Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

CELKEM

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze A

02/11/2021, 9:20 - 11:10

1 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2(x-3n)}{x(n^3+x^3)}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $M = (0, \infty)$.

2 (9 bodů)
Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!!!}{3^n(n-1)!} \frac{x^2}{x^4+n^4}$$

konverguje na množině všech reálných čísel stejnoměrně.

3 (7 bodů)
Ve kterém bodě nabývá řešení diferenciální rovnice

$$2xy - 2x + (x^2+1)y' = 0, \quad y(1) = 0$$

své nejnižší hodnoty?

4 (9 bodů)
Nalezněte mocninnou řadu reprezentující hodnotu integrálu

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\,\mathrm{d}y$$

a určete její obor konvergence. Výsledek zapište do tvaru s vícenásobnými faktoriály.

5 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{n!}(x+1)^n.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze B

02/11/2021, 9:20 - 11:10

1 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x(n^4x + x^3 + 1)}{n^4 + x^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

2 (9 bodů)
Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{n^2}{x^2+n^2}$$

konverguje na množině všech reálných čísel stejnoměrně.

3 (6 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$2xy - x - (2 + x^2)y' = 0$$

s počáteční podmínkou $y(2) = -4$.

4 (10 bodů)
Pro funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+7}}$$

nalezněte příslušnou Taylorovu řadu se středem v bodě $c = 1$ a stanovte její obor konvergence.

5 (7 bodů)
Najděte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{2^n}\frac{(x-3)^{2n}}{(2n+1)!!}.$$

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze C

23/11/2021, 9:20 - 11:10

1 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n+1)!!!}{n!}(x-2)^n.$$

2 (7 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x(1+x^2)y' = 2y-2$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 2$.

3 (6 bodů)
Pro které $x \in \mathbf{R}$ je součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(4k)!!!!}$$

nejvyšší?

4 (11 bodů)
Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\int_0^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{n \cdot 4^n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^4 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{n \cdot 4^n}\,\mathrm{d}x.$$

5 (9 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x}{m^2+x^2}\ln^2(m)\right)_{m=1}^{\infty}$$

na množině všech reálných čísel.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová práce č. 2 z předmětu 02ANB3/01MAB3 – verze A

07/12/2021, 9:20 - 11:10

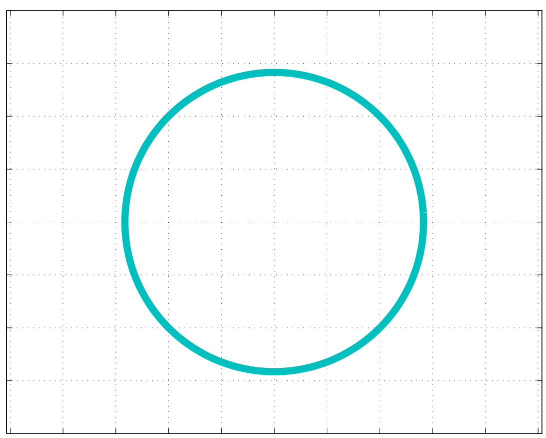
1 (9 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \frac{10}{x}\mathrm{e}^{2x}.$$

2 (10 bodů)
Formálním řešením diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1}{\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1}$$

je kružnice



o poloměru $R = 4\sqrt{2}$. Kde v obrázku leží souřadnicový systém? Dokreslete!

3 (9 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^5y''' - 6x^3y' + 12x^2y = 40.$$

4 (5 bodů)
Sestavte diferenciální rovnici druhého řádu a k ní příslušnou Cauchyovu úlohu pro funkci

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

a tuto vyřešte.

5 (7 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice $x^2y' + 5y^2 - 2xy = 0$ vyhovující podmínce $y(5) = \frac{1}{2}$.

6 (1 bod)
Pod vaše vlastní jméno v záhlaví tabulky doplňte také jméno vašeho cvičícího.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová práce č. 2 z předmětu 02ANB3/01MAB3 – verze B

07/12/2021, 9:20 - 11:10

1 (9 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 3y' - 2y = 6e^{-x} - 4xe^{x}.$$

2 (5 bodů)
Sestavte diferenciální rovnici druhého řádu a k ní příslušnou Cauchyovu úlohu pro funkci

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

a tuto vyřešte.

3 (1 bod)
Pod vaše vlastní jméno v záhlaví tabulky doplňte také jméno vašeho cvičícího.

4 (9 bodů)
Mezi formálními řešeními diferenciální rovnice

$$(3x^2 - 6xy - 3y^2)y' = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

je i kružnice o poloměru $R = 5$. Nalezněte její střed.

