Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

12. dubna 2021, 9:20–11:20

1 (7 bodů)
Na kuželosečce

$$3 - 2x + 2x^2 - 10y - 4xy + 10y^2 = 0$$

nalezněte body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou prvního a třetího kvadrantu.

2 (10 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x \frac{\partial u}{\partial x} + 3y \frac{\partial u}{\partial y} + 8x^3 y^5 = 0.$$

Užijte k tomu transformačních vztahů druhého druhu ve tvaru

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

3 (5 bodů)
Nechť je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y}{\sqrt{4(x-3)^4 + y^2 + y(x-3)^2}} & \dots \quad (x,y) \neq (3,0), \\ 3 & \dots \quad (x,y) = (3,0), \end{cases}$$

která není na $\mathbf{R}^2$ spojitá. Nalezněte alespoň jednu parabolu, vzhledem k níž je tato funkce spojitá v bodě $(3,0)$.

4 (10 bodů)
Pro funkci $z = z(x,y)$ zadanou implicitně rovnicemi

$$z^3 - 2z^2 y - 4xyz + 8x^2 y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 16u = 22$$

vypočítejte hodnotu grad(z) v bodě $\vec{a} = (1,1)$ a poté $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1)$.

5 (8 bodů)
Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x,y) = (1 + x^2 + y)^{\frac{1}{3}}.$$

Výsledek upravte do tvaru dvojné sumy s vícenásobnými faktoriály. Stanovte, kde uvedená rovnost platí. Výpočet oboru konvergence korektně proveďte.

Nápověda pro případné zájemce: Prvním kvadrantem rozumíme množinu $Q_I := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$. Třetím kvadrantem rozumíme množinu $Q_{III} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x < 0 \wedge y < 0\}$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta N

26. dubna 2021, 9:20–11:20

1 (6 bodů)

Nalezněte množinu M, vzhledem k níž je funkce

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{12y^6}{(x-1)^2+y^4} \cdot \frac{1}{x-1} & \dots \quad (x,y) \neq (1,0); \\ \frac{2}{5} & \dots \quad (x,y) = (1,0); \end{cases}$$

spojitá v bodě nespojitosti.

2 (10 bodů)

Pro funkci $z = z(x,y)$ zadanou (společně s funkcí $u = u(x,y)$) implicitně rovnicemi

$$u^3 - 2u^2y - 4xyu + 8x^2y^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + u^2 + 16z = 22,$$

vypočítejte směrovou derivaci

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(1,1)$$

ve směru $\vec{s} = (4,3)$.

3 (7 bodů)

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Aplikací teorie implicitních funkcí nalezněte rovnici tečné roviny k ploše

$$\frac{x^2y^2}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1 \tag{1}$$

v jejím bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledek upravte do elegantního tvaru, který využívá skutečnosti, že bod (x_0, y_0, z_0) splňuje rovnost (1).

4 (9 bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Užijte k tomu transformačních vztahů druhého druhu ve tvaru $a = \mathrm{e}^{-x}y^2$ a $b = \mathrm{e}^{-x}y$.

5 (8 bodů)

Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+3x+y}}.$$

Výsledek upravte do tvaru dvojné sumy s vícenásobnými faktoriály. Stanovte, kde uvedená rovnost platí. Výpočet oboru konvergence korektně proveďte.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

3. května 2021, 9:20–11:20

1 (9 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x, y, z \geqslant 0\right\}.$$

2 (9 bodů)
Jakých extremálních hodnot nabývá funkce

$$g(x, y, z) = x^2 - 4xy + 6x + 5y^2 - 2yz - 10y + 2z^2 - 4z$$

v rovině $y - z + 1 = 0$? Úlohu řešte výhradně metodou Lagrangeových multiplikátorů.

3 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $z(x, y, u)$, jež je zadána rovnicí

$$z^3 + 3uz^2 + 4x^2 + 24xy - u^3 + 68y + 2y^2 = 37.$$

Omezte se na případ, kdy $z > 0$ a současně $u > 0$.

4 (4 body)
Vypočítejte moment setrvačnosti $J = \int_V (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}(x, y, z)$ pro polokulovou vrstvu

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \mathrm{r}^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \mathrm{R}^2 \wedge z \geqslant 0\right\}.$$

5 (9 bodů)
Určete souřadnice těžiště obrazce

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant 2\frac{y^3}{b^3}\right\}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

20. května 2021, 13:00–15:00

1 (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočítějte objem tělesa

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}} \right\}.$$

2 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$ na množině

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : 2x + 3y + 4z = 9 \wedge x,y,z > 0 \right\}.$$

3 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$, která je zadána implicitně rovnicí

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - 2xz - 6yz + 3z^2 + 2x + 2y - 3z + 4 = 0.$$

Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

4 (6 bodů)
Vypočítejte moment setrvačnosti $J = \int_V (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ pro kulovou výseč

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \mathrm{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \leqslant z^2 \wedge z \geqslant 0 \right\}.$$

5 (7 bodů)
Vypočtěte obsah množiny

$$Q = \left\{ (x,y) \in \mathbf{E}^2 : (x^4 + y^4)^{4/3} \leqslant 2x^2 y^2 \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \right\}.$$

Množinu načrtněte!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB4 – varianta A

20. května 2021, 9:30–11:30

1 (9 bodů)
Nechť je dvojrozměrná Lebesgueova míra zadána v obou dimenzích stejnou vytvořující funkcí $\varphi(\tau) = \tau^3$. Vypočítejte míru plochy

$$Q = \left\{ (x,y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \right)^{4/3} \leqslant 2 \left(\frac{xy}{ab} \right)^2 \ \wedge \ x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant 0 \right\}.$$

2 (10 bodů)
Pro parametry $\alpha, \beta \geqslant 1$ vypočtěte aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem určitý integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+\beta^2) - \ln(x^2+1)}{x^2+\alpha^2} \, \mathrm{d}x.$$

3 (4 body)
Nosičem funkce $g(x,y)$ je šachovnice $\langle 0,4) \times \langle 0,4)$, kde $\langle 0,1) \times \langle 0,1)$ je bílé políčko. Na bílých políčcích má funkce $g(x,y)$ hodnotu -1, na černých $+2$. Míra v $\mathbf{R}^2$ je zadána prostřednictvím vytvořujících funkcí $\varphi(x) = x|x|$ a $\psi(y) = y$. Čemu se rovná

$$\int_{\mathbf{R}^2} g(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x,y)\,?$$

4 (10 bodů)
Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_C (x^2 - y; x + y^3) \, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x, y > 0 \ \wedge \ \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^8 = \frac{16xy}{ab} \right\}.$$

Zvažte možné postupy a volte jednodušší variantu výpočtu.

5 (4 body)
Sestavte křivkovou parametrizaci křivky C z příkladu č. 4 a podle definic rozhodněte, zda je C uzavřená a hladká regulární.

6 (3 body)
Na množinové soustavě

$$\mathscr{H}_2 = \left\{ \emptyset, \langle \alpha_1, \beta_1) \times \langle \alpha_2, \beta_2) : \ -\infty < \alpha_k < \beta_k < +\infty, \ k = 1,2 \right\}$$

demonstrujte, že splňuje definici polookruhu.