

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – verze A

pondělí 15. listopadu 2021, 15:30–16:45

1 (8 bodů)

Rozhodněte, zda (nebo případně pro jakou volbu parametrů) patří funkce

$$g(x) = \Theta(x) \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

do třídy \mathcal{B} balancovaných hustot? Pro nalezené verze vypočítejte normu $\|g\|$, první moment $\mu_1(g)$ a určete balanční index.

2 (8 bodů)

Užitím vhodného aproximačního postupu vypočítejte konvoluci

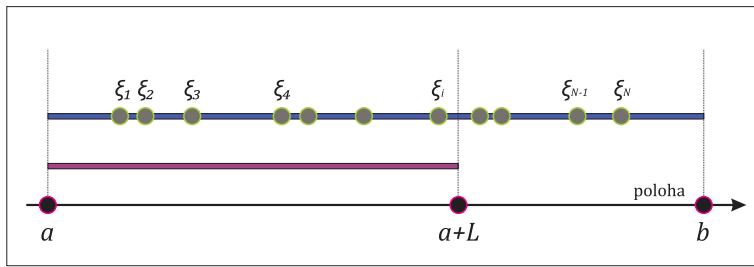
$$\Theta(x) \sqrt{x} e^{-\frac{\alpha^3}{x^2}} e^{-\lambda x} \star \Theta(x) \sqrt{x} e^{-\frac{\beta^3}{x^2}} e^{-\lambda x},$$

kde $\alpha, \beta \geq 0$ a $\lambda > 0$ jsou pevně zvolené konstanty.

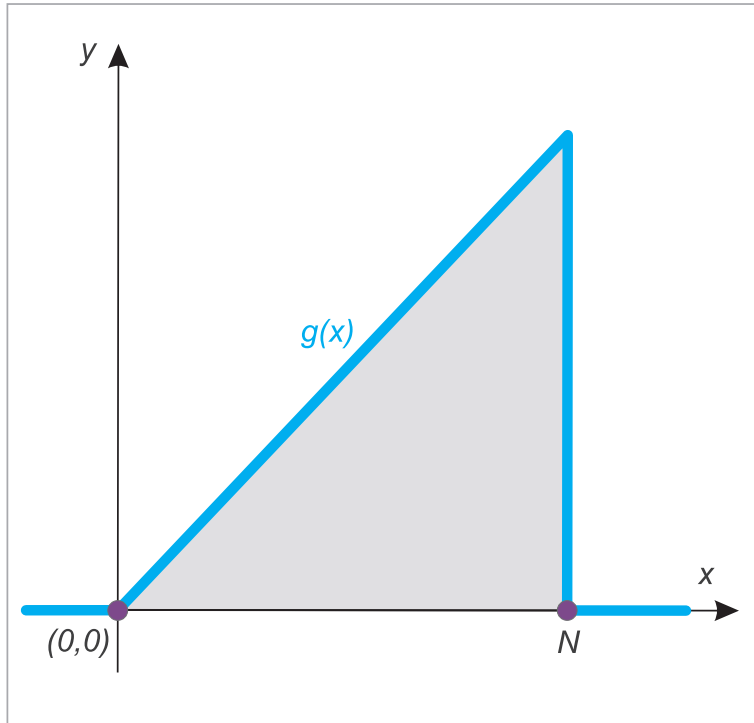
3 (8 bodů)

Uvažujme úsečku vymezenou body $a = 0$ a $b = N \in \mathbf{N}$ (viz první obrázek). Nechť je na tuto úsečku náhodně rozseto právě N částic, a to tak, že jejich lokace jsou vybrány z Trojúhelníkového rozdělení $T(0, N) \sim g(x)$ (viz druhý obrázek). Pro takto vymezenou úlohu

- odvodte matematický tvar hustoty pravděpodobnosti $g(x)$;
- vyjádřete pravděpodobnost, že číslo z rozdělení $T(0, N)$ bude menší než L ;
- vyjádřete pravděpodobnost, že číslo z rozdělení $T(0, N)$ bude větší než L ;
- vyjádřete pravděpodobnost, že v intervalu $(0, L)$ leží (z oněch N náhodně vybraných částic) právě k částic;
- a určete, jaká je střední hodnota intervalové frekvence \mathcal{N}_L , kde intervalovou frekvencí rozumíme počet částic vyskytujících se na intervalu $(0, L)$.



Obr. 1 N náhodně rozmístěných částic na úsečce $\langle a, b \rangle = \langle 0, N \rangle$ a úsek $(0, L)$, na němž je sledována intervalová frekvence \mathcal{N}_L , tj. počet částic.



Obr. 2 Graf hustoty pravděpodobnosti $g(x)$.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MCS – verze A

čtvrtek 6. ledna 2022, 9:30–11:30

1 (8 bodů)

Dokažte, že je-li v balančním částicovém systému generátorem funkce $g(x) = \Theta(x)\lambda e^{-\lambda x}$, pak mají intervalové frekvence Poissonovo rozdělení. Jaká je příslušná střední hodnota intervalových frekvencí? Dodatek: Ignorujte skutečnost, že v uvedeném BČS není splněn požadavek na škálování.

2 (8 bodů)

Nechť $H(s)$ a $R(s)$ jsou obrazy generátoru BČS a jeho shlukové funkce. Odvoďte vztah mezi nimi. Neopomeňte také prověřit, zda má $H(s)$ správné předpoklady nutné k výpočtu.

3 (12 bodů)

Na polopřímce $\langle 0, +\infty \rangle$ jsou rozmístěny částice tak, že hustota pravděpodobnosti pro jejich vzdálenost (rozumí se vzdálenost sousedních částic) je popsána funkcí

$$h(x) = \Theta(x)\sqrt{x}e^{-\frac{\alpha}{x}}e^{-\lambda x}.$$

Jak se změní distribuce roztečí, budou-li ze systému odstraněny z každé trojice sousedních částic dvě částice?

4 (14 bodů)

Nechť N_L je intervalová frekvence balančního částicového systému a $g_k(x)$ hustota pravděpodobnosti pro k -tou multirozteč. Odvoďte vztah mezi $\mathbb{E}(N_L^2)$ a $g_k(x)$. V rámci řešení ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle 0, a \rangle$. K čemu se vám tento poznatek bude hodit?

Na základě rovnosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \star \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m g_m(x)$$

upravte výraz pro $\mathbb{E}(N_L^2)$ do tvaru, v němž vystupuje pouze shluková funkce.

5 (12 bodů)

Nechť $(\mu_k)_{k=0}^{\infty}$ je momentový kód hustoty $g(x) \in \mathcal{B}$. Jak vypadá momentový kód chvostové distribuční funkce

$$h(x) = \Theta(x) \int_x^{\infty} g(y) dy?$$

Návod: Nejprve odvoďte, jak souvisejí Laplaceovy obrazy $\mathcal{L}[h(x)]$ a $\mathcal{L}[g(x)]$ a poté dosad'te za $\mathcal{L}[g(x)]$ její Maclaurinovu řadu.

6 (6 bodů)

Podpište si zadání.