbf{R}$, která může být podobně jako v předešlých případech ortonormalizována, je báze

$$(e^{-\frac{x^2}{2}}, xe^{-\frac{x^2}{2}}, x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}, x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}, \dots).$$

Tentokrát je voleno $G = \mathbf{R}$. Skalární součiny mezi funkcemi tvaru $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ budou mít podobu $\int_0^\infty x^{n+m} e^{-x^2} dx$. Proto je úloha normalizovat výše uvedenou množinu ekvivalentní úloze normalizovat množinu $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ vzhledem k nově zavedenému skalárnímu součinu

$$\langle f|g \rangle_{e^{-x^2}} := \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)e^{-x^2} dx. \quad (6.41)$$

Polynomy ortogonální vzhledem k tomuto skalárnímu součinu budeme nazývat Hermiteovými polynomy.

6.10.14 Příklad – Hermiteovy polynomy

Zřejmě nejjednodušší zavedení Hermiteových polynomů je pomocí diferenciálního výrazu

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = (-1)^n e^{-x^2} \tilde{H}_n(x), \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad (6.42)$$

jež se opět nazývá Rodriguesovou formulí. Čtenář sám se snadno přesvědčí, že se jedná skutečně o polynom n -tého stupně s nejvyšším koeficientem rovným 2^n . K tomu lze užít derivaci předchozího vztahu pro $n+1$

$$(-1)^{n+1} e^{-x^2} \tilde{H}_{n+1}(x) = (-1)^n e^{-x^2} (-2x \tilde{H}_n(x) + \tilde{H}'_n(x)). \quad (6.43)$$

Polynomy $\tilde{H}_n(x)$ se nazývají Hermiteovy polynomy. Snadno například spočítáme $\tilde{H}_0(x) = 1$, $\tilde{H}_1(x) = 2x$ a $\tilde{H}_2(x) = 4x^2 - 2$. Z rekurentního vztahu (6.46) indukci vyplývá, že $\tilde{H}_n(x)$ je sudou, resp. lichou funkcí, a to podle toho, zda n je sudé či liché.

Před samotným vyšetřením ortogonalit polynomů $\tilde{H}_n$ si nejprve uvědomíme, že pro libovolný polynom $\wp(x)$ má výraz

$$\wp(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

pro $x \rightarrow \pm\infty$ nulovou limitu pro všechna n . Proto pro $0 \leq m \leq n$ dostáváme s využitím integrace per partes a vztahů (6.42) a (6.47) sadu rovností

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_m(x) | \tilde{H}_n(x) \rangle_{e^{-x^2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m(x) \tilde{H}_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m(x) \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} dx = \left| \text{per-partses \& (6.47)} \right| = \\ &= (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{m-1}(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}} dx = \dots = (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_0(x) \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} dx = \\ &= \left| \tilde{H}_0(x) = 1 \right| = (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} dx. \end{aligned}$$

Tedy pro $n > m$ dostáváme, že

$$\langle \tilde{H}_m(x) | \tilde{H}_n(x) \rangle_{e^{-x^2}} = \left[\frac{d^{n-m-1} e^{-x^2}}{dx^{n-m-1}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad (6.44)$$

odkud plyne ortogonalita polynomů $\tilde{H}_n(x)$. A pro $n = m$ spočítáme normu $\tilde{H}_n(x)$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_n(x) | \tilde{H}_n(x) \rangle_{e^{-x^2}} &= \langle \tilde{H}_m(x) | \tilde{H}_n(x) \rangle_{e^{-x^2}} \Big|_{n=m} = (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} dx \Big|_{n=m} = \\ &= 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Normalizovaný tvar vyšetřovaných polynomů je tedy

$$H_n(x) = \frac{1}{\|\tilde{H}_n(x)\|} \tilde{H}_n(x) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \tilde{H}_n(x). \quad (6.45)$$

6.10.15 Definice

Polynomy $H_n(x)$ z rovnice (6.45) nazýváme *Hermiteovými polynomy* a rovnici (6.42) *Rodriguesovou formulí* pro Hermiteovy polynomy.

6.10.16 Příklad – Hermiteova diferenciální rovnice

Hermiteovy polynomy je možno získat také metodou tzv. *vytvěřující funkce*. Tak byl získán i následující rekurentní vztah (viz [11])

$$\tilde{H}_{n+1}(x) - 2x\tilde{H}_n(x) + 2n\tilde{H}_{n-1}(x) = 0. \quad (6.46)$$

Z rovnice (6.43) plyne, že $\tilde{H}_{n+1} - 2x\tilde{H}_n + \tilde{H}'_n = 0$. Zkombinováním tohoto vztahu a rekurentní formule (6.46) dostáváme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\tilde{H}'_n(x) = 2n\tilde{H}_{n-1}(x). \quad (6.47)$$

A konečně, dosadíme-li tento vztah do rekurentního vztahu pro Hermiteovy polynomy, získáme diferenciální rovnici, jejímž řešením jsou Hermiteovy polynomy. Jedná se o rovnici

$$\tilde{H}''_n(x) - 2x\tilde{H}'_n(x) + 2n\tilde{H}_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.48)$$

6.10.17 Definice

Diferenciální rovnici

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (6.49)$$

nazýváme *Hermiteovou diferenciální rovnicí*.

6.10.18 Poznámka

Rovnici (6.49) lze také přepsat do tvaru $-\frac{1}{2}y'' + xy' = \lambda y$, což představuje úlohu na hledání vlastních hodnot diferenciálního operátoru

$$\hat{L} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}.$$

6.11 Cvičení

Cvičení 6.1

Dokažte lemma 6.1.2. Užijte k tomu matematickou indukci.

Cvičení 6.2

Dokažte lemma 6.1.4.

Cvičení 6.3

Dokažte lemma 6.1.6.

Cvičení 6.4

Dokažte lemma 6.1.8.

Cvičení 6.5

Dokažte lemma 6.2.2.

Cvičení 6.6

Dokažte větu 6.6.21.

Cvičení 6.7

Rozhodněte, zda zobrazení $\|\cdot\| : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$, definované pro $\vec{x} = (x_1, x_2)$ rovností $\|\vec{x}\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}$, zadává na $\mathbf{R}^2$ normu.

Cvičení 6.8

Dokažte lemmata 6.6.4 a 6.6.15.

Cvičení 6.9

Nechť jsou v množině $\mathbf{R}^2$ pevně zvoleny body $\vec{c} = (-e, 0)^\top$ a $\vec{d} = (e, 0)^\top$. Rozhodněte, jaký útvar představuje množina bodů

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 : \varrho(\vec{x}, \vec{c}) + \varrho(\vec{x}, \vec{d}) = 2a\},$$

je-li ϱ a) euklidovská metrika, nebo b) síťová metrika. Čísla $a > e > 0$ nechť jsou parametry. Načrtněte obrázky pro volbu $a = 5$ a $e = 3$.

Cvičení 6.10

Na množině $\mathbf{R}^3$ je zadán skalární součin předpisem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle := 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2.$$

Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná zadaným skalárním součinem a ϱ metrika generovaná touto normou. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \varrho\}$ detailně popište množinu $\mathcal{U}_4(\vec{0})$.

Cvičení 6.11

Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru λ , pro něž funkce

$$s = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 25x_3y_3 + \lambda x_1y_2 + \lambda x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + (3\lambda - 8 + 2\lambda^2)x_2y_3 + (3\lambda - 8 + 2\lambda^2)x_3y_2$$

definuje na množině $\mathbf{R}^3$ skalární součin.

Cvičení 6.12

Nechť jsou v množině $\mathbf{R}^2$ dány dva body $\vec{x} = (2, 1)^\top$ a $\vec{y} = (4, 3)^\top$. Nalezněte bod $\vec{z}$ z metrického prostoru $\{\mathbf{R}^2, \sigma\}$ se σ -metrikou tak, aby $\mathcal{U}_2(\vec{x}) \cap \mathcal{U}_2(\vec{y}) = \mathcal{U}_1(\vec{z})$. Rozhodněte, zda jsou množiny $\mathcal{U}_2(\vec{x})$ a $\mathcal{U}_2(\vec{y})$ oddělené v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_1\}$ se síťovou metrikou.

Cvičení 6.13

Dokažte lemma 6.9.15.

Cvičení 6.14

Na množině $\mathbf{R}^2$ je zadána funkce $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$ předpisem $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Rozhodněte, zda funkce

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) := |f(\vec{x}) - f(\vec{y})|$$

zadává na $\mathbf{R}^2$ metriku.

Cvičení 6.15

Dokažte, že množina $\mathbf{Q}$ je spočetná.

Cvičení 6.16

Ukažte, že jakýkoli bod množiny $\mathbf{R}$ je hraničním bodem množiny $\mathbf{Q}$ a dále že $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Cvičení 6.17

Dokažte následující tvrzení: Nechť $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ je metrika na $\mathbf{C}^r$ vyhovující pro každé $k \in \mathbf{C}$ podmínkám

- $\varrho(k\vec{x}, k\vec{y}) = |k| \varrho(\vec{x}, \vec{y})$,
- $\varrho(\vec{x} + \vec{y}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{0})$.

Pak zobrazení $\varrho(\vec{x}, \vec{0})$ je normou na vektorovém prostoru $\mathbf{C}^r$ nad tělesem $\mathbf{C}$.

Cvičení 6.18

Ukažte, že posloupnost $(s_n)_{n=1}^\infty$, kde

$$s_n = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!},$$

je cauchyovská v prostoru $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ racionálních čísel s euklidovskou metrikou, ale není ve $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ konvergentní.

Cvičení 6.19

Rozhodněte, je-li zobrazení $\varrho(x, y) = \arctg|x - y|$ metrikou na množině reálných čísel.

Cvičení 6.20

Dokažte lemma 6.9.2.

Cvičení 6.21

Vyslovte tvrzení o kompaktnosti množiny $A = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \setminus \{(1, 1)\}$ v prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou.

Cvičení 6.22

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení o bodu $\vec{a} = (1, 1)^\top$ a množině A z úlohy 6.21.

- Bod $\vec{a}$ je izolovaným bodem množiny A .
- Bod $\vec{a}$ je hromadným bodem množiny A .
- Bod $\vec{a}$ je vnitřním bodem množiny A .
- Bod $\vec{a}$ je hraničním bodem množiny A .
- Bod $\vec{a}$ je bodem množiny A .

Cvičení 6.23

Pro množiny

$$A = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$$

$$B = A \setminus \{(1, 1)\}$$

$$C = \langle 0, 2 \rangle \times \{1\}$$

z metrického prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou vyplňte následující tabulku.

	A	B	C
souvislá			
kompaktní			
omezená			
otevřená			
uzavřená			
oblast			

Jak se změní výsledek, změní-li se metrika na síťovou, σ –metriku či triviální metriku?

Cvičení 6.24

Nechť $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$ je libovolná norma zavedená na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Ukažte, že zobrazení $r(\vec{x}, \vec{y}) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$ definované předpisem $r(\vec{x}, \vec{y}) := 2 \|\vec{y} - \vec{x}\|$ splňuje všechny axiomy metriky.

Cvičení 6.25

Nechť jsou v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou dány množiny $A = \langle 0, 5 \rangle$, $B = \langle 5, 8 \rangle$ a $C = \{9, 10\}$. Rozhodněte (a označte v tabulce), která z množin A , B , C , $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ a $A \cup B \cup C$ je:

	A	B	C	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cup C$	$A \cup B \cup C$
spočetná							
uzavřená							
omezená							
oblast							
konečná							
otevřená							
kompaktní							
souvislá							

Jak se změní výsledek, změní-li se metrika na síťovou, σ -metriku či triviální metriku?

Cvičení 6.26

Rozhodněte, zda zobrazení

$$\langle f|g \rangle := \int_0^1 4f(x)g(x) \, dx$$

představuje skalární součin na prostoru všech spojitých funkcí. Je-li ϱ metrika generovaná tímto skalárním součinem, vypočtěte $\varrho(x, x^2)$.

Cvičení 6.27

V rovině $\mathbf{R}^2$ jsou dány body $\vec{a} = (0, 1)^\top$ a přímka $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = -1\}$. Popište a graficky znázorněte množinu všech bodů v rovině, které mají od bodu $\vec{a}$ a přímky P stejnou vzdálenost při

- eukleidovské metrice,
- síťové metrice,
- σ -metrice,
- triviální metrice.

