2.3.1 Věta – *o přírůstku*

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na otevřeném intervalu $I = \bigtimes_{k=1}^r (\alpha_k, \beta_k)$ totální derivaci. Potom pro každé dva pevně zvolené body $\vec{a}, \vec{b} \in I$ existuje r bodů $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_r \in I$ tak, že platí

$$f(\vec{a}) - f(\vec{b}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i)\,(a_i - b_i).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- důkaz budeme demonstrovat (bez újmy na obecnosti) na případu $r = 2$, kdy $I = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2)$
- nechť $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$
- zcela bez jakýchkoliv pochybností platí formální rovnost

$$f(\vec{a}) - f(\vec{b}) = f(a_1, a_2) - f(b_1, a_2) + f(b_1, a_2) - f(b_1, b_2)$$

- definujme pro $t \in \langle a_1, b_1 \rangle$ funkci $\psi_1(t) = f(t, a_2)$ a pro $t \in \langle a_2, b_2 \rangle$ funkci $\psi_2(t) = f(b_1, t)$
- pak $\psi_1(t), \psi_2(t)$ jsou na svých definičních oborech spojité (viz věta 2.1.8) a mají tam derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, a_2)$, resp. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1, t)$,
- podle Lagrangeovy věty o přírůstku (aplikované odděleně na funkce $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$) tedy existují čísla $\eta_1 \in (a_1, b_1)$ a $\eta_2 \in (a_2, b_2)$ taková, že

$$\psi_1(a_1) - \psi_1(b_1) = \psi_1'(\eta_1)\,(a_1 - b_1), \quad \psi_2(a_2) - \psi_2(b_2) = \psi_2'(\eta_2)\,(a_2 - b_2)$$

- dostáváme proto

$$f(\vec{a}) - f(\vec{b}) = \psi_1(a_1) - \psi_1(b_1) + \psi_2(a_2) - \psi_2(b_2) = \psi_1'(\eta_1)\,(a_1 - b_1) + \psi_2'(\eta_2)\,(a_2 - b_2) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\eta_1, a_2)\,(a_1 - b_1) + \frac{\partial f}{\partial a_2}(b_1, \eta_2)\,(a_2 - b_2),$$

  tj. za body $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ z tvrzení věty stačí volit body $\vec{\xi}_1 = (\eta_1, a_2)$ a $\vec{\xi}_2 = (b_1, \eta_2)$, které zřejmě patří do I

2.3.2 Věta

Nechť je pro funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ splněn alespoň jeden z předpokladů: 1) $f(\vec{x})$ má na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ totální derivaci, která je na $\mathcal{U}(\vec{a})$ omezená; 2) $f(\vec{x})$ má na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ spojitou totální derivaci. Pak $f(\vec{x})$ je v bodě $\vec{a}$ spojitá.

<u>*Důkaz:*</u>

- nejprve prokážeme první z obou tvrzení
- funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má podle předpokladů na okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ vlastní parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných
- v okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ jistě leží nějaký otevřený interval tvaru $I = \bigtimes_{k=1}^r (\alpha_k, \beta_k)$, a lze tudíž užít věty o přírůstku 2.3.1
- pro $\vec{x} \in \mathcal{U}(\vec{a})$ tedy existují $\vec{\xi}_i \in I$ $(i \in \hat{r})$ tak, že

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i)\,(x_i - a_i)$$