Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01CAS – verze A

pondělí 14. listopadu 2022, 16:00–17:30

1 (7 bodů)
Rozhodněte, zda inverzní Gaussovo rozdělení

$$g(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}}, \quad x > 0$$

spadá do třídy balancovaných hustot a řádně zdůvodněte. Pokud ano, vypočítejte příslušný balanční index. Parametry považujte za kladné a vlevo od nuly funkci dodefinujte nulou.

2 (5 bodů)
Odvoďte, jak souvisejí Laplaceovy obrazy funkce $g(x) \in \mathscr{B}$ a příslušné chvostové distribuční funkce

$$h(x) = \Theta(x) \int_x^\infty g(y)\,\mathrm{d}y\,?$$

3 (6 bodů)
Laplaceovou transformací vypočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}\mathrm{d}x.$$

4 (6 bodů)
Pro hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \Theta(x)\frac{\lambda^{n+1}}{n!}x^n \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \& \quad g(x) = \Theta(x)\frac{\lambda^{m+1}}{m!}x^m \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

vypočítejte jejich konvoluci.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01CAS – verze A

pondělí 19. prosince 2022, 10:00–12:00

1 (12 bodů)
Dokažte, že ve škálovaném balančním částicovém systému s generátorem $h(x)$ má trendová funkce lineární asymptotu, jejíž rovnicí je

$$y(x) = x - 1 + \frac{\mu_2(h)}{2}.$$

2 (12 bodů)
Vyslovte a dokažte Lerchův teorém.

3 (10 bodů)
Nechť $H(s)$ a $R(s)$ jsou obrazy generátoru BČS a jeho shlukové funkce. Odvoďte vztah mezi nimi. Neopomeňte také prověřit, zda má $H(s)$ správné předpoklady nutné k výpočtu.

4 (12 bodů)
V balančním částicovém systému je vzdálenost pěti sousedních částic (jedná se tedy o čtyři mezery) popsána distribucí

$$z(x) = \Theta(x)\frac{243x^5}{2560}\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}.$$

Jaká je kompresibilita takového systému? Nápověda: $729^{1/4} = 3\sqrt{3}$.

5 (10 bodů)
Určete balancovanou hustotu, víte-li, že její momentový kód je

$$\left(\frac{1}{2}(2k+2)!!\right)_{k=0}^{\infty}.$$

Užijte faktu, že příslušný Laplaceův obraz a jeho derivace souvisejí s velikostí momentů hledané hustoty.

6 (4 body)
Podepište si zadání.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze									CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6		

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01CAS – verze B

úterý 10. ledna 2023, 9:30–11:30

1 (8 bodů)
Semipoissonovský systém vznikne z Poissonova balančního částicového systému odebráním lichých částic. Jaký generátor má tento systém? Neopomeňte generátor přeškálovat na správnou střední hodnotu. Vše řádně odvoďte!

2 (13 bodů)
Nechť N_L je intervalová frekvence balančního částicového systému a $g_k(x)$ hustota pravděpodobnosti pro $k-$tou multirozteč. Odvoďte vztah mezi $\mathbb{E}(N_L^2)$ a $g_k(x)$. V rámci řešení ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle 0, a\rangle$. K čemu se vám tento poznatek bude hodit?

3 (13 bodů)
Pro částicový systém s generátorem $h(x) = 4x\Theta(x)\mathrm{e}^{-2x}$ vypočítejte celý průběh statistické rigidity. Užijte vztahu

$$s^3\mathfrak{L}[\Delta(L)] = 2 + sH(s)\cdot\frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2\frac{H^2(s)+H'(s)}{(1-H(s))^2}$$

Nalezený průběh výstižně načrtněte.

4 (12 bodů)
Dokažte, že ve škálovaném částicovém systému s generátorem $h(x)$ má trendová funkce $\omega(L) = \mathbb{E}(N_L)$ lineární asymptotu, jejíž rovnicí je

$$y(L) = L - 1 + \frac{\mu_2(h)}{2}.$$

5 (8 bodů)
Laplaceovou transformací vypočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}\mathrm{d}x.$$

6 (6 bodů)
Odvoďte tzv. konvoluční teorém pro Laplaceovu transformaci (viz tabulka Laplaceova desatera).

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01CAS – verze C

středa 15. března 2023, 10:00–11:50

1 (7 bodů)
Podrobně vysvětlete, co je statistická kompresibilita a deflekce a poté libovolnou cestou vyčíslete jejich hodnoty pro Poissonův systém.

2 (9 bodů)
Jaká je hustota pravděpodobnosti $h(x)$ pro vzdálenost dvou částic, jejichž poloha je náhodně generována z rozdělení $f(x)$, resp. $g(x)$? Funkce $f(x)$, $g(x)$ chápeme jako hustoty pravděpodobnosti nezáporných náhodných veličin. Jaký konkrétní tvar má $h(x)$, jestliže

$$f(x) = g(x) = \Theta(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,?$$

3 (8 bodů)
Dokažte následující vlastnost Laplaceovy transformace:

$$\int_0^\infty f(x)\,G(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty F(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

Proč oba integrály jistě existují?