Cvičení 6.28

Rozhodněte, zda je zobrazení

$$s(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 + i \\ 2 - i & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

skalárním součinem na vektorovém prostoru $\mathbf{C}^2$. V kladném případě označte symbolem $\|\cdot\|$ normu generovanou tímto skalárním součinem a vypočtěte $\|(2, 1)\|$. Nechť $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ je metrika generovaná touto normou. Analyzujte tvar okolí ${}^{(e)}\mathcal{U}_1(\vec{0})$ a jeho tvar načrtněte do vhodného obrázku.

Cvičení 6.29

Nechť je v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ se síťovou metrikou dána množina $A = \langle 1, 6 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle \setminus \{(5, 3)\}$. Podle definice rozhodněte, je-li bod $(2, 3)$ vnitřním bodem množiny A . Podle definice dále rozhodněte, je-li bod $(5, 3)$ hraničním bodem množiny A . Vypočtěte dále síťovou vzdálenost bodu $\vec{a} = (8, 5)^\top$ od množiny A .

Cvičení 6.30

Rozhodněte o limitě posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ vektorů z $\mathbf{R}^2$, kde

$$\vec{x}_n = \left(\frac{4}{n}, \frac{n+1}{n} \right)$$

- a) v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_1\}$ se síťovou metrikou
- b) v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \tau\}$ se triviální metrikou.

Cvičení 6.31

Nechť je zadán metrický prostor $\mathbf{R}^r$ se síťovou metrikou. Dokažte, že tvrzení $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x} = \vec{a}$ pro posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ vektorů z $\mathbf{R}^r$ je ekvivalentní tvrzení $\forall k \in \hat{r} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a_k$. Přitom symbol x_{n_k} reprezentuje k -tou souřadnici vektoru $\vec{x}_n$.

Cvičení 6.32

Rozhodněte o limitě posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^3$, kde

$$\vec{x}_n = \left(1, \frac{2n+5}{n}, \frac{4}{n^2}\right)$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \sigma\}$ se σ -metrikou.

Cvičení 6.33

Rozhodněte o limitě posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^3$, kde

$$\vec{x}_n = \left(1, \frac{2n+5}{n}, \frac{4}{n^2}\right)$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \varrho_4\}$ s p -metrikou, kde $p = 4$.

Cvičení 6.34

Nechť je předpisem

$$\vec{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 11 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$$

zadán na množině $\mathbf{R}^5$ skalární součin. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nalezněte všechny vektory, které jsou kolmé ke všem vektorům $\vec{u}_1^T = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{u}_2^T = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{u}_3^T = (-3, -1, 1, 0, 0)$ a $\vec{u}_4^T = (0, 1, 0, 1, 0)$ a jsou normovány, tj. jejich norma je jednotková.

Cvičení 6.35

Nechť $\langle \cdot | \cdot \rangle$ je skalární součin na vektorovém prostoru V . Nechť je pevně zvolen vektor $\vec{w} \in V$. Ukažte, že množina všech vektorů $\vec{x} \in V$, pro něž je splněna rovnost $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$, tvoří vektorový prostor.

Cvičení 6.36

Rozhodněte, je-li posloupnost

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

- cauchyovská v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \tau\}$ s triviální metrikou
- cauchyovská v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho\}$ se síťovou metrikou.

Cvičení 6.37

Co nejpřesněji načrtněte okolí ${}^{(e4)}\mathcal{U}_1(2, 3)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s p -metrikou, kde $p = 4$. Studujte uzavřenost, otevřenost, konvexitu této množiny a podobně. Pro srovnání do stejného obrázku vykreslete také ${}^{(ee)}\mathcal{U}_1(2, 3)$.

Cvičení 6.38

Nechť je dán metrický prostor $\{\mathbf{E}^3, \varrho\}$ s euklidovskou metrikou ϱ . Rozhodněte, která z množin splňuje citované vlastnosti. Označte symbolem + pozitivní odpověď.

	souvislá	omezená	kompaktní	uzavřená	otevřená	oblast
$\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x + y + 3z = 1\}$						
$\emptyset$						
$\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$						
$\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$						
$\mathbf{E}^3$						

Cvičení 6.39

Dokažte, že sjednocení dvou spočetných (resp. konečných) množin je množina spočetná (resp. konečná).

Cvičení 6.40

Ověřte rovnost ze poznámky 6.6.10.

Cvičení 6.41

Dokažte lemmata z této kapitoly.

Cvičení 6.42

Rozhodněte, je-li množina $A = \langle 2, 7 \rangle$ v prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou uzavřená, otevřená, souvislá, kompaktní, oblast. Svá rozhodnutí podrobně odůvodněte.

Cvičení 6.43

Rozhodněte, je-li množina $A = \langle 2, 7 \rangle$ v prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho_j\}$ se skokovou metrikou uzavřená, otevřená, souvislá, kompaktní, oblast. Svá rozhodnutí podrobně odůvodněte.

Cvičení 6.44

Rozhodněte, je-li množina $A = \langle 2, 7 \rangle$ v prostoru $\{\mathbf{R}, \sigma\}$ se sigma-metrikou uzavřená, otevřená, souvislá, kompaktní, oblast. Svá rozhodnutí podrobně odůvodněte.

Cvičení 6.45

Rozhodněte, je-li množina $A = \langle 2, 7 \rangle$ v prostoru $\{\mathbf{R}, \tau\}$ s triviální metrikou uzavřená, otevřená, souvislá, kompaktní, oblast. Svá rozhodnutí podrobně odůvodněte.

Cvičení 6.46

Dokažte, že předpis $\int_1^2 f(x)g(x) \, dx$ nedefinuje na $C(\langle 0, 2 \rangle)$ skalární součin.

Kapitola 7

Fourierovy řady v Hilbertových prostorech

Stejně jako matematikům počátku devatenáctého století nabízí se i nám zcela přirozená otázka, zda nelze v analogii staylorovskými rozvoji funkcí do mocninných řad provádět také rozvoje do řad obecnějších. V závěrečné kapitole těchto skript si ukážeme, že řady typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(x) \quad (7.1)$$

nemusejí být nutně analyzovány pouze tehdy, jeli $g_k(x)$ monomem $(x - c)^k$ (jak jsme poznali ve třetí kapitole), ale mohou být konstruovány i pro další typy funkcí $g_k(x)$. Přesvědčíme se také, že takové netaylorovské rozvoje mohou být velice užitečné pro řešení pestré škály úloh.

7.1 Separabilní Hilbertovy prostory

Nejprve se seznámíme s výhodnými vlastnostmi funkcí $g_0(x), g_1(x), \dots$ z předpisu (7.1). Připomněli jsme si již, že prvotní volbou (pro teorii Taylorových řad) byly centrované monomy $g_k(x) = (x - c)^k$. Budeme nyní rozmýšlet, jaký požadavek klást na tyto funkce, aby výsledný formát řad (7.1) byl pokud možno co nejkompaktnější a také snadno vyčíslitelný. Na to je bez pochyby třeba brát zřetel, protože jednou ze zásadních úloh této teorie je otázka, jak hledat koeficienty a_k v předpisu (7.1) tak, aby pro vhodnou funkci $f(x)$ platila rovnost

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(x).$$

V případě, kdy byly funkce $g_k(x)$ voleny jako monomické $g_k(x) = (x - c)^k$, byla uvedená úloha poměrně snadná. Platilo totiž, že $a_k = f^{(k)}(c)/k!$ Při jiných volbách $g_k(x)$ to ale jistě nemusí být takto snadné, jak se záhy přesvědčíme.

7.1.1 Poznámka

Celá teorie fourierovských rozvoji je v matematické analýze primárně vytvořena pro hledání rozvoji funkcí. Tedy elementy prostorů, které se chystáme zkoumat, budou reprezentovány zejména funkcemi. Ovšem (také s ohledem na skutečnost, že se budeme pohybovat po vektorových prostorech funkcí) na každou funkci libovolného funkcionálního vektorového prostoru lze nahlížet jako na vektor, tj. prvek vektorového prostoru. Z tohoto důvodu (a také kvůli lepší čitelnosti textu) budeme v následujících partiích pracovat ve formalizmu vektorů.

Východiskem celé teorie navíc nebude obyčejný vektorový prostor, ale prostor Hilbertův, se kterým se čtenář podrobně seznámil v oddíle 6.8.

7.1.2 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H} := \{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \| \cdot \|, \varrho\}$. O množině $Q \subset \mathcal{H}$ (tj. $Q \subset \mathcal{V}$) prohlásíme, že je *hustá* v $\mathcal{H}$, jestliže je její uzávěr roven celému $\mathcal{H}$, tj. jsou-li do množiny Q dodány všechny její hraniční body, obsahuje již všechny prvky z $\mathcal{H}$. Tuto vlastnost lze také vyjádřit formálněji zápisem $\overline{Q} = \mathcal{H}$.

7.1.3 Věta – o husté množině

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H} := \{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, \varrho\}$. Množina $Q \subset \mathcal{V}$ je hustá v $\mathcal{H}$ právě tehdy, když ke každému $\vec{x} \in \mathcal{H}$ existuje posloupnost $(\vec{x}_n \in Q)_{n=1}^\infty$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n - \vec{x}\| = 0$.

Důkaz:

- tvrzení věty je ekvivalentní následujícímu tvrzení: Množina $Q \subset \mathcal{V}$ je hustá v $\mathcal{H}$ právě tehdy, když pro každé $\vec{y} \in \mathcal{H}$ existuje posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ prvků množiny Q taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{y}$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí implikace

$$n > n_0 \implies \varrho(\vec{x}_n, \vec{y}) < \varepsilon. \quad (7.2)$$

- odtud pak plyne, že pro $n > n_0$ je $\|\vec{x}_n - \vec{y}\| < \varepsilon$, což lze přepsat do tvaru $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n - \vec{x}\| = 0$
- nejprve dokážeme první implikaci tohoto ekvivalentního tvrzení
- předpokládejme tedy, že $\vec{y} \in \mathcal{H}$ a $\overline{Q} = \mathcal{H}$
- jelikož $\vec{y} \in \overline{Q}$, pak buď $\vec{y} \in Q^\circ$ nebo $\vec{y} \in \text{bd}(Q)$
- v každém případě ale existuje, jak víme z definic vnitřního a hraničního bodu, v libovolném okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{y})$, kde $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$, nějaký bod $\vec{x}_n \in Q$
- tvrdíme, že takto vytvořená posloupnost prvků $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ konverguje k $\vec{y}$
- vezměme proto $\delta > 0$
- k němu ale vždy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí implikace $n > n_0 \implies \varrho(\vec{x}_n, \vec{y}) < \delta$, jak vyplývá z konstrukce posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$, čímž je prokázáno, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$, potažmo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n - \vec{x}\| = 0$
- dokažme druhou implikaci
- pro spor předpokládejme, že existuje $\vec{y} \in \mathcal{H} \setminus \overline{Q}$
- nechť tedy existuje posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ prvků množiny Q taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{y}$
- tudíž pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí implikace (7.2)
- to ale značí, že v každém okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{y})$ leží bod z množiny Q
- proto $\vec{y}$ je hraničním nebo vnitřním bodem množiny Q , což je očekávaný spor

7.1.4 Definice

O Hilbertově prostoru $\mathcal{H} := \{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, \varrho\}$ prohlásíme, že je *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná množina, která je v $\mathcal{H}$ hustá.

7.1.5 Příklad

Separabilním Hilbertovým prostorem je např. čtveřice $\{\mathbf{R}, \langle \cdot | \cdot \rangle_s, \|\cdot\|_e, \varrho_e\}$, tj. množina reálných čísel osazená standardním skalárním součinem, euklidovskou normou a euklidovskou metrikou, kteréžto jsou vlastně normou a metrikou generovanými standardním skalárním součinem. Protože $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ a $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$, je množina $\mathbf{Q}$ racionálních čísel onou spočetnou a hustou množinou v $\mathbf{R}$, jež je vyžadována v předchozí definici. Proto je Euklidovský prostor $\{\mathbf{R}, \langle \cdot | \cdot \rangle_s, \|\cdot\|_e, \varrho_e\}$ prostorem separabilním.

7.2 Hilbertovy prostory kvadraticky integrovaných funkcí

V této sekci se pokusíme zkonstruovat nejběžnější zástupce separabilních Hilbertových prostorů, jejichž prvky jsou vybrané funkce jedné reálné proměnné.