5 (10 bodů)
Řešte diferenciální rovnice

$$y' - \frac{2(x+1)}{x}y = 0.$$

$$x^2y'' - \left(5x^2 + 4x\right)y' + \left(6x^2 + 10x + 6\right)y = 0$$

Užijte fakt, že jádra obou příslušných operátorů mají neprázdný průnik.

6 (7 bodů)
Nalezněte formální diferenciální řešení rovnice

$$y'(2y - x) = 2x + y.$$

Integrační konstantu poté kalibrujte tak, aby toto formální řešení procházelo bodem $(0,0)$. Získané formální řešení reprezentuje 2 přímky. Jaký úhel tyto přímky svírají?

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová práce č. 2 z předmětu 02ANB3/01MAB3 – verze C

14/12/2021, 9:20 - 11:10

1 (1 bod)
Pod vaše vlastní jméno v záhlaví tabulky doplňte také jméno vašeho cvičícího.

2 (8 bodů)
Diferenciální rovnice

$$y'(\omega x - 8y + 11) = x + 4 - 3y$$

je pro jisté $\omega \in \mathbf{R}$ exaktní. Nalezněte toto ω a pro něj hledejte implicitní řešení procházející bodem $(x, y) = (3, 1)$. Jakou křivku představuje toto řešení? Zdůvodněte!

3 (9 bodů)
Na množině $\mathbf{R}^+$ řešte diferenciální rovnici

$$x^5 y''' + 5x^4 y'' + 2x^3 y' - 2x^2 y = 9.$$

4 (7 bodů)
Čemu se rovná součet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{2^k}\,?$$

5 (9 bodů)
Metodou variace konstant nalezněte funkci $y(x)$ vyhovující rovnostem

$$y'' - 4y' + 4y = (6x + 2)\,\mathrm{e}^{2x} \quad \& \quad y(0) = 1 \quad \& \quad y'(0) = 2.$$

6 (7 bodů)
Nalezněte řešení rovnice

$$x\,y' + (2\sqrt{xy} - y) = 0$$

takové, jež vyhovuje podmínce $y(1) = 1$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová práce č. 3 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze A

04/01/2022, 9:20 - 11:10

1 (5 bodů)
Nechť je na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ zadána norma předpisem

$$\|\vec{x}\| := 3|x_1| + 2|x_2| + 7|x_3|.$$

Nechť $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ je metrika generovaná touto normou. Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{2n^2+3}{n^2}, -\frac{1}{n^2} - 8\right)$$

konvergentní v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \varrho\}$.

2 (5 bodů)
Pro která $\omega \in \mathbf{R}$ zadává předpis

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

skalární součin na prostoru $\mathbf{R}^4$?

3 (3 body)
Zakreslete okolí $\mathcal{U}_{10}(0,0)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = 2|x_1 - y_1| + 5|x_2 - y_2|$.

4 (11 bodů)
Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$2xy' + \frac{2xy + 8x^2}{y + 2x} = y$$

vyhovující podmínce $y(8) = -8$. Na obrázku uvnitř zadání je vyobrazena elipsa představující ono hledané formální řešení. Do tohoto obrázku zakreslete souřadný systém $\mathcal{O}\vec{x}\vec{y}$ tak, aby odpovídal zadání úlohy. Užijte k tomu polohu středu citované elipsy a její průsečíky se souřadnými osami.

5 (7 bodů)
V Hilbertově prostoru jistých funkcí definovaných na $(0, +\infty)$ je zadán skalární součin prostřednictvím vztahu

