

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtový test č. 1 z předmětu 01UP2 – varianta A

pondělí 7. dubna 2025, 16:10—17:30

1 (6 bodů)

Určete střední hodnotu náhodné proměnné popsané hustotou pravděpodobnosti

$$g(x) = A \Theta(x - 2) e^{-ax}.$$

2 (4 body)

ChatGPT vygeneroval následující text: *"Sportka je populární česká číselná loterie, kterou provozuje společnost Sazka. Hráči si v ní vybírají šest čísel ze čtyřiceti devíti a výhry závisí na počtu uhodnutých čísel. Losování probíhá pravidelně třikrát týdně (středa, pátek, neděle) a často je spojeno s možností vyhrát vysoké jackpoty. Kromě základní hry lze vsadit i na doplňkové hry, například Šance, kde se losuje šestimístné číslo z tiketu. Výhry se odvíjejí od počtu správně tipovaných čísel a aktuálního jackpotu."* Zodpovězte následující dotazy:

- Co je výběrovým prostorem popsaného náhodného jevu $\mathbb{X}$, kde $\mathbb{X}$ reprezentuje losování prvního z čísel?
- Jaké je kardinální číslo tohoto výběrového prostoru?
- Jak je třeba volit množinu A , aby odpovědí na pravděpodobnostní dotaz ve tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] = ?$ byla jedna sedmina?
- Jakou hodnotu má distribuční funkce tohoto náhodného jevu v bodě $x = 28, 25$?

3 (7 bodů)

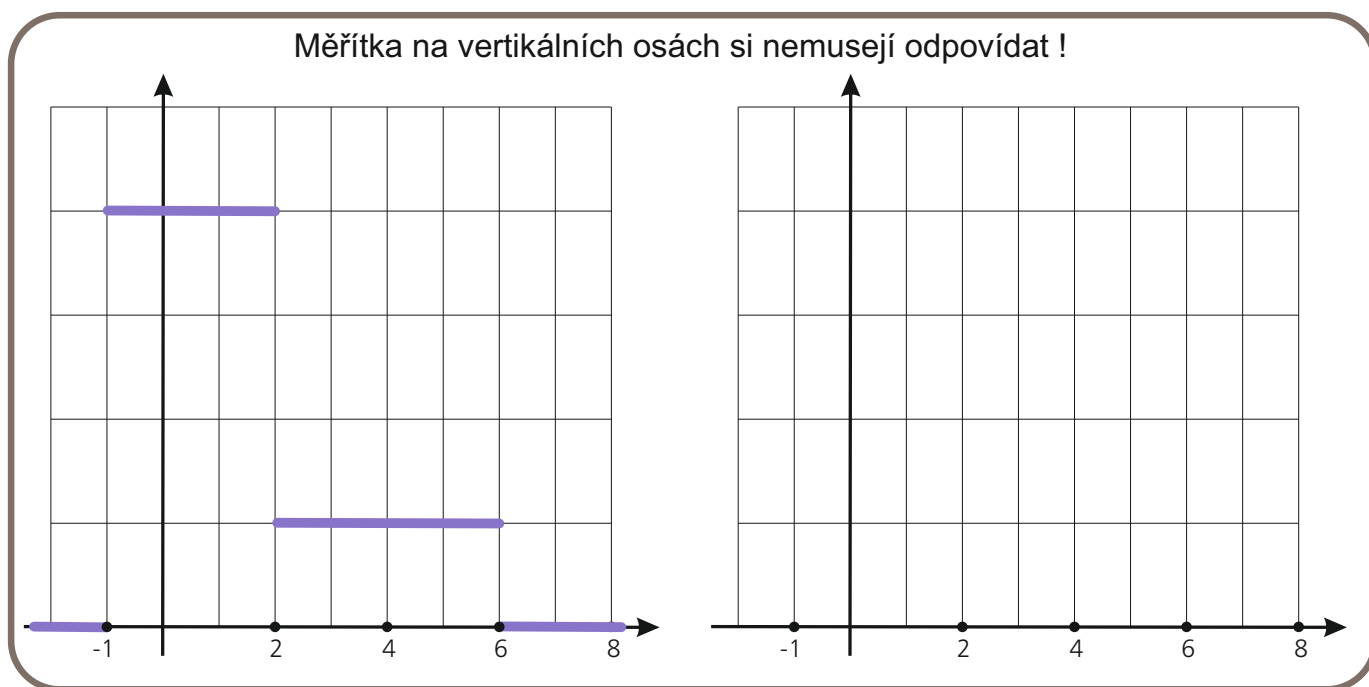
Nechť je náhodná proměnná popsána distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 2, \\ 1 - \frac{1}{64}(x - 10)^2 & \text{pro } x \in (2, 10), \\ 1 & \text{pro } x \geq 10. \end{cases}$$

Pro množiny $C = \langle 3, 8 \rangle$ a $D = \langle 5, 9 \rangle$ vypočítejte pravděpodobnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in C \cup D]$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in C \setminus D]$ a detailně vykreslete průběh hustoty pravděpodobnosti této proměnné.

4 (5 bodů)

K hustotě pravděpodobnosti z obrázku vykreslete (do volného obrázku vpravo) odpovídající distribuční funkci. Doplňte také měřítka na vertikálních osách v obou obrázcích.