4 (10 bodů)
Pro funkci

$$g(x) = \Theta(x)\frac{(\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx})^2}{x};\ 0 < b < a$$

vypočítejte normu $\|g\|$ a první moment $\mu_1(g)$. Dále rozhodněte, zda (nebo případně pro jakou volbu parametrů) patří tato funkce do třídy balancovaných hustot. V případě pozitivní odpovědi určete příslušný balanční index.

5 (12 bodů)
Nechť N_L je intervalová frekvence balančního částicového systému a $g_k(x)$ hustota pravděpodobnosti pro $k-$tou multirozteč. Odvoďte vztah mezi $\mathbb{E}(N_\mathrm{L}^2)$ a $g_k(x)$. V rámci řešení ukažte, že řada $\sum_{k=1}^\infty k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle 0, a\rangle$. K čemu se vám tento poznatek bude hodit?

Na základě rovnosti

$$\sum_{k=0}^\infty g_k(x) \star \sum_{\ell=0}^\infty g_\ell(x) = \sum_{m=1}^\infty m\, g_m(x)$$

upravte výraz pro $\mathbb{E}(N_\mathrm{L}^2)$ do tvaru, v němž vystupuje pouze shluková funkce.

6 (8 bodů)
Nechť $(\mu_k)_{k=0}^\infty$ je momentový kód hustoty $g(x) \in \mathscr{B}$. Jak vypadá momentový kód chvostové distribuční funkce

$$h(x) = \Theta(x)\int_x^\infty g(y)\,\mathrm{d}y\,?$$

Jeden z možných postupů: Nejprve odvoďte, jak souvisí $\mathfrak{L}[h(x)]$ s $\mathfrak{L}[g(x)]$ a poté dosaďte za $\mathfrak{L}[g(x)]$ její Maclaurinovu řadu.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01CAS – verze D

pondělí 28. srpna 2023, 9:15—11:15

1 (6 bodů)
Odvoďte tzv. konvoluční teorém pro Laplaceovu transformaci (viz tabulka Laplaceova desatera).

2 (12 bodů)
Nechť N_L je intervalová frekvence balančního částicového systému a $g_k(x)$ hustota pravděpodobnosti pro $k-$tou multirozteč. Odvoďte vztah mezi $\mathbb{E}(N_L^2)$ a $g_k(x)$. V rámci řešení ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle 0, a \rangle$. K čemu se vám tento poznatek bude hodit?

3 (8 bodů)
Nechť $H(s)$ a $R(s)$ jsou obrazy generátoru BČS a jeho shlukové funkce. Odvoďte vztah mezi nimi. Neopomeňte také prověřit, zda má $H(s)$ správné předpoklady nutné k výpočtu.

4 (6 bodů)
Rozhodněte, zda inverzní Gaussovo rozdělení

$$g(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}}, \quad x > 0$$

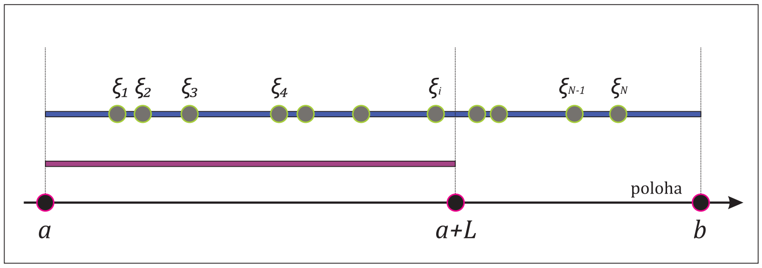
spadá do třídy balancovaných hustot a řádně zdůvodněte. Pokud ano, vypočítejte příslušný balanční index. Parametry považujte za kladné a vlevo od nuly funkci dodefinujte nulou.

5 (12 bodů)
Uvažujme úsečku vymezenou body $a = 0$ a $b = N \in \mathbf{N}$ (viz obrázek na zadní straně). Nechť je na tuto úsečku náhodně rozeseto právě N částic, a to tak, že jejich lokace jsou vybrány z Uniformního (rovnoměrného) rozdělení $U(0, N) \sim g(x)$. Pro takto vymezenou úlohu

- zapište matematický tvar hustoty pravděpodobnosti $g(x)$;
- určete pravděpodobnost, že číslo z rozdělení $U(0, N)$ bude menší/větší než L;
- vyjádřete pravděpodobnost $\mathscr{P}[\mathcal{N}_L = k]$, že v intervalu $(0, L)$ leží (z oněch N náhodně vybraných částic) právě k částic;
- určete, jaká je střední hodnota intervalové frekvence $\mathcal{N}_L$, kde intervalovou frekvencí rozumíme počet částic vyskytujících se na intervalu $(0, L)$.
- a nakonec vypočítejte, k čemu konverguje pravděpodobnost $\mathscr{P}[\mathcal{N}_L = k]$, blíží-li se N do nekonečna.

6 (6 bodů)
Dokažte, že pro Laplaceův obraz $G(s)$ balancované hustoty $g(x)$ platí: $\max_{s \in \langle 0, +\infty)} |G(s)| = \mu_0$.

Bodový zisk bude násoben číslem $6/5$.



Obr. 1 N náhodně rozmístěných částic na úsečce $\langle a, b\rangle = \langle 0, N\rangle$ a úsek $(0, L)$, na němž je sledována intervalová frekvence $\mathcal{N}_L$, tj. počet částic.