Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 1 z předmětu 01ANB3

5/1/2023, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

❶ Vyslovte definici pojmu *parciální derivace ve směru* a podle ní vypočítejte pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{\frac{5x+2y}{x+y}} & \dots\ x \neq -y, \\ 0 & \dots\ x = -y, \end{cases}$$

směrovou derivaci v bodě $(0,0)$, ve směru $\vec{s} = (1,1)$.

❷ Ukažte, že jsou-li dva vektory lineárně závislé, pak pro ně ve Schwarzově-Cauchyově-Buňakovského nerovnosti platí rovnost.

❸ Vyslovte definici vnitřního a hraničního bodu množiny A v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$.

❹ Vyslovte axiomy normy.

❺ Za jakých podmínek lze ve výraze $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ zaměnit pořadí operací?

❻ Vyslovte a dokažte srovnávací kritérium pro řady funkcí.

❼ Co představuje symbol Ω_0 v teorii diferenciálních rovnic? Ukažte, že je Ω_0 uzavřená na operaci sčítání.

❽ Pro funkci

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+9y^4} & \dashrightarrow\ x \neq 0 \ \vee\ y \neq 0, \\ 0 & \dashrightarrow\ x = 0 \ \wedge\ y = 0, \end{cases}$$

nalezněte posloupnost $(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k nulovému vektoru, a pro níž je limitou funkčních hodnot $g(\vec{a}_n)$ číslo $-1/6$.

❾ Jak se definuje *stejnoměrná konvergence* pro řady funkcí?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 2 z předmětu 01ANB3

10/1/2023, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

1 Nechť je dán prostor $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = 2\,|x_1 - y_1| + 4\,\lceil |x_2 - y_2| \rceil$$

a množina $A = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$. Najděte všechny hraniční body této množiny.

2 O funkci g je známo, že

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = 0, \qquad \frac{1}{\|\vec{s}\|}\,\langle \vec{s}\,|\,\mathrm{grad}(g)(\vec{a})\rangle = 1\ ?$$

Jaký závěr lze z tohoto poznatku vyvodit?

3 Ukažte, jak (a zda vůbec) lze použít Weierstrassovo kritérium při vyšetřování stejnoměrné konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4x}{(x^2 + 2n^2)^{3/2}}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

4 Vyslovte větu o superpozici a dokažte ji.

5 Pro rovnici $y''' + 6y'' + 9y' = 27$ určete, co je Ω_0, Ω_q, a co je fundamentální systém.

6 Zapište tvar rovnice tečné nadroviny ke grafu funkce $g(x, y, z) = x^2 + 3yz^2 - 7xz$ zkonstruované v bodě $\vec{a} = (-1, 2, 1)$.

7 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ má poloměr konvergence $\mathrm{R} = 5$. Jaký poloměr konvergence má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^3}{b_{n+1}} x^n ?$$

8 Je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou generovanou pomocí normy a v něm množina $D \subset \mathbf{R}^r$ a bod $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$. Jakou vlastnost bodu $\vec{a}$ popisuje následující výrok?

$$(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^r): \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \;\Rightarrow\; \vec{x} \in D.$$

9 Pokud mají výroky

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbf{N} \setminus \hat{m}): \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x) - x^2\right| < \varepsilon.$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \ell > 0)(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbf{N} \setminus \hat{\ell}): |g_n(x) - ?| < \varepsilon.$$

platit současně, co se nutně musí skrývat místo otazníku a proč?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 3 z předmětu 01ANB3

23/1/2023, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17,18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16,17) \mapsto$ **B**; $\langle 15,16) \mapsto$ **C**; $\langle 14,15) \mapsto$ **D**; $\langle 12,14) \mapsto$ **E**; $\langle 0,12) \mapsto$ **F**;

1. Nechť je dán prostor $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) = \lceil |x_1 - y_1| \rceil + 2\,|x_2 - y_2|$$

a množina $A = \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 :\ |a| + |b| \leqslant 1\}$. Najděte všechny izolované body této množiny.