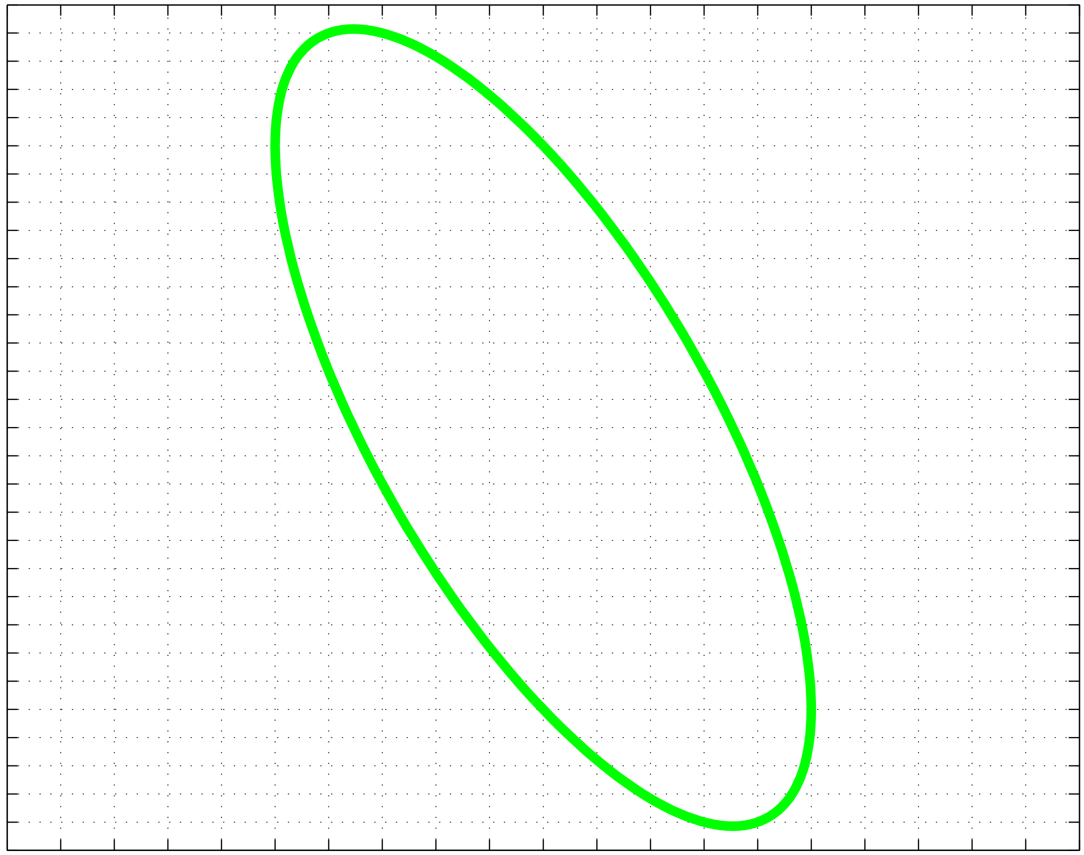
$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Rozhodněte, zda posloupnost $(\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x})_{n=1}^\infty$ je v tomto prostoru konvergentní.

6 (9 bodů)
Pro kvadriku

$$2x + x^2 - 6y - 2xy + 2y^2 + 4z - 4xz - 2yz + 12z^2 = 0$$

určete název, hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a transformaci, která ji na normální tvar převádí. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.



Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová práce č. 3 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze B

04/01/2022, 9:20 - 11:10

1 (5 bodů)
Nechť je dán Hilbertův prostor jistých funkcí zadaný standardním funkcionálním skalárním součinem $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Která z funkcí

$$g_a(x) = x + 2\sqrt{a^2x^3 + 6(1 - ax^2)}, \qquad a \in \mathbf{R}$$

má nejmenší vzdálenost od funkce $h(x) = x$? A jaká je tato minimální vzdálenost?

2 (3 body)
Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ komplexních čísel. Pro libovolné dva **jednotkové** vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathscr{H}$ a číslo $\alpha \in \mathbf{C}$ maximálně zjednodušte výraz $\|\vec{x} + \alpha\vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \alpha\vec{y}\|^2$.

3 (8 bodů)
Nechť $\mathscr{H}$ je funkcionální Hilbertův prostor jistých funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $J = \langle 0, 1\rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{R}$. Zobrazení

$$\langle a|b\rangle := \int_0^1 a(x)b(x)\,\mathrm{d}x$$

nechť definuje na $\mathscr{H}$ skalární součin. Nalezněte polynom druhého stupně, jež je současně kolmý k funkcím $h(x) = 1$ a $f(x) = 2x - 1$ a zároveň je jeho vzdálenost od nulové funkce rovna číslu $\sqrt{\frac{1}{5}}$.

4 (11 bodů)
Nalezněte formální řešení rovnice

$$2(y - x)xy' = x^2 + y^2$$

takové, že příslušné explicitní řešení $y(x)$ vyhovuje podmínce $y(20) = 0$. Na obrázku na druhé straně tohoto zadání je vyobrazena hyperbola představující ono hledané formální řešení. Do tohoto obrázku zakreslete souřadný systém $\mathscr{O}\vec{e}_1\vec{e}_2$ (včetně vyznačení měřítka) tak, aby odpovídal zadání úlohy. Užijte k tomu výpočet polohy středu formálního řešení. Na vyobrazené hyperbole dále vyznačte alespoň tři její konkrétní body. Grafické části věnujte zvýšenou pozornost. Při bodovém hodnocení je k této části významně přihlíženo.

5 (4 body)
Vyslovte definici konvergence v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$. Na základě její platnosti rozhodněte o limitě posloupnosti $(\vec{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^3$, kde

$$\vec{x}_k = \left(\frac{5}{\sqrt{k}}; -9; \frac{2k+5}{k}\right),$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \sigma\}$ se $\sigma-$metrikou.

6 (9 bodů)
Pro kvadratickou plochu

$$2 - 2x + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2z + 8xz - 16yz + 32z^2 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.