7.2.1 Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}$ a $G \neq \emptyset$. *Třídou (lebesgueovskými) kvadraticky integrovaných funkcí $\mathcal{L}_2(G)$* rozumíme množinu všech funkcí $g(x) : G \mapsto \mathbf{R}$, pro které integrál $\int_M |g(x)|^2 dx$ konverguje.

7.2.2 Poznámka

V předchozí definici se vlastně jedná o tzv. Lebesgueův integrál (viz skript [17]), který představuje nastavbu nad klasičtějšími typy integrálů (Newtonovým, resp. Riemannovým). V nadcházejícím textu ale povětšinou vystačíme s faktem, že hodnoty Riemannova a Lebesgueova integrálu ze stejné funkce (pokud oba existují) jsou v drtivé většině totožné. Přesněji to vystihuje věta o vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu, která říká, že je-li J kompaktní interval v $\mathbf{R}$ a existuje-li $(\mathcal{R}) \int_J g(x) dx$, pak existuje také $(\mathcal{L}) \int_J g(x) dx$ a oba integrály mají tutéž hodnotu. Protože je ale teorie Fourierových řad běžně budována nad Lebesgueovým integrálem (což má pochopitelně své důvody), také my se tohoto přístupu přidržíme.

Z teorie Lebesgueova integrálu nyní vybíráme několik symbolů a tvrzení zásadních pro tuto kapitolu.

1. Třídou (lebesgueovskými) integrabilních funkcí $\mathcal{L}(G)$ rozumíme množinu všech funkcí $g(x) : G \mapsto \mathbf{C}$, pro které integrál $\int_M g(x) dx$ konverguje.
2. Třídou (lebesgueovskými) absolutně integrabilních funkcí $\mathcal{L}_1(G)$ rozumíme množinu všech funkcí $g(x) : G \mapsto \mathbf{C}$, pro které integrál $\int_M |g(x)| dx$ konverguje.
3. Srovnávací kritérium: Platí-li pro dvě funkce $|f(x)| \leq g(x)$ na G a je-li $g(x) \in \mathcal{L}(G)$, pak také jistě platí, že $f(x), |f(x)| \in \mathcal{L}(G)$.
4. Důsledek: $g(x) \in \mathcal{L}_1(G) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{L}(G)$.
5. Třída $\mathcal{L}(G)$ je vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbf{C}$, resp. $\mathbf{R}$.

7.2.3 Věta

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{L}_2(G)$. Pak $f(x)g^*(x) \in \mathcal{L}(G)$ a funkcionální operace $\int_G f(x)g^*(x) dx$ přiřazuje dvojici funkcí $f(x), g(x) \in \mathcal{L}_2(G)$ komplexní číslo splňující axiomy skalárního součinu.

Důkaz:

- pro libovolná čísla $a, b \in \mathbf{C}$ jistě platí nerovnost $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$
- proto pro libovolné komplexní funkce $g(x), f(x) \in \mathcal{L}_2(G)$ platí, že

$$|f(x)g^*(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2$$

- jelikož $|f(x)|^2, |g(x)|^2 \in \mathcal{L}(G)$, plyne ze srovnávacího kritéria, že $|f(x)g^*(x)| \in \mathcal{L}(G)$ a $f(x)g^*(x) \in \mathcal{L}(G)$
- integrál $\int_G f(x)g^*(x) dx$ tedy za všech okolností vrací komplexní číslo (tedy konverguje v $\mathbf{C}$)
- levá linearita a hermiticity jsou tudíž splněny triviálně
- naplnění axiomu pozitivní definitnosti je důsledkem zobecnění pojmu funkce na tzv. *funkce faktorové*, kdy se za nulovou funkci pokládají všechny funkce lišící se od nulové funkce na množině nulové míry (délky)
- pro detailnější pochopení pojmu faktorové funkce odkazujeme čtenáře na skript [17]

7.2.4 Věta

Třída kvadraticky integrabilních funkcí $\mathcal{L}_2(G)$ je vektorovým prostorem na $\mathbf{C}$, resp. $\mathbf{R}$ a společně s operací $\int_G f(x)g^*(x) dx$ také prostorem prehilbertovským.

Důkaz:

- homogenita, tj. vlastnost $\alpha \in \mathbf{C}, g(x) \in \mathcal{L}_2(G) \Rightarrow \alpha g(x) \in \mathcal{L}_2(G)$, je splněna triviálně
- nyní prokážeme uzavřenost $\mathcal{L}_2(G)$ na sčítání
- snadno nahlédneme, že $|f(x) + g(x)|^2 = |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + f(x)g^*(x) + g(x)f^*(x)$
- protože ale všechny čtyři funkce na pravé straně patří do $\mathcal{L}(G)$, jak bylo prokázáno v předcházející větě, musí také součet $|f(x) + g(x)|^2$ v $\mathcal{L}(G)$ ležet

- proto $f(x) + g(x) \in \mathcal{L}_2(G)$ pro libovolné dvě funkce $f(x), g(x) \in \mathcal{L}_2(G)$
- podle věty 7.2.3 splňuje navíc operace $\int_G f(x)g^*(x) dx$ na $\mathcal{L}_2(G)$ axiomy skalárního součinu
- protože $\mathcal{L}_2(G)$ je prostorem vektorovým, jak bylo právě prověřeno, je dvojice $\{\mathcal{L}_2(G); \int_G f(x)g^*(x) dx\}$ prehilbertovským prostorem

7.2.5 Věta

Třída kvadraticky integrabilních funkcí $\mathcal{L}_2(G)$ společně se standardním skalárním součinem zavedeným vztahem $\int_G f(x)g^*(x) dx$ je separabilním Hilbertovým prostorem.

Důkaz:

- viz věta 7.2.12 o úplnosti faktorového prostoru kvadraticky integrabilních funkcí ze skript [17]

7.2.6 Důsledek

Nechť $G = (a, b)$ je otevřený interval v $\mathbf{R}$ a $w(x) \in C(\overline{G})$ je kladná funkce na G (tzv. váha skalárního součinu). Vektorový prostor

$$\mathcal{L}_{2,w}(G) = \left\{ g(x) : \int_G |g(x)|^2 w(x) dx < +\infty \right\}$$

společně se skalárním součinem zavedeným vztahem $\int_G f(x)g^*(x)w(x) dx$ je separabilním Hilbertovým prostorem.

7.3 Ortonormální systémy prvků Hilbertova prostoru

Matematici zabývající se teorií fourierovských rozvojų dospěli poměrně brzy k přesvědčení, že výranou výhodou funkcí $g_1(x), g_2(x), \dots$, podle nichž budeme rozvíjet prvky Hilbertových prostorů do řad tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$, bude jejich ortogonalita. Tou se budeme také my nyní zabírat.

7.3.1 Definice

Systém $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ nenulových prvků Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ nazveme *ortonormální*, pokud pro všechna $i, k \in \mathbf{N}$ ($i \neq k$) platí rovnosti $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_k \rangle = 0$. Splňuje-li navíc tento soubor vlastnost $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_k \rangle = \delta_{ik}$ pro všechna $i, k \in \mathbf{N}$, budeme ho nazývat *systémem ortonormálním*.

7.3.2 Lemma

Je-li $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ ortogonální systém prvků v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ a jsou-li prvky $\vec{y}_n$ vypočteny z jednoduchých rovností $\vec{y}_n = \vec{x}_n / \|\vec{x}_n\|$, pak je množina $\{\vec{y}_n : n \in \mathbf{N}\}$ ortonormálním systémem prvků v $\mathcal{H}$.

7.3.3 Příklad

Nechť jsou čísla $a \in \mathbf{R}$ a $\ell > 0$ zvolena pevně. Systém funkcí

$$1, \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}nx\right), \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}nx\right), \quad n \in \mathbf{N} \quad (7.3)$$

je ortogonálním systémem v Hilbertově prostoru $\{\mathcal{L}_2(a, a + \ell), \int_a^{a+\ell} f(x)g(x) dx\}$. Systém

$$\frac{1}{\sqrt{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}nx\right), \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}nx\right), \quad n \in \mathbf{N}$$

je pak v $\{\mathcal{L}_2(a, a + \ell), \int_a^{a+\ell} f(x)g(x) dx\}$ systémem ortonormálním. Podobně reprezentuje také množina

$$\left\{ e^{i\frac{2\pi}{\ell}nx}, n \in \mathbf{Z} \right\}$$

ortonormální systém prvků v Hilbertově prostoru $\{\mathcal{L}_2(a, a + \ell), \int_a^{a+\ell} f(x)g^*(x) dx\}$ komplexních funkcí $g(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$.

7.3.4 Definice

Nechť je dána posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n$ *konverguje podle normy*, k prvku $\vec{a} \in \mathcal{H}$, pokud posloupnost částečných součtů $\vec{s}_n := \sum_{k=1}^n \vec{x}_k$ konverguje k $\vec{a}$ podle normy, tj.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{norm } \vec{s}_n = \vec{a}.$$

7.3.5 Věta – o jednoznačnosti

Nechť $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální systém prvků v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$ konverguje k prvku $\vec{x}$ (ve smyslu předchozí definice), pak jsou čísla a_n určena vztahy

$$a_n = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle}{\langle \vec{x}_n | \vec{x}_n \rangle} = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle}{\|\vec{x}_n\|^2},$$

Důkaz:

- označme $\vec{s}_n := \sum_{k=1}^n a_k \vec{x}_k$
- ze spojitosti skalárního součinu (viz věta 6.8.12) plyne pro každé $j \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{s}_n | \vec{x}_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \vec{s}_n | \vec{x}_j \rangle$$

- pro $n \geq j$ navíc $\langle \vec{s}_n | \vec{x}_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \langle \vec{x}_k | \vec{x}_j \rangle = a_j \langle \vec{x}_j | \vec{x}_j \rangle = a_j \|\vec{x}_j\|^2$
- tedy $\langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \vec{s}_n | \vec{x}_j \rangle = a_j \langle \vec{x}_j | \vec{x}_j \rangle = a_j \|\vec{x}_j\|^2$, odkud již plyne dokazovaný fakt, že

$$a_n = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle}{\langle \vec{x}_n | \vec{x}_n \rangle} = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle}{\|\vec{x}_n\|^2}$$

7.3.6 Důsledek

Mají-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{x}_n$ stejný součet $\vec{s} \in \mathcal{H}$, pak je $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

7.4 Fourierova řada a její vlastnosti

V této sekci zavedeme obecný pojem Fourierovy řady a budeme zkoumat její vlastnosti. Plánujeme v ní (a také v dalších sekcích) postupně vyjasnit následující otázky:

1. Konverguje v $\mathcal{H}$ Fourierova řada každého prvku z $\mathcal{H}$?
2. Kdy konverguje Fourierova řada prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ právě k tomuto prvku?
3. Kdy pro všechny prvky $\vec{x} \in \mathcal{H}$ konverguje příslušná Fourierova řada k tomuto prvku?
4. Jaká musejí být čísla a_n , aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$ byla konvergentní v $\mathcal{H}$?

7.4.1 Definice

Nechť $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální systém prvků v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro $\vec{x} \in \mathcal{H}$ nazýváme číslo

$$c_n = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle}{\|\vec{x}_n\|^2}$$

n -tým Fourierovým koeficientem prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ podle zadaného ortogonálního systému. Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle}{\|\vec{x}_n\|^2} \vec{x}_n$$

nazýváme *Fourierovou řadou* prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ podle zadaného ortogonálního systému.

7.4.2 Poznámka

Pro ortonormální systém prvků se předešlé vzorce zjednoduší do tvaru

$$c_n = \langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle \vec{x}_n.$$

7.4.3 Poznámka

Raději ale explicitně upozorňujeme na skutečnost, že jsme dosud žádným způsobem nedokázali, že Fourierova řada vybraného prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ skutečně k prvku $\vec{x}$ konverguje. To ani není obecně pravda (viz následující příklad). Pokud ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$ k nějakému prvku konverguje, musí to nutně být jeho Fourierova řada.

7.4.4 Příklad

Systém $\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální v $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, 2\pi)$. Protože

$$\langle \sin(nx) | \cos(x) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(x) dx = 0$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, jsou Fourierovy koeficienty prvku $g(x) = \cos(x)$ nulové. Fourierova řada tohoto prvku je tudíž řadou samých nul, a tedy ke $g(x)$ nekonverguje.

