Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – verze A

15/12/2020, 9:20 - 11:20

1 (7 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n-4)!!!}{3^n\, n!} \frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{\cosh^2(nx) + \sinh^2(nx)}$$

na množině $A = \langle 0, \infty)$.

2 (9 bodů)
Nalezněte maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y'' - \operatorname{cotg}(x)\, y' = \frac{3}{\sin^3(x)}.$$

3 (7 bodů)
Nechť

$$g_n(x) = \mathrm{e}^n \left(2x - 3x^2\right)^n$$

je n–tý člen posloupnosti $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci této posloupnosti na uzavřeném intervalu $\langle 0, \frac{2}{3}\rangle$.

4 (10 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$x^2 y''' + 2x(1-3x)y'' + 2(6x^2 - 4x - 1)y' + 4(1 + 2x - 2x^2)y = 0.$$

K řešení užijte faktu, že prostor řešení této rovnice má jednodimenzionální průnik s jádrem diferenciálního operátoru

$$\hat{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2.$$

5 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+2)!!!!}{(n+1)!} (x-1)^{2n}.$$

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – verze B

5/1/2021, 9:30 - 11:30

1 (8 bodů)
Nalezněte funkci, pro jejíž derivace platí rovnosti

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{(2k+2)!!}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Jaký je definiční obor nalezené funkce?

2 (10 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$x^3 y'' - x^2 y' - 3xy = 16 \ln(x).$$

K řešení užijte faktu, že prostor Ω_0 této rovnice má jednodimenzionální průnik s jádrem diferenciálního operátoru

$$\hat{L} = x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 3x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 3.$$

Návod: Nejprve kompletně vyřešte rovnici $\hat{L}(y) = 0$.

3 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!\,(2n-1)!!}{9^n\,((2n)!!)^2}\, x^{2n}.$$

4 (7 bodů)
Vyšetřete typ konvergence pro funkční posloupnost

$$\left(x + \frac{x^{1/3}}{x^{1/2} + n^{1/2}} \right)_{n=1}^{\infty}$$

a množinu $A = \langle 0, +\infty)$.

5 (9 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \mathrm{tg}(x)\, y' = \frac{3}{\cos^3(x)}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – verze C

2/2/2021, 9:30 - 11:30

1 (9 bodů)
Abelovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci funkcionální řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{n}{\sqrt{n^2+e^x}}$$

na množině $\mathbf{R}$.

2 (9 bodů)
Vypočítejte

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!}\,dx.$$

Nejprve ale ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!}$ nekonverguje na $(0,+\infty)$ stejnoměrně.

3 (8 bodů)
Pro diferenciální rovnici

$$x^3y''' - 3x^2(2+x)y'' + 6x(2x+3)y' - 6(3x+4)y = 0$$

existuje monom, který leží v jejím fundamentálním systému. Rovnici vyřešte.

4 (8 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(e^{-x^2} + \frac{x^2n^2}{x^2n^2+xn+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $(0,\infty)$. Řádně komentujte!

5 (6 bodů)
Sestavte Taylorovu řadu funkce

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

v bodě $x = 6$ a vyšetřete její obor konvergence.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – verze A

5/1/2021, 13:00 - 15:00

1 (6 bodů)
V Hilbertově prostoru $\mathscr{H} = [1, x, x^2]_\lambda$, kde je skalární součin zadán prostřednictvím vztahu

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

leží funkce $h(x) = x$ a $m(x) = ax^2$, kde $a \in \mathbf{R}$ je neznámé číslo. Nalezněte jeho hodnotu, víte-li, že vzdálenost těchto funkcí je rovna $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

2 (9 bodů)
Formálním řešením úlohy

$$2y' = \frac{y}{x} - 3 - \frac{9x}{3x+y}, \quad y\left(\frac{2}{3}\right) = -2$$

je elipsa. Nalezněte její střed.

3 (6 bodů)
Pro která $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ zadává předpis

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

skalární součin na prostoru $\mathbf{R}^4$?

