Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze A

25. března 2022, 9:30–11:10

1 (10 bodů)
Pro funkci

$$h(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + 3y}$$

nalezněte Maclaurinovu řadu, obor konvergence a s její pomocí stanovte hodnotu

$$\frac{\partial^{20} h}{\partial x^{10} \partial y^{10}}(0,0).$$

2 (8 bodů)
Nalezněte totální diferenciál čtvrtého řádu funkce

$$f(x,y,z) = x^3 yz$$

v bodě $(1,2,-1)$.

3 (5 bodů)
Jaký útvar reprezentuje graf funkce

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b}}?$$

Načrtněte ho a pojmenujte!

4 (9 bodů)
Rozhodněte (a pečlivě zdůvodněte), má-li funkce

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - x + 3 & \dots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & \dots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

totální diferenciál v bodě $(0,0)$.

5 (8 bodů)
Pro vektorovou funkci

$$\vec{G}(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2;\ xyz;\ x + y + z)$$

nalezněte všechny body, které zároveň splňují tyto dvě vlastnosti:

- je v nich splněna rovnost $\left\| \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{G}(x,y,z) \right\| = 0$
- a jacobián vektorové funkce $\vec{G}(x,y,z)$ je v těchto bodech nulový.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze B

25. března 2022, 9:30–11:10

1 (8 bodů)
Nechť je funkce $f(x,y)$ zadána předpisem

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}+2x-7y & \dots \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \dots \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Nechť $\vec{s}=(1,2)$. Vypočtěte

$$\frac{1}{\|\vec{s}\|}\langle\vec{s}\,|\,\mathrm{grad}\,f(0,0)\rangle$$

a poté parciální derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě $(0,0)$. Diskutujte vztah obou vypočtených čísel. Vyvoďte relevantní závěry.

2 (8 bodů)
Pro vektorovou funkci $\vec{H}(x,y,z)=(x+z;\ 3xyz;\ 2x^2+y^2+z^2)$ nalezněte všechny body, které zároveň splňují tyto dva požadavky:

- je v nich splněna rovnost $\left\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}(x,y,z)\right\|=0$, kde $\|.\|$ je euklidovská norma;
- a jacobián vektorové funkce $\vec{H}(x,y,z)$ je v těchto bodech nulový.

3 (8 bodů)
Nalezněte posloupnost bodů ve dvoudimenzionálním definičním oboru funkce

$$g(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

takovou, která konverguje k bodu $(0,0)$ a limitou příslušných funkčních hodnot je číslo $-\frac{2}{5}$.

4 (8 bodů)
Nalezněte totální diferenciál čtvrtého řádu funkce $g(x,y,z)=xy^2z^3$ v bodě $(-1,2,1)$.

5 (8 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1+x+3y^2}}$$

a podrobným výpočtem určete její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru dvojné sumy s vícenásobnými faktoriály.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze N

12. dubna 2022, 13:30–15:10

1 (6 bodů)
Nalezněte totální diferenciál třetího řádu funkce $g(x,y,z) = x^2z^3y$ v bodě $(2,3,-1)$.

2 (9 bodů)
Pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{x^2+y^2-4}\right)^2 & \dots \quad x^2+y^2 \neq 4 \\ \frac{4}{9} & \dots \quad x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

vypočtěte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,2)$ ve směru přímky $3x - 4y + 8 = 0$.

3 (6 bodů)
Pro vektorovou funkci

$$\vec{H}(x,y,z) = (xy^2 + xz^2;\ x^2 + y^2;\ y^4)$$

nalezněte všechny body, v nichž je splněna rovnost

$$\left\| \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}(x,y,z) \right\| = 0.$$

4 (4 body)
Která ze složek gradientu funkce

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^4+6z^2}{(y^2+x^2)^2+2z^2} & \dots \quad (x,y,z) \neq \vec{0} \\ 3 & \dots \quad (x,y,z) = \vec{0} \end{cases}$$

v bodě $(0,0,0)$ existuje? Zdůvodněte!

5 (6 bodů)
Určete obor hodnot funkce $g(x,y) = xy$, je-li jejím definičním oborem množina

$$\operatorname{Dom}(g) = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1 \right\}.$$

6 (9 bodů)
Přímou metodou (tj. bez použití známých rozvojů) sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x,y) = \frac{e^{5x}}{\sqrt[3]{1+2y}}$$

a stanovte její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály a bez kombinačních čísel.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze A

6. května 2022, 9:30–11:10

1 (5 bodů)
Nalezněte bod (body) na elipse

$$8 + 2x + x^2 - 2y + 4xy + 5y^2 = 0,$$

v němž svírají tečna a osa x úhel $135°$.