7.4.5 Věta – základní

Nechť $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální systém prvků v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, $\vec{x} \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ a $T_n = \sum_{k=1}^n a_k \vec{x}_k$. Nechť c_k jsou Fourierovy koeficienty prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ podle zadaného ortogonálního systému. Potom platí:

$$\|\vec{x} - T_n\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - a_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2. \quad (7.4)$$

Pro $m, p \in \mathbb{N}$ je

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \vec{x}_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - T_n\|^2 &= \langle \vec{x} - \sum_{k=1}^n a_k \vec{x}_k | \vec{x} - \sum_{k=1}^n a_k \vec{x}_k \rangle = \|\vec{x}\|^2 - \sum_{j=1}^n a_j^* \langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle - \sum_{k=1}^n a_k \langle \vec{x}_k | \vec{x} \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_k a_j^* \langle \vec{x}_k | \vec{x}_j \rangle = \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^* \langle \vec{x} | \vec{x}_k \rangle - \sum_{k=1}^n a_k \langle \vec{x}_k | \vec{x} \rangle + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2 = \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^* c_k \|\vec{x}_k\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k c_k^* \|\vec{x}_k\|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2 \end{aligned}$$

Přičteme-li a odečteme-li na pravé straně výraz $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2$, dostaneme požadované tvrzení, neboť pro $a, b \in \mathbb{C}$ platí

$$|a - b|^2 = (a - b)(a - b)^* = |a|^2 - ab^* - a^*b + |b|^2.$$

Druhé tvrzení plyne, jak lze nahlédnout z výpočtu níže, z přímé z aplikace definice normy na výraz $\left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \vec{x}_k \right\|^2$, v němž je následně využito ortogonalit prvků množiny $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \vec{x}_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \vec{x}_k \middle| \sum_{j=m+1}^{m+p} a_j \vec{x}_j \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{m+p} \sum_{j=m+1}^{m+p} \langle a_k \vec{x}_k | a_j \vec{x}_j \rangle = \\ &= \sum_{k=m+1}^{m+p} \sum_{j=m+1}^{m+p} a_k a_j^* \langle \vec{x}_k | \vec{x}_j \rangle = \sum_{k=m+1}^{m+p} \sum_{j=m+1}^{m+p} a_k a_j^* \delta_{kj} \|\vec{x}_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2 \end{aligned}$$

7.4.6 Poznámka

Druhé tvrzení základní věty vlastně říká, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$ je cauchyovská v $\mathcal{H}$ tehdy a jen tehdy, je-li cauchyovská posloupnost částečných součtů číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2$.

7.4.7 Důsledek

Je-li $\vec{s}_n$ součet prvních n členů Fourierovy řady prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ podle ortogonálního systému $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$, tedy $\vec{s}_n = \sum_{k=1}^n c_k \vec{x}_k$, pak je

$$\|\vec{s}_n - \vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2. \quad (7.5)$$

7.4.8 Poznámka

Předchozí důsledek kvantifikuje blízkost $\vec{s}_n$ k prvku $\vec{x}$ pomocí blízkosti čísel $\|\vec{x}\|^2$ a $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2$.

7.4.9 Věta

Pro libovolné $T_n = \sum_{k=1}^n a_k \vec{x}_k$ a pro $\vec{s}_n$ definované v důsledku 7.4.7 platí

$$\|\vec{s}_n - \vec{x}\| \leq \|T_n - \vec{x}\|,$$

přičemž rovnost nastává právě pro $T_n = \vec{s}_n$.

Důkaz:

- plyne z rovností (7.4) a (7.5)

7.4.10 Poznámka

Tato věta vyjadřuje skutečnost, že n -tý částečný součet $\vec{s}_n$ Fourierovy řady prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ aproximuje tento prvek nejlépe ze všech lineárních kombinací prvních n prvků systému $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

7.4.11 Věta – o Besselově nerovnosti

Nechť $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální systém prvků v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ a $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Nechť c_n ($n \in \mathbb{N}$) jsou Fourierovy koeficienty prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ podle zadaného ortogonálního systému. Pak platí:

1. *Besselova nerovnost:* $\|\vec{x}\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2$ konverguje a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n \vec{x}_n\| = 0$.
3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \vec{x}_n$ konverguje (podle normy) v $\mathcal{H}$.

Důkaz:

- protože je levá strana v rovnosti (7.5) nezáporná, dostáváme pro $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\vec{x}_k\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$, v níž nyní postačí přejít k limitě $n \rightarrow +\infty$
- tím je prokázána platnost Besselovy nerovnosti
- druhá dokazovaná vlastnost (včetně nulovosti limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n \vec{x}_n\|$) je bezprostředním důsledkem Besselovy nerovnosti
- zde si pouze stačí uvědomit, že $|c_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2 = \|c_n \vec{x}_n\|^2$ z axiomů normy
- protože je číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2$ řadou s nezápornými členy a protože její posloupnost částečných součtů omezená číslem $\|\vec{x}\|^2$, musí být nutně uvedena číselná řada konvergentní
- z bodu 2 plyne cauchyovskost posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \vec{x}_n$ v $\mathcal{H}$
- důsledkem úplnosti prostoru $\mathcal{H}$ je proto konvergence této řady podle normy (tj. v $\mathcal{H}$)

7.4.12 Věta – o Parsevalově rovnosti

Nechť $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ je ortogonální systém prvků v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ a $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Necht' c_n ($n \in \mathbf{N}$) jsou Fourierovy koeficienty prvku $\vec{x} \in \mathcal{H}$ podle zadaného ortogonálního systému. Fourierova řada prvku $\vec{x}$ konverguje k tomuto prvku právě tehdy, když platí tzv. *Parsevalova rovnost*

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2.$$

Důkaz:

- jedná se o bezprostřední důsledek věty 7.4.11

7.4.13 Věta – Rieszova-Fischerova

Nechť $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ je ortogonální systém prvků v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$ konvergovala v $\mathcal{H}$ je konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2$. Je-li tato podmínka splněna, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$ Fourierovou řadou svého součtu.

Důkaz:

- základní věta 7.4.5 říká, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{x}_n$ je cauchyovská v $\mathcal{H}$ tehdy a jen tehdy, je-li cauchyovská posloupnost částečných součtů číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\vec{x}_n\|^2$
- tvrzení věty pak plyne z úplnosti prostorů $\mathcal{H}$ a $\mathbf{C}$, (resp. $\mathbf{R}$)

7.5 Úplnost ortogonálního systému

Jedním ze zásadních problémů celé teorie je otázka, za jakých podmínek konverguje Fourierova řada všech prvků $\vec{x} \in \mathcal{H}$ právě k tomuto prvku. Jak uvidíme, odpověď souvisí s "bohatostí" ortogonálního systému $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$.

7.5.1 Definice

Ortogonální systém prvků $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nazveme *úplným*, pokud z faktu, že $\vec{x} \in \mathcal{H}$ a $\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle = 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ jednoznačně vyplývá, že $\vec{x} = \vec{0}$. Úplný systém ortogonálních prvků se nazývá *bází* Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Je-li systém $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ navíc ortonormální, nazýváme ho také *ortonormální bází*. Mohutnost báze (tedy kardinální číslo, tj. zobecněný počet prvků) nazýváme *dimenzí* prostoru $\mathcal{H}$.

7.5.2 Poznámka

Uvedená definice vyjadřuje skutečnost, že jediným prvkem z $\mathcal{H}$, který je ortogonální ke všem prvkům systému je nulový prvek.

7.5.3 Věta

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. Ortogonální systém prvků $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ je úplný.
2. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí Parsevalova rovnost.
3. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ konverguje příslušná Fourierova řada (konstruovaná podle systému $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$) právě k prvku $\vec{x}$.
4. Množina všech lineárních kombinací konečně mnoha prvků ze systému $\{\vec{x}_n : n \in \mathbf{N}\}$ je hustá v $\mathcal{H}$.

Důkaz:

- ekvivalence druhého a třetího tvrzení plyne ihned z důsledku 7.4.7
- dokažme implikaci 3 $\Rightarrow$ 1

- zvolme $\vec{x} \in \mathcal{H}$ tak, že $\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
- z rovností $\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle = 0$ plyne, že $\vec{s}_n = \vec{0}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\vec{s}_n \rightarrow \vec{0}$
- podle bodu 3 ale $\vec{s}_n \rightarrow \vec{x}$, tudíž $\vec{x} = \vec{0}$
- jediným vektorem kolmým ke všem $\vec{x}_n$ je tudíž nulový vektor
- dokažme implikaci $1 \Rightarrow 3$
- podle třetího tvrzení věty 7.4.11 platí, že $\vec{s}_n \rightarrow \vec{y}$, kde $\vec{y}$ je nějaký prvek z $\mathcal{H}$
- podle poznámky 7.4.3 musí být Fourierova řada prvku $\vec{x}$ také Fourierovou řadou prvku $\vec{y}$, tj. $\langle \vec{x} | \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x}_n \rangle$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
- tedy $\langle \vec{x} - \vec{y} | \vec{x}_n \rangle = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a podle bodu jedna pak nutně $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$, což završuje důkaz tvrzení č. 3
- platí-li tvrzení č. 3, pak posloupnost $(\vec{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů (což je de facto lineární kombinace konečně mnoha prvků ze systému $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$) konverguje k $\vec{x}$, a tedy platí čtvrté tvrzení
- naopak, jestliže posloupnost $(\vec{w}_n)_{n=1}^{\infty}$ lineárních kombinací konečně mnoha prvků ze systému $\{\vec{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ konverguje k $\vec{x}$, které je ortogonální ke každému $\vec{x}_n$, pak je $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \vec{x} | \vec{w}_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, a tedy platí bod 1

7.5.4 Věta

V každém nekonečně-dimenzionálním separabilním Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Důkaz:

- nechť $Q = \{\vec{y}_n : n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá podmnožina v $\mathcal{H}$
- nejdříve z ní vybereme podmnožinu P obsahující pouze lineárně nezávislé funkce, pro níž $[P]_{\lambda} = Q$
- je-li $\vec{y}_1 = \vec{0}$, pak tento vektor vyškrtáme
- v opačném případě ho zařadíme do P
- dále představíme rekurentní výběrovou proceduru, která bude do P dodávat další a další prvky
- předpokládejme, že jsme již prozkoumali n prvků $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ z Q a rozhodli, zda patří nebo nepatří do P
- vyberme další prvek (tedy $\vec{y}_{n+1}$) z množiny Q
- je-li $\vec{y}_{n+1}$ lineární kombinací prvků aktuálně zařazených v Q , pak ho již do Q nezařadíme
- v opačném případě ho do P zařadíme
- výsledkem tohoto rekurentního procesu (pro prozkoumání všech prvků v Q) je množina $P = \{\vec{z}_k : k \in \mathbb{N}\}$
- množina P má tyto vlastnosti: 1) libovolných konečně mnoho jejích členů je lineárně nezávislých; 2) každé $\vec{y}_n \in Q$ je lineární kombinací konečného počtu prvků množiny P
- položíme $\vec{x}_1 := \vec{z}_1 / \|\vec{z}_1\|$ a definujeme další rekurentní proceduru, a to proceduru vedoucí k vytvoření množiny O
- jestliže jsme již prvky $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in O$ určili, určíme nejprve prvek

$$\vec{w}_{n+1} := \vec{z}_{n+1} + \sum_{k=1}^n \langle \vec{z}_{n+1} | \vec{x}_k \rangle \vec{x}_k,$$

který je nenulový a ortogonální k lineárnímu obalu $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_{\lambda}$

- nakonec položíme $\vec{x}_{n+1} := \vec{w}_{n+1} / \|\vec{w}_{n+1}\|$
- potom je zřejmé $O = \{\vec{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ ortonormální systém, který je úplný, neboť splňuje podmínku č. 4 z věty 7.5.3

7.5.5 Poznámka

Příkladem úplného ortogonálního systému (tedy báze) jsou trigonometrické systémy z příkladu 7.3.3 (tzv. *trigonometrická báze*) nebo Legendreovy polynomy diskutované v příkladech 6.4.15, 6.10.2 a vykreslené na obrázku 6.25. Pokud na prostorech $\mathcal{L}_2(G)$ volíme nestandardní skalární součiny (tedy skalární součiny s vahou), jsou příkladem ortogonální báze také Laguerreovy polynomy (viz 6.10.8) nebo Hermiteovy polynomy (viz 6.10.14).