4 (9 bodů)
Pro kvadratickou plochu

$$2 - 2x + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2z + 8xz - 16yz + 32z^2 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

5 (10 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu pro diferenciální rovnici

$$y''' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{4}{x^3}y = 0,$$

$$y(1) = -1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 1.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – verze B

12/1/2021, 9:30 - 11:30

1 (9 bodů)

Řešte diferenciální rovnice

$$y' - 2\left(\frac{1}{x} + 1\right)y = 0,$$

$$x^2y'' - \left(5x^2 + 4x\right)y' + \left(6x^2 + 10x + 6\right)y = 0.$$

Užijte fakt, že rovnice mají neprázdný průnik fundamentálních systémů.

2 (7 bodů)

Pro která $\alpha \in \mathbf{R}$ má kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

signaturu $(1, 1, 1)$? A jaké je v tomto případě spektrum matice této formy?

3 (10 bodů)

Pro trojrozměrnou kvadratickou plochu

$$-3 + x^2 + 2y - 4xy + 5y^2 + 4z + 2xz + 2yz + 10z^2 = 0$$

určete název, hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar, střed a transformaci $(x, y, z)^\top = \mathbb{M}\,(a, b, c)^\top + (r, s, t)^\top$, která ji na normální tvar převádí. Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují!

4 (9 bodů)

Formálním řešením diferenciální rovnice

$$y' + \frac{4x + 3y}{9y + 6x} = \frac{y}{2x}$$

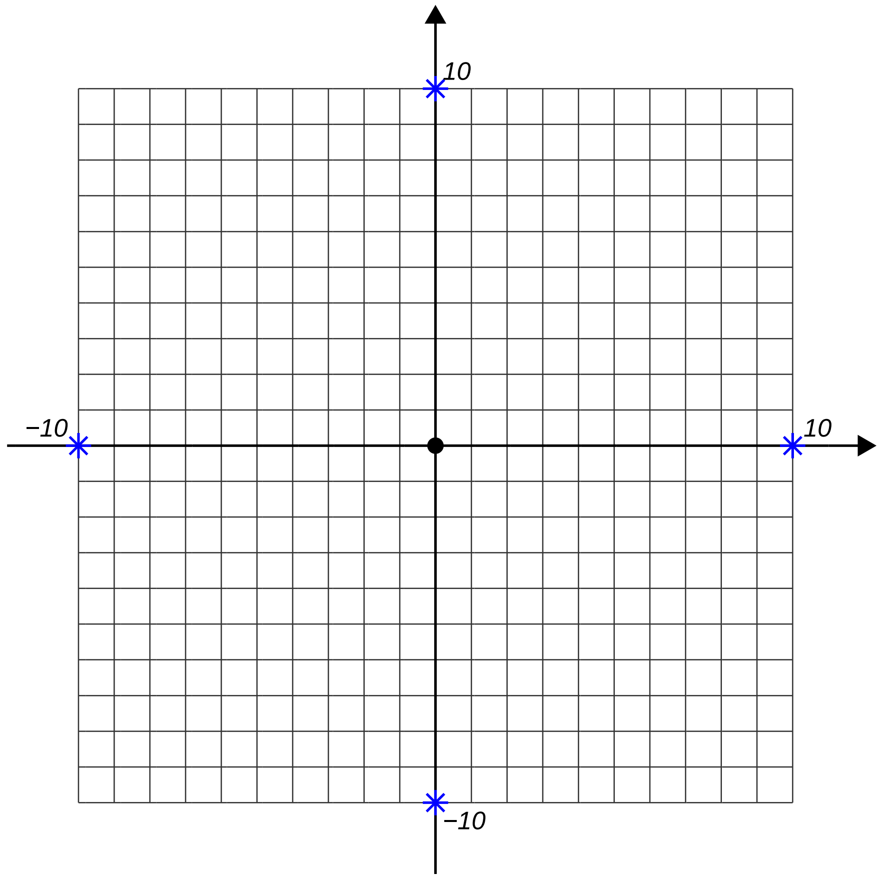
je kuželosečka se středem v bodě $(-3, 2)$. Nalezněte toto formální řešení a určete, o jakou kuželosečku se jedná.