2 (10 bodů)
Nechť je dána množina

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab} \right\},$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_A x^2 y^2 \, \mathrm{d}(x, y).$$

3 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x, y, z) = x^2 z^2 y$ na množině

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x, y, z > 0 \ \wedge \ 16(x^4 + z^4) + y^2 = 48 \right\}.$$

4 (6 bodů)
Nechť je funkce $\tilde{H}(x, y, z)$ definována na okolí bodu $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ jako složení funkcí $H(u, v) \in C^1(\mathbf{E}^2)$, $u(x, y, z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$ a $v(x, y, z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$. Nechť pro totální diferenciály těchto funkcí platí:

$$\mathrm{d}H_{\vec{b}}(h_u, h_v) = 3h_u - 2h_v, \quad \vec{b} = (u(\vec{a}), v(\vec{a})),$$

$$\mathrm{d}u_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = h_x - 3h_y + h_z,$$

$$\mathrm{d}v_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = -h_y + 5h_z.$$

Vypočítejte směrovou derivaci funkce $\tilde{H}(x, y, z)$ v bodě $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ve směru $\vec{s} = (1, 2, -2)$.

5 (9 bodů)
Za pomocí substituce

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{x}{y}$$

řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(1 + 8x^2 y^2\right) \left(x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadaného zobrazení.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze B

6. května 2022, 9:30–11:10

1 (9 bodů)
Za pomocí substituce $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$ řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(1 + 8x^2y^2\right)\left(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadaného zobrazení.

2
(6 bodů)
Nechť je funkce $\tilde{H}(x,y,z)$ definována na okolí bodu $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ jako složení funkcí $H(u,v) \in C^1(\mathbf{E}^2)$, $u(x,y,z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$ a $v(x,y,z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$. Nechť pro totální diferenciály těchto funkcí platí:

$$\mathrm{d}H_{\vec{b}}(h_u, h_v) = 3h_u - 2h_v, \quad \vec{b} = (u(\vec{a}), v(\vec{a})),$$

$$\mathrm{d}u_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = h_x - 3h_y + h_z,$$

$$\mathrm{d}v_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = -h_y + 5h_z.$$

Vypočítejte směrovou derivaci funkce $\tilde{H}(x,y,z)$ v bodě $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ve směru $\vec{s} = (1, 2, -2)$.

3 (10 bodů)
Nechť je dána množina

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab}\right\},$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_A x^2y^2 \,\mathrm{d}(x,y).$$

4 (5 bodů)
Nalezněte bod (body) na elipse

$$8 + 2x + x^2 - 2y + 4xy + 5y^2 = 0,$$

v němž svírají tečna a osa x úhel 135°.

5 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x,y,z) = x^2z^2y$ na množině

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x,y,z > 0 \wedge 16(x^4 + z^4) + y^2 = 48\right\}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 3 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze A

23. května 2022, 9:30–11:10

1 (9 bodů)
Pro parametry $a > 0$ a $b, c \in \mathbf{R}$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \frac{\sin(bx^2) - \sin(cx^2)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Užijte větu o derivaci integrálu s parametrem.

2 (9 bodů)
Nechť je Lebesgueova míra zadána prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(z) = z|z|$ platné pro obě dimenze. Nalezněte těžiště množiny

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbf{E}^2 \, : \, y > 0 \, \wedge \, \sqrt{\left|\frac{x}{a}\right|} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqslant 1 \right\}.$$

3 (5 bodů)
Nechť je jednorozměrná Lebesgueova míra zadána prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(z) = (2z + 7)\Theta(z)$. Vypočítejte míru množin $A = \langle 0, 3)$ a $B = (0, 3)$.

4 (9 bodů)
Vypočtěte y–ovou souřadnici těžiště tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \, : \, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \, \wedge \, x, y, z \geqslant 0 \right\}.$$

5 (8 bodů)
Nechť je dána křivka

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \, : \, \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \omega xy \right\},$$

kde $a, b, \omega \in \mathbf{R}^+$ jsou pevné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_C (4x; 5x + y^2) \, \mathrm{d}\mu_C(x, y).$$

Zápočtová písemná práce č. 3 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze B

23. května 2022, 9:30–11:10

1 (9 bodů)
Vypočtěte klasickou plošnou míru množiny

$$Z = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1 \ \wedge \ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leqslant 4 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \right\}.$$

2 (9 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ x^2 + y^2 + 4(x+y+1) = 0 \right\}.$$

3 (5 bodů)
Nechť je jednorozměrná Lebesgueova míra zadána prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(z) = (3z+5)\Theta(z)$. Vypočítejte míru množin $A = \langle 0, 2)$ a $B = (0, 2)$.

4 (9 bodů)
Pro parametry $a > 0$ a $b, c \in \mathbf{R}$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \, \frac{\cos(bx^2) - \cos(cx^2)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Užijte větu o derivaci integrálu s parametrem.

5 (8 bodů)
Jaký je podíl plochy útvaru

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ x, y \geqslant 0 \ \wedge \ \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \leqslant 1 \right\}$$

ku ploše obdélníku $O = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$ při totožné volbě vytvořujících funkcí $\varphi(z) = \Theta(z) \, z^4$?