7.5.6 Příklad

Rozložme funkci $g(x) = x$ chápanou jako element Hilbertova prostoru $\{\mathcal{L}(0, 2\pi); \int f(x)g^*(x) dx\}$ do Fourierovy řady podle trigonometrické báze (7.3). Podle teorie jsou příslušné Fourierovy koeficienty rovny číslům

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle x|1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{\int_0^{2\pi} x dx}{\int_0^{2\pi} 1 dx} = \pi \\ a_k &= \frac{\langle x|\cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} = \frac{\int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx}{\int_0^{2\pi} \cos^2(kx) dx} = 0 \\ b_k &= \frac{\langle x|\sin(kx) \rangle}{\|\sin(kx)\|^2} = \frac{\int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx}{\int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx} = -\frac{2}{k} \end{aligned}$$

Z tohoto mezivýpočtu tedy vyplývá, že hledanou Fourierovou řadou je řada na pravé straně níže uvedené rovnice a že mezi funkcí $g(x) = x$ a její Fourierovou řadou platí na $(0, 2\pi)$ rovnost

$$x = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Napišeme-li pro tuto funkci Parsevalovu rovnost, dostaneme

$$\int_0^{2\pi} x^2 dx = \pi^2 \int_0^{2\pi} x dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx,$$

odkud dostáváme vztah

$$\frac{8\pi^3}{3} = 2\pi^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2}.$$

Ten vede k poměrně slavnému výsledku, a sice $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Kapitola 8

Výsledky cvičení

1.1 $f(x) = e^{-|x|}$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **1.2** $f(x) = e^{5x}$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **1.5** $f(x) = 0$, $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$ **1.6** $f(x) = 0$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **1.7** $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pro $|x| < 1$, $f(x) = 1/2$ pro $|x| = 1$ a $f(x) = 1$ pro $|x| > 1$ – posloupnost
 nekoneguje na $\mathcal{O}$ stejnoměrně **1.8** $f(x) = 0$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}^+$ **1.9** $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ pro $x \in (-1, 1)$, $f(x) = 0$ pro
 $x = -1$ a $f(x) = x$ pro $|x| > 1$ – posloupnost nekoneguje na $\mathcal{O}$ stejnoměrně **1.10** $f(x) = |x|$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **1.11**
 na $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ konverguje stejnoměrně k limitní funkci $f(x) = 1$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = e^{-x}$ pro $x < 0$ **1.12** stejnoměrně
1.13 a) ano, b) ne **1.14** ano **1.15** ne **1.16** a) ano, b) ne **1.17** ano **1.18** a) ne, b) ano
1.19 ano **1.20** ano **1.21** a) ano, b) ne **1.22** ano (příklad je obtížnější) **1.23** ano **1.26**
 ne **1.27** ne **1.28** platí **1.29** a) ne, b) ano **1.30** ano **1.31** ano, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^n}{2n}$
 stejnoměrně konverguje na $\langle -1, 1 \rangle$ **1.32** ano **1.33** ano **1.34** ne **1.35** ano **1.36** ano **1.37**
 ano **1.38** 18 **1.39** ano

2.4 stejnoměrně na $\mathbb{R}$ **2.5** stejnoměrně na $\mathbb{R}$ **2.6** stejnoměrně na $\mathbb{R}^+$ **2.7** stejnoměrně na $(-\infty, c)$ pro
 $c < 0$, ale $\mathcal{O} = (-\infty, 0)$ **2.10** $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ **2.11** stejnoměrně na $\mathbb{R}^+$ podle Abelova kritéria **2.12**
 stejnoměrně na $\mathbb{R}$ **2.13** stejnoměrně **2.14** stejnoměrně **2.15** konverguje stejnoměrně podle Abelova kritéria
2.16 nekoneguje stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ a $s(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ pro $x \neq 0$ a $s(0) = 0$ **2.17** stejnoměrně
 na $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ podle Dirichletova kritéria **2.18** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **2.19** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **2.20**
 stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **2.21** $\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$ a $\text{Dom}(\varphi) = \mathbb{R}$ **2.22** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **2.23**
 stejnoměrně **2.24** nekoneguje stejnoměrně na $\langle 0, 1 \rangle$ **2.25** platí na $\mathbb{R}$ **2.26** ano **2.28** tvrzení neplatí
2.29 $\frac{1}{2} \ln(2)$ **2.30** $\frac{\pi^2}{6}$ **2.31** $\frac{\pi^3}{12}$ **2.32** užijte Dirichletova kritéria **2.34** pro $p > 1$ je $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$,
 pro $p \in (0, 1)$ je $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$ a pro $p \leq 0$ je $\mathcal{O} = (-1, 1)$ **2.35** $\mathcal{O} = (-4, 4)$ **2.36** $\mathcal{O} = (-1, 1)$ **2.37**
 pro $a \in (0, 1)$ je $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, pro $a = 1$ je $\mathcal{O} = (-1, 1)$ a pro $a > 1$ je $\mathcal{O} = \{0\}$ **2.38** $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$ **2.39**
 $\mathcal{O} = (-e^{-1}, e^{-1})$ **2.40** $\mathcal{O} = \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$ **2.41** pro $b \leq a$ je $\mathcal{O} = \langle -a^{-1}, a^{-1} \rangle$ a pro $a < b$ je $\mathcal{O} = \langle -b^{-1}, b^{-1} \rangle$
2.42 pro $\beta \in (0, 1)$ je $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$ a pro $\beta > 1$ je $\mathcal{O} = (-\beta, \beta)$ **2.43** pro $a \geq b$ je $\mathcal{O} = (-a, a)$ a pro $b \geq a$ je
 $\mathcal{O} = (-b, b)$ **2.44** $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$ **2.45** $\mathcal{O} = \langle 2, 4 \rangle$ **2.46** $\mathcal{O} = \langle -8, 2 \rangle$ **2.47** $\mathcal{O} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **2.48** lze
 derivovat člen po členu **2.50** $\pi/4$ **2.51** konverguje stejnoměrně **2.52** nekoneguje stejnoměrně **2.53**
 konverguje stejnoměrně na $\langle -1, 1 \rangle$ **2.54** konverguje stejnoměrně **2.55** konverguje stejnoměrně **2.56** $\mathcal{O} =$
 $\langle -2, 2 \rangle$ **2.57** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n)} \frac{2x}{n^2 + x^2}$ **2.58** $\mathcal{O} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ **2.59** $\frac{\pi}{8\sqrt{3}} \ln(2)$ **2.60** konverguje stejnoměrně na
 M **2.61** $\mathcal{O} = \langle 1/2, 3/2 \rangle$ **2.62** návod: užijte větu o záměně sumy a limity **2.63** konverguje stejnoměrně na
 M **2.64** konverguje stejnoměrně na M **2.65** konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$

3.1 je analytická **3.3** $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45}$ **3.4** $x - \frac{x^3}{3}$ **3.5** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+x)^{2n}}{n}$ **3.6** $-\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$ a $\mathcal{O} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **3.7** pro $x \in (-1, 1) : s(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ **3.8** pro $x \in (-1, 1) : s(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ **3.10** pro $x \in (-1, 1) : s(x) = \frac{x(1-x)}{(1-x)^3}$ **3.12** pro $x \in (-1, 1) : s(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$ **3.13** $2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ **3.14** 1 **3.15** $\delta < \frac{1}{11}$ **3.16** $\operatorname{tg}(x) \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7$ **3.17** ≈ 0.24489 , zbytek: $R_3 \leq \frac{1}{42 \cdot 4^7}$ **3.18** $\frac{1}{6}$ **3.19** $\ln(5) = 1.606 \pm 0.006$ **3.20** -0.921 ± 0.008 **3.21** $s(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$ **3.22** $e^{x/2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$ pro $x \in \mathbb{R}$ **3.23** $1/2$ **3.24** $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ **3.25** $s(x) = -3 \frac{x^2}{(3+x)^2}$ pro $x \in (-3, 3)$ **3.26** $-1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)!!} x^{2n+2}$ pro $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$ **3.27** $\frac{19}{90}$ **3.28** $30e^5$ **3.29** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ na $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$ **3.30** $\frac{1}{4}$ **3.31** $\frac{1}{3}$ **3.32** $\frac{2}{3} \ln(2) - \frac{5}{18}$ **3.33** $-\frac{1}{6}$ **3.34** $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right) x^n$ na $I = (-1, 1)$ **3.35** $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{8}$ **3.36** $2 \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ **3.37** 6 **3.38** $1.057\,250\,873 \pm 2 \cdot 10^{-9}$ **3.39** $\mathcal{O} = \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$ a součet: $s(x) = (1+3x)^{\alpha/3} - 1$ **3.40** 10 **3.41** $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ **3.42** $\frac{1}{4}$ **3.44** $5.143\,72 \pm 0.000\,04$ **3.45** platí, ačkoliv řada $\sum_n f_n(x)$ nekonverguje na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ stejnoměrně **3.47** $s(x) = -\ln(1 - e^{-x})$ **3.49** $s(x) = e^x(x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 2x)$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **3.50** $s(x) = \frac{1}{2}(\sinh(x) - \sin(x))$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ **3.51** $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ **3.52** $s(x) = x \ln(1 + \frac{x+x^2}{2})$, $\operatorname{Dom}(s) = \langle -2, 1 \rangle$ **3.53** -202 **3.54** $s(x) = \frac{x}{4}(2+x)e^{x/2}$, $\operatorname{Dom}(s) = \mathbb{R}$ **3.55** $s(x) = 2x - 2 \ln(1+x) - x \ln(1+x)$, $\operatorname{Dom}(s) = (-1, 1)$ **3.56** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(x-5)^n}{3^n}$ **3.57** $f(x) = 1 - \frac{x}{4} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{x^n}{4^n}$, $\mathcal{O} = \langle -4, 4 \rangle$ **3.58** $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-16)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4^{n+1}}$, $\mathcal{O} = \langle -1/2, 1/2 \rangle$

4.1 $(x-2y+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ – elipsa se středem v bodě $(-3, -1)$ **4.2** $y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{C_1 + x^2} + C_2$ s definičním oborem $I = \mathbb{R}$ pro $C_1 > 0$ a $I = (\sqrt{-C_1}, \infty)$ nebo $I = (-\infty, -\sqrt{-C_1})$ pro $C_1 < 0$, pro $C_1 = 0$ je $y_{1,2}(x) = \pm x + C_2$ **4.3** $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 \frac{e^{3x}}{x} + C_3 e^{3x} + 1$ s definičním oborem $I = \mathbb{R}^+$ nebo $I = \mathbb{R}^-$ pro $C_1 \neq 0$ nebo $C_2 \neq 0$, pro $C_1 = C_2 = 0$ je $I = \mathbb{R}$ **4.4** $y(x) = 2x$, $I = \mathbb{R}$ **4.5** $y(x) = (x+1)^{-1}$, $I = (-1, \infty)$ **4.6** $y(x) = \operatorname{tg}(4x) - 4x - 1$, $I = (-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ **4.7** $y(x) = C_1 x + C_2 \sqrt{x^2 - 1}$, $I = (1, \infty)$ **4.8** $(x-K)^2 + (y-K)^2 = 2K^2$ – kružnice o poloměru $\sqrt{2}K$ se středem v bodě (K, K) **4.9** $y''' - 5y'' + 7y' + 13y = 32e^x$ **4.10** $y(x) = 2(x+1)e^{3x} \sin x$, $I = \mathbb{R}$ **4.12** $2x^3 + 5xy^2 + 2x^2y + 4x^2 - 4xy - 2x = C$ a pro $C = 0$ jde o elipsu **4.13** $y(x) = e^x(1 + \frac{x}{2}) \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$ **4.14** $(x-y)^2 + x^2 = C$ – elipsa **4.15** $y(x) = 4x - 2x \ln(-x) + 4\sqrt{-x}$, $I = \mathbb{R}^-$ **4.16** $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + x e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$ **4.17** $y_{1,2}(x) = \pm \frac{1}{3}(x^2 + C_1)^{3/2} + C_2$, $I = \mathbb{R}$ pro $C_1 \geq 0$ a $I = (\sqrt{-C_1}, \infty)$ pro $C_1 < 0$ **4.18** $y(x) = x + \frac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}^+$ **4.19** $4 \ln(2y - 6x - 3) + y - 4x + 7 = 0$ **4.20** $y(x) = -2x - 6$, $I = \mathbb{R}$ **4.21** $y = \sqrt{x}$, $I = \mathbb{R}^+$ **4.22** $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x} - 8x^2 e^x$, $I = \mathbb{R}$ **4.23** $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 6xy' - 6y = 0$ **4.24** $y(x) = C_1 x^3 e^{2x} + C_2 x^{-7} e^{2x} + C_3 e^{2x} + x^2 e^{2x}$, $I = \mathbb{R}^+$ **4.25** $y_{1,2}(x) = x - 3 \pm \sqrt{d - 10x}$, $I = (-\infty, \frac{d}{10})$ pouze pro $d > 0$ – jde o systém parabol vzešlých z formálního řešení $y^2 - 2xy + x^2 + 4x + 6y = C$ **4.26** $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \cos(x) \ln|\cos(x)| + x \sin(x)$, $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **4.27** elipsa: $y^2 + 4xy + 8x^2 = Cx$ **4.28 a** $y(x) = \frac{8}{x} e^{-x/2} - e^{-x/2}$, $I = \mathbb{R}^+$ **4.28 b** $y(x) = 4e^{-x/2}$, $I = \mathbb{R}$ **4.29** $y(x) = (1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin(x)})^3$, $I = (4\pi, 5\pi)$ **4.30** $y(x) = e^x(\ln(x) + C)$, $I = \mathbb{R}^+$ **4.31** $y(x) = C e^{x^2} - x^2 - 1$, $I = \mathbb{R}$ **4.32** $y(x) = C e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$, $I = \mathbb{R}$ **4.33** $y(x) = (C e^{-x^2} + 1)^2$, $I = \mathbb{R}$ **4.34** $y(x) = (x + \frac{\pi}{2}) \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$, $I = (-\pi, \pi)$ **4.35** $y_{12}(x) = \pm \sqrt{\frac{C}{x} - 1}$, $I = (0, C)$ pro $C > 0$ a $I = (C, 0)$ pro $C < 0$ **4.36 a** $y(x) = x^2 e^{-x} - \frac{1}{x} e^{-x}$, $I = \mathbb{R}^+$ **4.36 b** $y(x) = x^2 e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$ **4.37** $x(y) = -\frac{1}{5}y^2 + \frac{C}{y^3}$, $I = \mathbb{R}^+$ **4.38** $y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{2 \ln(C(1 + e^x))}$, $I = \mathbb{R}$ pro $C \geq 1$ a $I = (\ln(\frac{1}{C} - 1), \infty)$ pro $C \in (0, 1)$ **4.39** $y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{C \frac{x^2}{x^2+1} - 1}$, pouze pro $C > 1 : I = (\frac{1}{\sqrt{C-1}}, \infty)$ nebo $I = (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{C-1}})$ **4.40** $y(x) = -e^{|x|^{-1}}$

