Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01RMF – varianta A

čtvrtek 19. listopadu 2015, 13:20–15:20

1 (5 bodů)

Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$ a

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = A, \quad \int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \mu, \quad \int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = B, \quad \int_{\mathbf{R}} x g(x)\,\mathrm{d}x = \nu.$$

Vypočítejte, čemu se rovná $\int_{\mathbf{R}} z(f \star g)(z)\,\mathrm{d}z$.

2 (10 bodů)

Metodou iterovaných jader (tedy aplikací rezolventy) řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \sqrt{xy}\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \sqrt{x}.$$

Tvar iterovaného jádra prokažte indukcí. Odlišná metoda řešení je nepřípustná!

3 (4 body)

Nechť posloupnost $(\varphi_k(\vec{x}))_{k=1}^{\infty}$ konverguje podle normy v Banachově prostoru $\mathscr{C}_\sigma(J)$ k nulové funkci. Dokažte, že pak

$$\varphi_k(\vec{x}) \overset{J}{\rightrightarrows} 0.$$

V důkaze komentujte, proč by tvrzení neplatilo, kdyby J nebyla kompaktní množina.

4 (11 bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici

$$3x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

5 (4 body)

Vypočítejte konvoluci $\Theta(x)x^m \star \mathrm{e}^x$, kde $m \in \mathbf{N}$.

6 (6 bodů)

Na posloupnosti se členy

$$g_n(x) = \left(\frac{x+2}{7}\right)^n$$

demonstrujte, že operátor $\hat{L} = \frac{\mathrm{d}\bullet}{\mathrm{d}x}$ není omezený ani spojitý v $\mathbb{L}_2(-2,5)$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01RMF – varianta B

čtvrtek 19. listopadu 2015, 13:20–15:20

❶ (10 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - x^3y\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3y^4.$$

❷ (4 body)
Na posloupnosti se členy

$$g_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}$$

demonstrujte, že i posloupnost, která stejnoměrně nekonverguje na $\mathbf{R}$ může konvergovat podle normy na $\mathscr{L}_2(\mathbf{R})$.

❸ (5 bodů)
Dokažte, že konverguje-li posloupnost $(\varphi_k(\vec{x}))_{k=1}^{\infty}$ na G stejnoměrně k nulové funkci, kde $\mu(G) < \infty$, pak také konverguje podle normy v $\mathscr{L}_2^{(w)}(G)$. V důkaze vysvětlete, jaký zádadní předpoklad o váze $w(\vec{x})$ je třeba učinit a proč.

❹ (5 bodů)
Vypočítejte konvoluci $x^2 \star \mathrm{e}^{-4x^2}$.

❺ (10 bodů)
Metodou iterovaných jader (tedy aplikací rezolventy) řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \sqrt{xy}\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \sqrt{x}.$$

Tvar iterovaného jádra prokažte indukcí. Odlišná metoda řešení je nepřípustná!

❻ (6 bodů)
Nechť $\hat{S} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ je operátor s čistě bodovým spektrem, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ jeho unfoldované spektrum a $B = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots\}$ příslušná operátorová báze. Odvoďte univerzální formule pro hodnoty

- a) $\langle \hat{S}(f) | \hat{S}(g) \rangle$,
- b) $\|\hat{S}(f)\|$

platné pro libovolné funkce $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$. V jejich tvaru užijte Fourierovy koeficienty. Ve výpočtu komentujte každou vlastnost, jíž využíváte!

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01RMF – varianta C

středa 2. prosince 2015, 15:20–17:20

1 (10 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3y\frac{\partial u}{\partial y} + 8x^3y^5 = 0.$$

2 (6 bodů)
Nalezněte spektrum operátoru $\hat{H} := \int_0^\infty (2x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)} \bullet \, \mathrm{d}y$.

3 (4 body)
Podle definice ukažte, že operátor $\hat{L} = x^3\bullet$ je na $\mathbb{L}_2(-1,2)$ omezený. Jakou nejmenší hodnotu omezující meze (číslo z definice omezenosti operátoru) lze v tomto příkladě zvolit?

