Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze A

27. března 2023, 9:50–11:50

1 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy\sqrt{48 - 16x^2 - y^2}$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\}$.

2 (8 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4 - 4x^2 - y^2}}$$

a poté vykreslete její obor konvergence.

3 (9 bodů)
Nalezněte rovnici tečného paraboloidu k ploše

$$x^2 - 6xy + 8xz - 4x + 10y^2 - 20yz + 8y + 19z^2 - 20z + 5 = 0$$

v jejím bodě $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 0, 1)$.

4 (9 bodů)
Parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

transformujte do polárních souřadnic zadaných vztahy $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$. Neopomeňte stanovit množinu regularity, na níž je navíc zadaná transformace i prostá.

5 (8 bodů)
Která z implicitních funkcí zadaných rovnicemi

$$-u + xy + y^2 + yz - 2y = 0; \quad u + x^2y + y^3 + yz - 4y = 0$$

stoupá v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0) = (1, 1)$ ve směru $\vec{s} = (-2, 1)$ strměji? Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze N

27. dubna 2023, 16:00–18:00

1 (8 bodů)
Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4xy - 4x^2 - y^2}}$$

a poté do obrázku pečlivě načrtněte příslušný obor konvergence.

2 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xy(x^2 + y^2 - 4) + 2ze^{1-\frac{z}{2}}$ v množině

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x > 0 \ \wedge \ z > 0\}.$$

3 (7 bodů)
Nalezněte všechny body na ploše

$$y^2 + 4yz - 2x - 10y - 4z + 5z^2 = 3,$$

v nichž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $2x + 6y - 2z = 1$.

4 (9 bodů)
Do parciální diferenciální rovnice

$$3x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

zaveďte nové proměnné $u = \frac{y^3}{x}$ a $v = xy$. Nalezněte také příslušnou maximální množinu regularity.

5 (7 bodů)
Nalezněte obecnou rovnici tečné roviny ke kubické ploše

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - \frac{z^3}{c^3} = 1$$

v jejím bodě (x_0, y_0, z_0). Upravte do elegantního tvaru. Diskutujte rozsah platnosti výsledku.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze A

25. května 2023, 9:00–11:00

1 (7 bodů)
Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant 2x \leqslant \pi \ \wedge\ 0 \leqslant 2y \leqslant \pi\}$.

2 (9 bodů)
Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^+$. Vypočtěte objem tětesa

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\sqrt{\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}} + \frac{z^2}{c^2}\right)^5 \leqslant x^2y^2\right\}.$$

3 (10 bodů)
Nechť $a, b > 0$ jsou kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+a^2) - \ln(x^2+b^2)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Nepodceňte teoretickou stránku řešení příkladu.

4 (9 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu

$$\int_S (x|z|^5,\ y|z|^5,\ x|y|^5)\,\mathrm{d}\mu_S(x,y,z),$$

kde

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}.$$

5 (6 bodů)
Odvoďte vzorec pro obsah elipsy o poloosách $a, b > 0$ při míře generované vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = x^3$ a $\psi(y) = y^3$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze N

30. května 2023, 9:15–11:15

1 (9 bodů)
Nechť $a, b > 0$ jsou kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x^3 + 4x} \, \mathrm{d}x.$$

Nepodceňte teoretickou stránku řešení příkladu.

2 (7 bodů)
Nechť je dvoudimenzionální míra zadána prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(z) = z^3$ platné v obou dimenzích. Jaký je podíl plochy útvaru

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x, y \geqslant 0 \ \wedge \ \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} \leqslant 1 \right\}$$

ku ploše obdélníku $O = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$?

3 (9 bodů)
Vypočtěte plošný integrál druhého druhu

$$\int_S (x + y + z, \ x^3 + y^3 + z^3, \ x - y - z) \, \mathrm{d}\mu_s(x, y, z)$$

přes plochu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1 \right\}.$$

Přitom $a, b, c > 0$ nechť jsou pevně zvolené parametry.

4 (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{y} \, \mathrm{d}\mu_c(x, y),$$

kde

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 + 9 = 6(x + y) \right\}.$$

5 (8 bodů)
Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = y - 2x + 4z$ na rotačním elipsoidu

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 + 4z^2 = 9 \right\}.$$