$I = \mathbf{R}^-$ **4.41** $y(x) = -\sqrt{\ln(2-2\cos(x))}$, $I = (\frac{7}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi)$ **4.42** $x(y) = -\sqrt{3\sqrt{3}y^{-1} + y^2/3}$, $I = \mathbf{R}^+$
4.43 $x(y) = e^y(C + y^2)$, $I = \mathbf{R}$ **4.44** $\operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = C$ **4.45** $y(x) = \frac{1}{4} + (x + \frac{3}{2}) \ln \frac{\sqrt{x+3/2}}{2}$,
 $I = (-\frac{3}{2}, \infty)$ **4.46 a** $y(x) = x + 1$, $I = \mathbf{R}$ **4.46 b** $y(x) = 2x$, $I = \mathbf{R}$ **4.47** $y(x) = -x \ln(\ln(C|x|))$,
 $I = (C^{-1}, \infty)$ **4.48** $y(x) = xe^{1+Cx}$, $I = \mathbf{R}^+$ nebo $I = \mathbf{R}^-$ **4.49** $y(x) = C_1 \frac{\cos(x)}{x} + C_2 \frac{\sin(x)}{x}$, $I = \mathbf{R}^+$
4.50 $y(x) = C_1 \ln(x) + C_2 x$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.51** $\mathbf{R}^+ \setminus \{e\}$ **4.53** $y(x) = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$, $I = \mathbf{R}$ **4.54**
 $y(x) = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$, $I = \mathbf{R}$ **4.55** $y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + \cos(x) \ln \left| \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)} \right|$, $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **4.56**
 $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^3 e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$ **4.57** $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x)$, $I = \mathbf{R}$ **4.58 a**
 $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, $I = \mathbf{R}$ **4.58 b** $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$, $I = \mathbf{R}$ **4.58 c**
 $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$ **4.59 a** $F_S = \{1, x, e^x, e^{-x/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{-x/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}$ **4.59 b** $F_S =$
 $\{e^{\sqrt{3}x} \cos(x), e^{\sqrt{3}x} \sin(x), e^{-\sqrt{3}x} \cos(x), e^{-\sqrt{3}x} \sin(x), \cos(2x), \sin(2x)\}$ **4.60** $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x^3 - 6x$,
 $I = \mathbf{R}$ **4.61** $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + 2e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$ **4.62** $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{2}{5} \cos(2x) - \frac{6}{5} \sin(2x)$,
 $I = \mathbf{R}$ **4.63 a** $y(x) = C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + \frac{6}{37} \cos(3x) + \frac{1}{37} \sin(3x) + \frac{1}{9} e^x$, $I = \mathbf{R}$ **4.63 b** $y(x) =$
 $C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x) - \frac{1}{6} x e^x \cos(3x)$, $I = \mathbf{R}$ **4.64** $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^x \cos(2x) + C_4 e^x \sin(2x)$,
 $I = \mathbf{R}$ **4.65 a** $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ **4.65 b** nemá řešení **4.66** $y(x) = C_1 \cos(\ln|x|) + C_2 \sin(\ln|x|) + x/2$,
 $I = \mathbf{R}^+$ nebo $I = \mathbf{R}^-$ **4.67** $y(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{-x}$, $I = \mathbf{R}^-$ **4.68** $xy + x + y = C$ – hyperbola se
středem v bodě $(-1, -1)$ **4.69** $y(x) = (1 + x^2 + x^3)e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$ **4.70** $x^3 - 6x^2 - 6x + xy^2 + 2xy = C$,
pro speciální volbu $C = 0 : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$, což je kružnice **4.71** pro $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a $A = \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$:
 $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{A^2}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) = x_m \sin(\omega t + \delta) + \frac{A^2}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$ a $I = \mathbf{R}^+$, kde jsme položili
 $C_1 = x_m \sin(\delta)$ a $C_2 = x_m \cos(\delta)$ **4.72** $x(t) = x_m \sin(\omega t + \delta) + \frac{A^2}{2\Omega} t \cos(\Omega t)$ a $I = \mathbf{R}^+$ **4.73** $y(x) =$
 $C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 \sin(3x) + C_4 \cos(3x) + 117 \sin(x) + 39 \cos(x) - 12x \sin(3x) - 44x \cos(3x)$, kde $I = \mathbf{R}$ **4.74**
 $x^2(\ln(x) - 1)y'' - xy' + y = q(x)$, kde $q(x)$ je libovolná funkce **4.76** $y(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + C_3 x^4 + \frac{C_4}{x^3} + 2x \ln(x)$, $I = \mathbf{R}^+$
4.77 $y(x) = C_1(x \ln(x) + 1) + C_2 x + x^2$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.78** $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) + x^2 e^{-x} + 2x e^{-x}$,
 $I = \mathbf{R}$ **4.79** $y(x) = C_1 \frac{x}{1-x} + 2C_2 \frac{x}{1-x} \ln(x) + C_2(1+x) + \frac{x^3}{1-x^2}(6-8x+3x^2)$, $I = (0, 1)$ **4.80** $y(x) =$
 $C_1 x^3 + C_2 \ln(x) + C_3$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.81** $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x e^x - 1 + (e^x - e^{-x}) \ln|e^x - 1|$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.82**
 $y(x) = C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x) + 2x e^x \sin(x)$, $I = \mathbf{R}$ **4.83** $y^{(4)} + 4y''' + 14y'' + 20y' + 25y = 0$ **4.84**
 $x^2 - x + y + xy + \frac{5}{2}y^2 = C$ – pro $C > -0.5$ jde o elipsy **4.85** $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^3 e^x - \frac{1}{3}x^2 e^x$,
 $I = \mathbf{R}$ **4.86** $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x}{2}$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.87** $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln(-x) + x \ln^2(-x)$, $I = \mathbf{R}^-$ **4.88**
 $y(x) = \frac{1}{25}(e^{x^2} + 4e^{-x^2/4})^2$, $I = \mathbf{R}$ **4.89** $y(x) = (2e^{-4(e^x-1)} - 1)^{-1/4}$, $I = (-\infty, \ln(1 + \ln 2^{1/4}))$ **4.90** $y(x) =$
 $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{7x} + C_5 e^{-3x} + 6x^4$, $I = \mathbf{R}$ **4.91** $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} x \sqrt{\sin(\frac{\pi}{6} - \ln(x))}$, $I = (e^{-5\pi/6}, e^{\pi/6})$ **4.92**
 $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x) \ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin(x)}\right) + \frac{1}{2} \sin(x) \ln\left(\operatorname{tg}(\frac{x}{2})\right)$, $I = (0, \pi/2)$ **4.93** $y^2 - 2xy + 2x^2 = C$ –
elipsa **4.94** $y(x) = C_1 e^{x^4} + C_2 + x^4 e^{x^4}$, $I = \mathbf{R}$ **4.95** $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + C_4 e^{-2x} + 4x$, $I = \mathbf{R}$ **4.96**
 $y(x) = C_1 + \frac{1}{C_2} \ln(1 + C_2 x^2)$, kde $I = \mathbf{R}$ pro $C_2 > 0$, $I = \emptyset$ pro $C_2 = 0$ a $I = (-\sqrt{\frac{-1}{C_2}}, \sqrt{\frac{-1}{C_2}})$ pro $C_2 < 0$ **4.97 a**
 $y(x) = (x^2 + 3x^{-2})e^{x^2}$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.97 b** $y(x) = x^2 e^{x^2}$, $I = \mathbf{R}$ **4.98** $y(x) = -\frac{5\pi}{\sin(x)} + 2x + (2-x^2)\cotg(x)$, $I =$
 $(2\pi, 3\pi)$ **4.99** $y(x) = C_1 + C_2(x - \operatorname{arctg}(x)) + x$, $I = \mathbf{R}$ **4.100** $y(x) = C_1 \arcsin(x) + C_2 + 3x - x^3$, $I = (-1, 1)$
4.101 $y(x) = 1 + (2x+1) \ln|2x+1|$, $I = (-\infty, -0.5)$ **4.102** $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + C_3 e^{3x} + 3x^2 e^{-2x}$, $I =$
 $\mathbf{R}$ **4.103** $y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 - 2 \cos(x) + \frac{1}{\cos(x)}$, $I = (-\pi/2, \pi/2)$ **4.104** $y(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3 x^2 + x \ln(x)$,
 $I = \mathbf{R}^+$ **4.105** $y(x) = 2x + (x+1) \arcsin(C(x+1))$, kde $I = (-C^{-1} - 1, C^{-1} - 1)$ pro $C > 0$, $I = (-1, \infty)$ pro
 $C = 0$ a $I = (C^{-1} - 1, -C^{-1} - 1)$ pro $C < 0$, **4.106** $y(x) = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x) + x e^{-x} \cos(2x) +$