5 (8 bodů)

Náhodná proměnná X má výběrový prostor $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a pro pravděpodobnosti elementárních jevů platí vztah

$$\mathcal{P}[X = n] = Aq^{2n},$$

kde A je normalizační konstanta a $q \in (0, 1)$ je parametr. Čemu se musí rovnat q , aby střední hodnota proměnné X byla rovna jedné osmině?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtový test č. 1 z předmětu 01UP2 – varianta B

pondělí 7. dubna 2025, 16:10—17:30

1 (8 bodů)

Náhodná proměnná $\mathbb{X}$ má výběrový prostor $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a pro pravděpodobnosti elementárních jevů platí vztah

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = k] = Aq^{2k},$$

kde A je normalizační konstanta a $q \in (0, 1)$ je parametr. Čemu se musí rovnat q , aby střední hodnota proměnné $\mathbb{X}$ byla rovna čtyřem pětinaám?

2 (4 body)

ChatGPT vygeneroval následující text: "Tak zvaná ruleta s nulovou výhodou je kasinová hra, alternativní k mnohem rozšířenější francouzské ruletě. Hraje se na kole s 36 obarvenými a očíslovanými políčky od 1 do 36. Po roztočení kola hráči sázejí na výsledek (konečné umístění kuličky), přičemž mohou volit mezi různými typy sázek – například na konkrétní číslo, skupinu čísel, barvu (červená/černá) nebo sudá/lichá čísla. Mezi nejběžnější typy sázek patří vnitřní sázky (např. přímá sázka na jedno číslo) a vnější sázky (např. na barvu nebo sloupec)." Zodpovězte následující dotazy:

- Co je výběrovým prostorem popsaného náhodného jevu $\mathbb{X}$, kde $\mathbb{X}$ reprezentuje jedno otočení rulety?
- Jaké je kardinální číslo tohoto výběrového prostoru?
- Jak je třeba volit množinu A , aby odpovědi na pravděpodobnostní dotaz ve tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] = ?$ byla jedna šestina?
- Jakou hodnotu má distribuční funkce zkoumaného jevu v bodě $x = 27,113$?

3 (7 bodů)

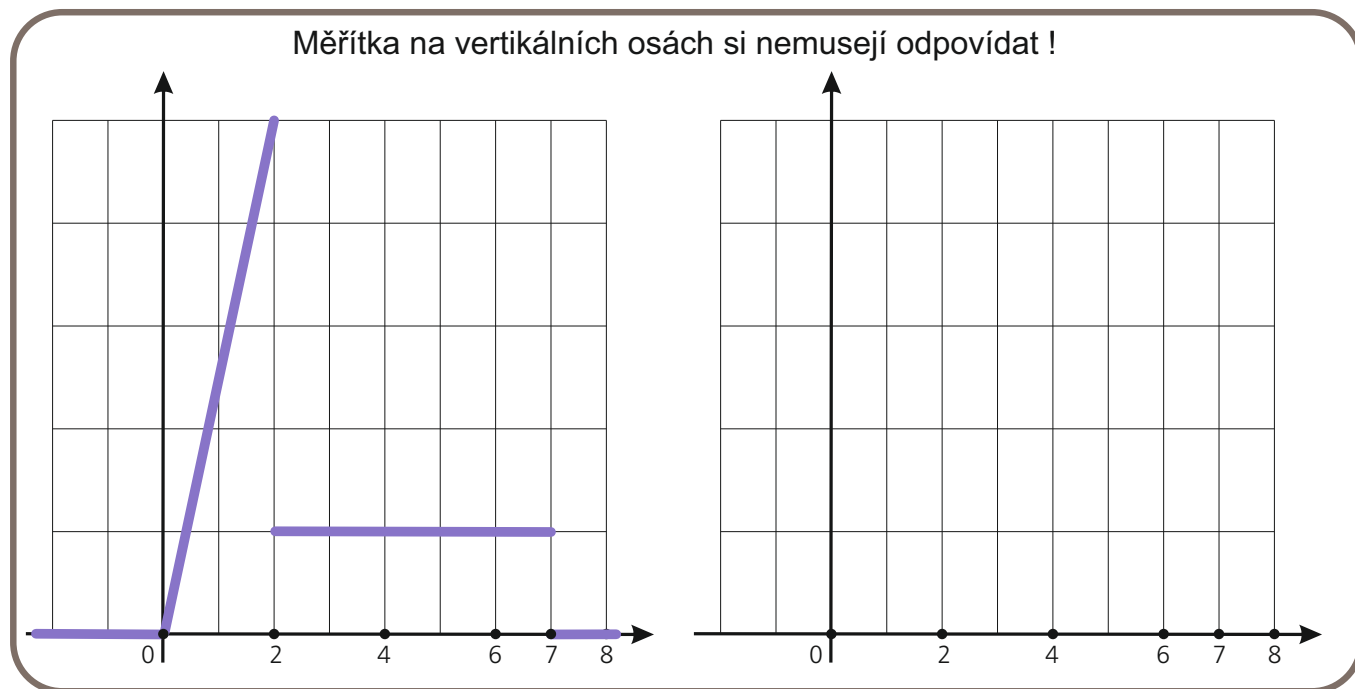
Nechť je náhodná proměnná popsána distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -2, \\ \frac{1}{100}(x+2)^2 & \text{pro } x \in (-2, 8), \\ 1 & \text{pro } x \geq 8. \end{cases}$$

Pro množiny $C = \langle -1, 6 \rangle$ a $D = \langle 1, 7 \rangle$ vypočítejte pravděpodobnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in C \cup D]$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in C \setminus D]$ a detailně vykreslete průběh hustoty pravděpodobnosti této proměnné.

4 (5 bodů)

K hustotě pravděpodobnosti z obrázku vykreslete (do volného obrázku vpravo) odpovídající distribuční funkci. Doplňte také měřítka na vertikálních osách v obou obrázcích.



5 (7 bodů)

Na obrázku je vykreslena hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné X . Zodpovězte následující dotazy:

- Jakou hodnotu má číslo a ?
- Jaký je analytický předpis této hustoty?
- Co je střední hodnotou zkoumané náhodné proměnné?