5 (5 bodů)

Do obrázku na druhé straně tohoto zadání vykreslete (co nejpečlivěji) okolí $\mathcal{U}_{15}(-1, 3)$ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$, kde $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ je metrika generovaná normou

$$\|\vec{x}\| = 3|x_1| + 5|x_2|.$$

Dále rozhodněte, patří-li bod $(0, 0)$ do tohoto okolí a své tvrzení prokažte!


10
−10
10
−10

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – verze C

2/2/2021, 9:30 - 11:30

1 (9 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$y''' + 3y'' + y' - 5y = 20(e^x - x).$$

2 (10 bodů)
Pro kvadratickou plochu, která je v $\mathbf{R}^3$ zadána rovnicí

$$Q(x, y, z) = -9 + 2x + x^2 + 12y + 6xy + 8y^2 - 14z - 2xz - 2yz - 3z^2 = 0$$

určete normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu a transformační vztahy, které ji na normální tvar převádějí. Nalezené vztahy upravte do maticového tvaru. Jak se změní signatury, bude-li uvedená rovnice zadávat kvadriku v $\mathbf{R}^4$? Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují!

3 (4 body)
Vyslovte definici konvergence v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$. Na základě její platnosti rozhodněte o limitě posloupnosti $(\vec{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^3$, kde

$$\vec{x}_k = \left(\frac{5}{\sqrt{k}}, -\frac{3k+7}{k}, 4\right),$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \sigma\}$ se $\sigma-$metrikou.

4 (8 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 24x^3 e^{3x}.$$

Užijte faktu, že vektorový prostor

$$\mathcal{V} = \{y(x) \in \mathscr{C}^3(\mathbf{R}) : \; xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 0 \wedge y''' - 6y'' + 9y' = 0\}$$

má dimenzi jedna.

5 (5 bodů)
V prostoru spojitých funkcí je metrika generována skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \beta \int_{-1}^{1} x^2 \, f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Pro která $\beta \in \mathbf{R}$ leží funkce x^2 v jednotkovém okolí nulové funkce? Své tvrzení podpořte vhodným výpočtem!

6 (5 bodů)
Odvoďte kanonický tvar čtyřdimenzionální kvadratické formy

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3x_1^2 - 4x_1x_4 + 6x_2x_3.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Opravná zápočtová písemná práce z předmětu 01MAB3 – verze A

19/1/2021, 9:30 - 11:30

1 (7 bodů)

Řešte Cauchyovu úlohu

$$y' + \frac{4x}{1+x^2}y = \frac{1+3x^2}{(1+x^2)^2}; \quad y(1) = 2.$$

2 (8 bodů)

Pro kvadratickou plochu, která je v $\mathbf{R}^3$ zadána rovnicí

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 25x_3^2 - 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 8x_2x_3 + 4x_1 - 4x_2 + 16x_3 = 1,$$

určete normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu a transformační vztahy, které ji na normální tvar převádějí. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

3 (7 bodů)

Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{(x+5)^n}{n+1}.$$

4 (9 bodů)

Weierstrassovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{x^2}{\sqrt{2x^6+n^6}}$$

na množině $\mathbf{R}$.

5 (7 bodů)

Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{6}{x^3}\mathrm{e}^{-2x}.$$

6 (6 bodů)

Na funkcionálním Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ je zadán skalární součin předpisem

$$\langle f|g\rangle := \int_0^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

V $\mathscr{H}$ jsou dány 2 prvky, a sice $r(x) = 3$ a $q(x) = x$. Vypočítejte jejich vzdálenost a úhel, který svírají.

Pro udělení zápočtu je nutno získat alespoň **22** bodů.