$e^{-x} \sin(2x) \ln(\cos(x))$, $I = (-\pi/2, \pi/2)$ **4.107** $y_1(x) = \frac{x^2}{x-C}$, kde $I = (C, \infty)$ pro $C \neq 0$, $y_2(x) = x$, kde $I = \mathbf{R}$ pro $C = 0$ a $y_3(x) = 0$, kde $I = \mathbf{R}$ **4.108** $y(x) = C_1 x e^{2x} + C_2 x + 4x^2 e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$ **4.109** $y'' - 4y = 0$ **4.110**
 $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{2x} - x^2 e^{-x} + x e^x$, $I = \mathbf{R}$ **4.111** $y(x) = \frac{C_1}{2-x} + C_2(2-x)^3 - \frac{2}{3} + \frac{2-x}{4}$, $I = (-\infty, 2)$
4.112 $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x) - \frac{1}{2} x \cos(x)$, $I = \mathbf{R}$ **4.113** $y(x) = x \sqrt{2 \ln(Cx)}$,
 $I = (1/C, \infty)$ pouze pro $C > 0$ **4.114** $y(x) = x(x^4/2 + 8)^{-1/2}$, $I = \mathbf{R}$ **4.115** $y(x) = C_1 + C_2(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}) + x$,
 $I = (1, \infty)$ **4.116** $y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x} + \frac{1}{x}(2 \ln^2|x| + \ln|x|)$, $I = \mathbf{R}^-$ **4.117** $y(x) = C_1(1 + x \operatorname{tg}(x)) + C_2 \operatorname{tg}(x)$,
 $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **4.118** $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x^3 e^{-2x} + C_3 x^4 e^{-2x} + 2x^2 e^{-2x}$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.119** $y(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$,
 $I = (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ **4.120** $y(x) = e^{2x} \sin(x) + 2x e^x$, $I = \mathbf{R}$ **4.121** $y(x) = C_1 \cotg(x) + C_2(1 - x \cotg(x))$, $I = (0, \pi)$
4.122 $y(x) = C_1 x^2 e^x + C_2 x^2 e^{-x} + C_3 x^2 + 2x^2 e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$ **4.123** $y(x) = (x^2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{2(x^2-1)})^{-1/2}$, $I = \mathbf{R}$
4.124 $y^{(4)} - 4y''' + 24y'' - 40y' + 100y = 0$ **4.125** $y''x^2 - 2y'x + y(2 - x^2) = 0$ **4.126** $y(x) = C_1 +$
 $C_2 \ln(x) + C_3 x^3 + 2x^3 \ln(x)$, $I = \mathbf{R}^+$ **4.127** $y(x) = x \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $I = (\pi, 3\pi)$ **4.128** $y(x) = \frac{1}{x+1}$, $I = (-1, \infty)$
4.129 $y(x) = x$ **4.130** $y(x) = x e^{x^2/2}$ **4.131** $y(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ **4.132** $y(x) = x e^x$ **4.133**
 $FS = \{\frac{1}{1-x^2}, \frac{x}{1-x^2}\}$ **4.135** $y_1(x) = 4x+1$, $y_2(x) = 1-x$, $y-4x-1 = C(y+x-1)^3$ **4.136** $y''' - 3y'' + 4y = 4x$
4.137 a $y(x) = (ax+b)e^{-5x}$ **4.137 b** $y(x) = (ax+b)x$ **4.137 c** $y(x) = (ax+b)x e^{3x}$ **4.137 d**
 $y(x) = (ax+b)x e^{-5x} \cos(2x) + (cx+d)x e^{-5x} \sin(2x)$ **4.137 e** $y(x) = (ax+b) \cos(2x) + (cx+d) \sin(2x)$

5.1 $\vec{\sigma}(q) = (3, -2, -3, -6)$ a $q(x, y, z, w) \triangleleft \triangleright 0$. **5.2** $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $B_P = \{(1, 0, 0), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0), (0, 0, 1/\sqrt{3})\}$
5.3 viz např. výsledek cvičení 5.2 **5.4 a** $(2, \infty)$ **5.4 b** $\emptyset$ **5.5** $sg(q) = (3, 0, 0)$ – eliptický typ, regulární
s normálním tvarem $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $B_P = \{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (-1, 1, -1)^T\}$, transformace: $x_1 = y_1 - y_3$, $x_2 = y_3$ a
 $x_3 = y_2 - y_3$ **5.6** $B_P = \{(0, -\sqrt{3}/3, 0), (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), (\sqrt{3}/2, -2\sqrt{3}/2/3, \sqrt{3}/2)\}$ **5.7** $\lambda \in (-4/5, 0)$
5.8 $x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3$, $x_2 = y_2 + 3y_3$ a $x_3 = y_3$ **5.9** $B_P = \{(-\sqrt{2}/2, 0, 0), (-2, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$ **5.10**
elipsa: $z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$, kde $x_1 = z_1 - z_2/3 + 2/3$ a $x_2 = 2z_2/3 - 1/3$ **5.11** imaginární různoběžky: $z_1^2 + z_2^2 = 0$,
5.12 $(-1, 1)$ **5.13 a** hyperbolický paraboloid $z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$ **5.13 b** eliptická kuželová plocha
 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$ **5.13 c** elipsoid $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1 = 0$ **5.13 d** jednodílný hyperboloid $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 1 = 0$
5.13 e hyperbolický válec $z_1^2 - z_2^2 - 1 = 0$ **5.13 f** jednodílný hyperboloid $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 1 = 0$ **5.13 g**
dvoudílný hyperboloid $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0$ **5.13 h** jednodílný hyperboloid $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 1 = 0$ **5.13 i**
imaginární kuželová plocha $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ **5.13 j** parabolický válec $z_1^2 - 2z_2 = 0$ **5.13 k** kuželová
plocha $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$ **5.13 l** válec $z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$ **5.14** regulární **5.15** dvoudílný hyperboloid:
 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0$ **5.17** $sg(q) = (5, 0, 0)$, $\vec{u}_5 = (-7, -2, 2, 0, 1)^T$ nebo $\vec{u}_5 = (7, 2, -2, 0, -1)^T$ **5.18** hyperbo-
lický paraboloid $z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$, který je regulární a má signatury $sg(Q) = (1, 1, 1)$ a $SG(Q) = (2, 2, 0)$ **5.19** $\lambda = 3$
5.20 hyperbolická forma $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, $sg(q) = (2, 1, 0)$ a $B_P = \{(-1, 0, 0)^T, (1, -1, 0)^T, (\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)^T\}$
5.21 $B_P = \{(-1, 2, 1)^T, (0, 1, 0)^T, (-2, 5, 1)^T\}$ a $x_1 = -y_1 - 2y_3$, $x_2 = 2y_1 + y_2 + 5y_3$ a $x_3 = y_1 + y_3$, pak
 $q(\vec{y}) = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ **5.22** $a \in (2, 4)$ **5.23** hyperbolický válec $z_1^2 - z_2^2 = 1$ s hlavní signaturou $(1, 2, 1)$
a vedlejší signaturou $(1, 1, 1)$, polární bázi je např. množina $\{(1/2, 0, 0)^T, (1/4, 1/2, 0)^T, (-2, -3, 1)^T\}$ **5.24** ku-
želová plocha $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$ **5.25** $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ – pozitivně semidefinitní, $sg(q) = (3, 0, 1)$, parabolický typ
5.26 $\vec{u}_{412} = \pm(12, -4, -1, 1)^T$ vede na normální tvar $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2$ se $sg(q) = (2, 2, 0)$ **5.27** pouze a)
a c) **5.28** $a \in (-3, 0)$ **5.30** neplatí **5.31** $\beta \in (3, +\infty)$ **5.32** $\mu > 0$ jednodílný hyperboloid, $\mu = 0$
kuželová plocha, $\mu < 0$ dvoudílný hyperboloid **5.34** hyperbolický paraboloid s polární bází obsahující např. vek-
tory $(1, 0, 0)^T$ $(-5, 1, 0)^T$ a $(-13, 3, 1)^T$, jde o necentrální kvadriku **5.35** $(a, b, c) = (-20, 4, -56)$ **5.36** buď

$(-7, -2, 1, -5)^\top$ nebo $(7, 2, -1, 5)^\top$, signatura: $(3, 1, 0)$ **5.37** $\beta = -12$ **5.38** $x = 2r + 3s/2$ a $y = s/2$, kanonický tvar: $q(r, s) = 4r^2 - 2s^2$ **5.39** $\ell = -1$, vztahy: $x_1 = y_1 - 7y_2 - 28y_3$, $x_2 = y_2 + 9y_3$ a $x_3 = y_3$ **5.40**
 $x_1 = y_1 - 2y_2 + 14y_3 - 8y_4$, $x_2 = y_2 - 3y_3 + 2y_4$, $x_3 = y_3$ a $x_4 = y_4$ **5.41** $\ell = -1$ **5.42** $(8, 1, 5)$ **5.43**
 $\mu \in (-1, 1)$

6.1 k důkazu užijte matematickou indukci **6.2** dokazuje se analogicky jako věta 6.1.3 **6.3** dokazuje se analogicky jako věta 6.1.5 **6.4** dokazuje se analogicky jako věta 6.1.7 **6.7** ano **6.9 a** elipsa o poloosách a, b a středu $(0, 0)$ **6.9 b** šestiúhelník s vrcholy $(-5, 0)$, $(-3, 2)$, $(3, 2)$, $(5, 0)$, $(3, -2)$, $(-3, -2)$ **6.10** rotační elipsoid: $x_1^2 + x_3^2 + 2(x_1 - x_2 - x_3)^2 < 16$ **6.11** $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ **6.12 a** $\vec{z} = (3, 2)^\top$ **6.12 b** jsou oddělené **6.14** nejde o metriku **6.18** návod: nalezněte limitu uvedené posloupnosti a dokažte, že není racionální **6.19** ano **6.21** není kompaktní **6.22** není izolovaný, není hromadný, není vnitřní, je hraniční a není bodem A **6.26** je skalárním součinem, $\varrho(x, x^2) = \frac{2}{\sqrt{30}}$ **6.28** je skalárním součinem, hodnota normy: 5, okolím je otevřená elipsa s osami, jež nejsou rovnoběžné se souřadnými osami **6.29** $(2, 3)$ je vnitřním bodem, $(5, 3)$ je hraničním bodem, $\text{dist}(A, \{\vec{a}\}) = 3$ **6.30** limitou je bod $(0, 1)$, $n_0 = \lceil 5/\varepsilon \rceil$, v prostoru $\{\mathbf{R}, \tau\}$ posloupnost limitu nemá **6.32** konverguje k $(1, 2, 0)$ **6.33** konverguje k $(1, 2, 0)$ **6.34** buď $(-7, -2, 2, 0, 1)^\top$ nebo $(7, 2, -2, 0, -1)^\top$ **6.36** v $\{\mathbf{R}, \tau\}$ není cauchyovská, v $\{\mathbf{R}, \varrho\}$ je cauchyovská **6.37** konvexní ovál se středem v bodě $(2, 3)$, okolí ${}^{(\varrho_e)}\mathcal{U}_1(2, 3)$ je jeho podmnožinou

Literatura

- [1] L. Balková: Lineární algebra 1, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2013, ISBN 978-80-01-05346-1
- [2] L. Balková: Lineární algebra 2, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014, ISBN 978-80-01-05441-3
- [3] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček: *Vybrané kapitoly z matematické fyziky*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1975
- [4] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Univerzita Karlova – vydavatelství Karolinum, Praha 1993
- [5] B. Budínský a J. Charvát: *Matematika I*, SNTL/Alfa, Praha 1987
- [6] B. Budínský: *Matematika III*, Ediční středisko ČVUT, Praha 1982
- [7] B.P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Praha 2004
- [8] E. Dontová: *Matematika III*, Ediční středisko ČVUT, Praha 1988
- [9] S. Fučík: *Příklady z matematické analýzy*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1977
- [10] V. Jarník: *Úvod do počtu diferenciálního*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha 1946
- [11] V. Jarník: *Pokračování úvodu do počtu diferenciálního*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1953
- [12] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFFUK, Praha 1998
- [13] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (III)*, Matfyzpress MFFUK, Praha 1999
- [14] J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFFUK, Praha 2003
- [15] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (IV)*, Matfyzpress MFFUK, Praha 2003
- [16] M. Krbálek: *Matematická analýza IV (druhé přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2009
- [17] M. Krbálek: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014
- [18] K. Rektorys: *Přehled užití matematiky I a II*, Prometheus, Praha 1995
- [19] J. Seibert: *Matematická analýza IV*, Gaudeamus, Hradec Králové 1992