4 (5 bodů)
Vypočítejte konvoluci $x^2\mathrm{e}^{-2x^2} \star \mathrm{e}^{-2x^2}$.

5 (10 bodů)
Metodou iterovaných jader (tedy aplikací rezolventy) řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu\int_0^x x^3y^3\varphi(y)\,\mathrm{d}y + x^3.$$

Tvar iterovaného jádra prokažte indukcí. Odlišná metoda řešení je nepřípustná!

6 (5 bodů)
Nechť $f(x), g(x)$ jsou hustoty a

$$\int_{\mathbf{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x = \mu_1, \quad \int_{\mathbf{R}} xg(x)\,\mathrm{d}x = \mu_2, \quad \int_{\mathbf{R}} x^2f(x)\,\mathrm{d}x = \omega_1, \quad \int_{\mathbf{R}} x^2g(x)\,\mathrm{d}x = \omega_2.$$

Vypočítejte, čemu se rovná $\int_{\mathbf{R}} z^2(f\star g)(z)\,\mathrm{d}z$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01RMF – varianta A

pondělí 11. ledna 2016, 9:00–11:00

1 (7 bodů)
Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x}.$$

v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{1+1})$.

2 (9 bodů)
V prostoru dvojrozměrných zobecněných funkcí vypočítejte limitu

$$\lim_{n \to +\infty} \Theta(x, y) n^4 (x^2 + y^2) \mathrm{e}^{-n^2(x^2+y^2)}.$$

3 (9 bodů)
Užitím vlastností Laplaceovy transformace vypočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(\beta x) \cos^2(\beta x)}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

4 (6 bodů)
Dokažte, že konverguje-li posloupnost funkcí $(\tilde{f}_k)_{k=1}^\infty$ z prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ k funkci $\tilde{f} \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$, pak pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ platí rovnost

$$\lim_{k \to \infty} \mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}[\tilde{f}_k] = \mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}[\tilde{f}].$$

Tvrzení nejprve dokazujte pro nulový multiindex, poté pro multiindex libovolný. K důkazu užijte pouze definici konvergence v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a definici Fourierovy transformace.

5 (9 bodů)
Laplaceovou transformací řešte integrodiferenciální rovnici

$$y'' + y - 10 \int_0^x y(\xi) \, \mathrm{d}\xi = x - 5x^2 - 3, \qquad y(0) = 0 \;\&\; y'(0) = -4.$$

Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01RMF – varianta B

čtvrtek 14. ledna 2016, 9:00–11:00

1 (6 bodů)
Aplikací Fourierovy transformace vypočtěte konvoluci

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \star \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

2 (10 bodů)
Aplikací základní věty o řešení diferenciální rovnice řešte

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + b\cdot u(x,y,t) = 0 \quad (a>0, b>0)$$

za podmínky $u(x,y,0) = x + y$.

3 (9 bodů)
Nechť je zadán parametrický systém třídimenzionálních zobecněných funkcí $\tilde{f}_\varepsilon \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^3)$, jejichž generátorem je funkce

$$f_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + \|\vec{x}\|^2)^2}.$$

Vypočtěte limitu $\lim_{\varepsilon\to 0_+} \tilde{f}_\varepsilon$ ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^3)$.

4 (8 bodů)
Za pomocí Laplaceovy transformace nalezněte funkci $y(t)$, jež řeší obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 5\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 9\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 5y = 4\mathrm{e}^t$$

a vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 3$ a $\ddot{y}(0) = 8$.

5 (7 bodů)
Nechť pro funkci $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ platí, že

$$f(x) \in \mathscr{C}^1(-\infty, a), \quad f(x) \in \mathscr{C}^1(a, b), \quad f(x) \in \mathscr{C}^1(b, \infty),$$

kde $-\infty < a < b < \infty$. Nechť $f \in \mathscr{D}'$ je zobecněná funkce, jejímž generátorem je funkce $f(x)$. Vyslovte tvrzení o derivaci funkce f v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ a tvrzení poté korektně dokažte.