Rejstřík

- ℓ -násobný faktoriál, 72
- ε -okolí, 202
- χ_p —metrika, 195
- $\mathbb{A}$ —skalární součin, 179
- σ —metrika, 193
- q —ortogonální vektory, 151
- Abelova parciální sumace, 49
- Abelova věta, 59
- Abelovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci, 50
- Abelovo lemma, 55
- absolutně integrabilní funkce, 225
- absolutní člen kvadratické funkce, 155
- absolutní člen kvadriky, 155
- absolutní konvergence, 36
- analytická funkce, 71
- asymptoty hyperboly, 156
- axiomy metriky, 192
- axiomy normy, 184
- axiomy skalárního součinu, 178
- Babylónská redukce – Lagrangeův algoritmus, 152
- báze Hilbertova prostoru, 230
- Bernoulliho diferenciální rovnice., 99
- Besselova nerovnost, 229
- bodová konvergence posloupnosti funkcí, 9
- bodová konvergence řady funkcí, 31
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí, 10
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro bodovou konvergenci řady funkcí, 32
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí, 17
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí, 45
- Bunjakovského nerovnost, 178
- Cantorova věta, 208
- Cauchyova úloha pro diferenciální rovnici, 113
- cauchyovská posloupnost, 200
- Cauchyovy počáteční podmínky, 113
- centrálnost a ncentrálnost kvadriky, 158
- centrovaný monom stupně n , 69
- částečný součet řady funkcí, 31
- Čebyševova metrika, 193
- Čebyševova váha, 182
- dědičnost stejnoměrné konvergence, 14
- derivace množiny, 207
- derivace řady člen po členu, 49
- diagonální tvar bilineární formy, 143
- diagonální tvar kvadratické formy, 144
- diferenciální operátor, 94
- diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, 100
- diferenciální rovnice ve tvaru totálního diferenciálu, 102
- dimenze Hilbertova prostoru, 230
- direktrix paraboly, 156
- Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci, 50
- disjunktní množiny, 209
- divergence číselné posloupnosti, 9
- divergentní posloupnost bodů z množiny, 197
- dvoudílný hyperboloid, 164
- ekvivalentní množiny, 209
- ekvivalentní normy, 190
- elipsa, 155
- elipsoid, 164
- eliptická kvadratická forma, 151
- eliptická kuželová plocha, 167
- eliptický paraboloid, 165
- eliptický válec, 166
- error function, 85
- euklidovská metrika, 194
- euklidovská norma, 184
- euklidovský prostor, 201
- Eulerova diferenciální rovnice, 131
- Eulerův vzorec, 119
- exaktní diferenciální rovnice, 101
- excentricita elipsy, 155
- excentricita hyperboly, 155
- existenční věta teorie diferenciálních rovnic, 116
- explicitní tvar řešení, 100
- exponenciálně-goniometrické rovnosti, 129
- exponenciální spirála, 106
- faktorové funkce, 225
- formální řešení diferenciální rovnice, 100
- Fourierova řada, 227
- Fourierův koeficient, 227
- fundamentální systém řešení diferenciální rovnice, 118
- funkce $\operatorname{Erf}(x)$, 85
- funkcionální skalární součin s vahou, 180
- funkční koeficienty operátoru, 94
- funkční řada s nezápornými členy, 35
- geometrická řada, 32
- goniometricko-exponenciální rovnosti, 129
- Grammův-Schmidtův ortonormalizační proces, 188
- Hermiteova diferenciální rovnice, 216
- Hermiteova váha, 182
- Hermiteovy polynomy, 216
- hermiticita skalárního součinu, 178
- hermitovská matice, 144
- hermitovská sesquilineární forma, 144
- Hilbertův prostor, 201
- hlavní minor matice, 143
- hlavní poloosa elipsy, 155
- hlavní poloosa hyperboly, 155
- hlavní signatura kvadriky, 157
- hodnost bilineární formy, 143
- hodnost kvadratické formy, 144
- Hölderova nerovnost, 176
- homogenita normy, 184

homogenní diferenciální rovnice, 104
homogenní funkce, 104
hranice množiny, 205
hraniční bod množiny, 205
hromadný bod množiny, 207
hromadný bod posloupnosti, 198
hustá množina, 223
hyperbola, 155
hyperbolická kvadratická forma, 151
hyperbolický paraboloid, 165
hyperbolický válec, 166
charakteristická rovnice diferenciální rovnice, 123
charakteristický polynom diferenciální rovnice, 123
chybová funkce, 85
implicitní funkce, 99
indefinitnost kvadratické formy, 147
index posloupnosti funkcí, 9
index setrvačnosti kvadratické formy, 147
integrabilní funkce, 225
integrace řady člen po členu, 49
integrační faktor druhého druhu, 103
integračním faktor, 97
integrální kritérium, 37
interval konvergence mocninné řady, 56
interval řešení diferenciální rovnice, 93
izolovaný bod množiny, 207
jednodílný hyperboloid, 165
kanonická matice, 146
kanonický tvar kvadratické formy, 147
kanonický tvar kvadriky, 161
klesající posloupnost, 13
koeficienty diferenciální rovnice, 94
kompaktní množina, 207
konvergence číselné posloupnosti, 9
konvergence podle normy, 199
konvergence prvků v množině, 197
konvergence řady podle normy, 227
konvergentní posloupnost bodů z množiny, 197
konvexní množina, 196
kritérium analytičnosti, 78
kuželosečka, 155
kvadratická forma příslušná ke kvadratické funkci, 155
kvadratická forma příslušná ke kvadrice, 155
kvadratická forma, 144
kvadratická funkce, 155
kvadratická plocha, 155
kvadraticky integrabilní funkce, 224
kvadrika, 155
kvocient geometrické řady, 32
Lagrangeova věta o přírůstku, 24
Lagrangeův algoritmus, 152
Lagrangeův tvar zbytku, 70
Laguerreova diferenciální rovnice, 214
Laguerreova váha, 182
Laguerreovy polynomy, 214
Legendreova diferenciální rovnice, 213
Legendreovy polynomy, 189, 212
Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řad, 51
Leibnizovo kritérium, 40
lemma o superpozici, 123
levá linearita skalárního součinu, 178
limita posloupnosti bodů z množiny, 197
limita posloupnosti funkcí, 10
limitní funkce, 10
lineární člen kvadratické funkce, 155
lineární diferenciální rovnice bez pravé strany, 94
lineární diferenciální rovnice s nulovou pravou stranou, 94
lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, 123
lineární diferenciální rovnice, 93
lineární zobrazení, 144
Maclaurinova řada funkce, 71
Maclaurinův polynom, 70
Maclaurinův vzorec funkce, 70
majorantní řada funkcí, 36
matice kvadratické formy, 143
matice bilineární formy, 144
matice kvadratické funkce, 155
matice kvadriky, 155
matice lineárního zobrazení, 144
maximální řešení diferenciální rovnice, 93
metoda postupných aproximací, 116
metoda variace konstant, 120
metrický prostor, 192
metrika generovaná normou, 195
metrika, 192
Minkovského nerovnost, 177, 184
množina konečná, 209
množina nekonečná, 209
množina nespočetná, 209
množina souvislá, 209
množina spočetná, 209
mocninná řada, 55
monom stupně n , 69
monotónní posloupnost, 13
neabsolutní konvergence, 36
negativní definitnost kvadratické formy, 147
negativní semidefinitnost kvadratické formy, 147
neklesající posloupnost, 13
nelineární diferenciální rovnice, 93
nerostoucí posloupnost, 13
norma generovaná skalárním součinem, 185
norma, 184
normální matice, 143
normální tvar kvadratické formy, 147
normální tvar kvadriky, 161
normovaný prostor, 184
nulovost metriky, 192
nulovost normy, 184
nutná podmínka bodové konvergence, 34
nutná podmínka stejnoměrné konvergence, 46
oblast, 209
obor konvergence posloupnosti funkcí, 10
obor konvergence řady funkcí, 31
obyčejná diferenciální rovnice - obecný pojem, 93
oddělené množiny, 209
odmocninové kritérium, 37
ohnisko elipsy, 155
ohnisko hyperboly, 155
omezená množina, 207
operátor s konstantními koeficienty, 94
ortogonální množina, 179
ortogonální systém prvků, 226
ortogonální vektory, 179
ortonormalita lineárního zobrazení, 144
ortonormální množina, 188
ortonormální systém prvků, 226

otevřená množina, **205**
 parabola, **156**
 parabolická kvadratická forma, **151**
 parabolický válec, **166**
 Parsevalova rovnost, **230**
 partikulární řešení, **96**
 p-metrika, **193**
 podílové kritérium, **36**
 polární báze kvadratické formy, **151**
 poloměr konvergence mocninné řady, **56**
 poloosy kvadriky, **164**
 posléze konstantní posloupnost, **198**
 posloupnost částečných součtů, **31**
 posloupnost funkcí, **9**
 pozitivní definitnost kvadratické formy, **147**
 pozitivní definitnost skalárního součinu, **178**
 pozitivní semidefinitnost kvadratické formy, **147**
 prehilbertovský prostor, **178**
 prodloužení řešení diferenciální rovnice, **93**
 přidruženost kvadratické a bilinéární formy, **144**
 Pythagorova věta, **186**
 Raabeovo alternativní kritérium, **41**
 Raabeovo kritérium, **39**
 redukované okolí bodu, **202**
 regularita bilinéární formy, **143**
 regularita kvadratické formy, **144**
 regularita lineárního zobrazení, **144**
 regulární konvergence řady funkcí, **45**
 regulární kvadrika, **157**
 relativní konvergence, **36**
 Rieszova-Fischerova věta, **230**
 Rodriguesova formule pro Hermiteovy polynomy, **216**
 Rodriguesova formule pro Laguerreovy polynomy, **214**
 Rodriguesova formule pro Legendreovy polynomy, **212**
 rostoucí posloupnost, **13**
 rovnice bez pravé strany příslušná k diferenciální rovnici, **94**
 rovnoběžníková rovnost, **185**
 rozšířená kvadratická forma příslušná ke kvadratické funkci, **157**
 rozšířená kvadratická forma příslušná ke kvadrice, **157**
 řada funkcí, **31**
 řešení diferenciální rovnice v implicitním tvaru, **100**
 řešení diferenciální rovnice, **93**
 řídící přímka paraboly, **156**
 separabilní Hilbertův prostor, **224**
 Schwarzova-Cauchyova-Bunjakovského nerovnost, **178**
 signatura kvadratické formy, **147**
 silnější norma, **190**
 singularita bilinéární formy, **143**
 singularita kvadratické formy, **144**
 singularita lineárního zobrazení, **144**
 singulární kvadrika, **157**
 síťová metrika, **194**
 skalární součin, **178**
 skoková metrika, **195**
 součet řady funkcí, **31**
 součinná řada, **42**
 srovnávací kritérium bodové konvergence, **36**
 srovnávací kritérium pro stejnoměrnou konvergenci, **46**
 standardní (Legendreova) váha, **182**
 stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí, **13**
 stejnoměrná konvergence řady funkcí, **44**
 stejnoměrná omezenost, **50**
 střed kvadriky, **158**
 stupeň diferenciální rovnice, **93**
 supremální kritérium, **15**
 Sylvesterovo kritérium, **149**
 symetrická bilinéární forma, **143**
 symetrická matice, **143**
 symetrie metriky, **192**
 Taylorova řada funkce, **71**
 Taylorova věta, **71**
 Taylorovy koeficienty, **71**
 Taylorův polynom, **70**
 Taylorův vzorec funkce, **70**
 Thaletova elipsa, **187**
 Thaletova kružnice, **187**
 trigonometrická báze, **232**
 triviální metrika, **193**
 triviální snížení řady, **110**
 trojúhelníková nerovnost metriky, **192**
 typy definitnosti kvadratických forem, **147**
 typy excentricity kvadratických forem, **151**
 úhel mezi vektory, **180**
 unitární matice, **143**
 úplnost ortogonálního systému, **230**
 úplný metrický prostor, **200**
 úsečka, **196**
 uzávěr množiny, **205**
 uzavřená množina, **205**
 uzavřená oblast, **209**
 váha skalárního součinu, **182**
 vedlejší poloosa elipsy, **155**
 vedlejší poloosa hyperboly, **155**
 vedlejší signatura kvadriky, **157**
 vektor kvadratické funkce, **155**
 vektor kvadriky, **155**
 vektorové spektrum, **145**
 věta o derivování mocninné řady člen po členu, **60**
 věta o integrování mocninné řady člen po členu, **59**
 věta o jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy, **118**
 věta o normalizovatelnosti kvadratických forem, **146**
 věta o normalizovatelnosti kvadratických ploch, **159**
 věta o snížení řady diferenciální rovnice, **110**
 věta o spojitosti skalárního součinu, **202**
 věta o superpozici, **123**
 vlastní číslo matice, **145**
 vlastní vektor matice, **145**
 vnitřek množiny, **205**
 vnitřní bod množiny, **205**
 vzdálenost bodu od množiny, **195**
 vzdálenost množin, **195**
 Weierstrassovo kritérium, **47**
 Wronského determinant (wronskián), **115**
 Wronského matice, **115**
 základní věta teorie mocninných řad, **58**
 zákon setrvačnosti kvadratických forem, **146**
 zákon setrvačnosti kvadratických ploch, **159**
 zobecněná binomická věta, **83**
 zobecněné kombinační číslo, **72**
 zúžení řešení diferenciální rovnice, **93**