2. Vyslovte definici homogenní funkce stupně α.

3. Následující výrok přepište do jednoduchého (a minimalistického) tvaru.

$$\lim_{c\to 0} \frac{g(1+4c, 3-4c, 2c) - g(1,3,0)}{c} = 8.$$

4. Pro kvadratickou plochu

$$4x^2 - 4xy - 12xz + 12x + y^2 + 6yz - 6y + 9z^2 - 18z + 8 = 0$$

nalezněte obě signatury. O jakou kvadriku se jedná (určete název)?

5. Je dobře známo, že předpis

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

zadává na $C(\langle 0,1\rangle)$ skalární součin. Proč ale stejný výraz (1) nezadává skalární součin na $C(\langle -1,1\rangle)$?

6. Je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou generovanou pomocí normy a v něm množina $D \subset \mathbf{R}^r$ a její bod $\vec{a} \in D$. Jakou vlastnost bodu $\vec{a}$ popisuje následující výrok?

$$(\exists\delta > 0)(\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^r) : \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \ \Rightarrow\ \vec{x} \notin D.$$

7. Dokažte, že předpis $\sqrt{\langle \vec{x}|\vec{x}\rangle}$ splňuje axiomy normy.

8. Za jakých podmínek prohlásíme o množině A, že je kompaktní?

9. Pro funkci

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+9y^4} & \dashrightarrow\ x \neq 0 \ \vee\ y \neq 0, \\ 0 & \dashrightarrow\ x = 0 \ \wedge\ y = 0, \end{cases}$$

nalezněte posloupnost $(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k nulovému vektoru, a pro níž je limitou funkčních hodnot $g(\vec{a}_n)$ číslo $-1/6$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 4 z předmětu 01ANB3

1/2/2023, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

❶ Je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou generovanou pomocí normy a v něm množina $D \subset \mathbf{R}^r$. Jakou vlastnost množiny D popisuje následující výrok?

$$(\forall \vec{x} \in D)(\exists \delta > 0): \quad \|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta \Rightarrow \vec{y} \in D.$$

❷ Vyslovte definici Cauchyovy úlohy a znění věty o jejím řešení.

❸ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ má poloměr konvergence $\mathtt{R} = 3$. Jaký poloměr konvergence mají řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}^5}{b_n} x^n ? \qquad \& \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}^5}{b_n} x^{2n} ?$$

❹ Která z funkcí 1, $\sqrt{|x|}$, x vektorového prostoru $V = C(\langle -1, 2\rangle)$ je nejblíže nulovému prvku prostoru V? A proč? Nápověda: Na V zaveďte standardní skalární součin a jím generovanou normu a metriku.

❺ Jakou hodnotu má směrová derivace funkce $g(x, y) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(y + 1)^2$ v bodě $\vec{a} = (1, 1)$ vyčíslená ve směru gradientu funkce $\vec{s} = \operatorname{grad} f(\vec{a})$?

❻ Pracujeme ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^r$ s obecným skalárním součinem a s normou, která je tímto skalárním součinem generovaná. Rozhodněte, zda vztah

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) := 1 - \frac{|\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$$

splňuje axiom nulovosti pro metriky.

❼ Vyslovte a dokažte větu o vztahu cauchyovské a konvergentní posloupnosti.

❽ Diferenciální rovnici

$$y''' + s(x)y'' + r(x)y' + t(x)y = q(x)$$

řeší všechny funkce tvaru $y(x) = x^3 + \alpha x \mathrm{e}^{-x^2}$ pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$. Jakou substituci použijete ke snížení řádu zadané rovnice?

❾ Jakou kvadriku reprezentuje rovnice

$$-6xy + 2xz - 8x + 3y^2 - 4yz - 2y + z^2 - 2z - 9 = 0\,?$$

A jaké jsou její signatury?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 5 z předmětu 01ANB3

9/2/2023, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

❶ O funkci $g(\vec{x})$ je známo, že je třídy $C^1(\mathbf{E}^3)$ a že pro ni navíc platí

$$(\exists \varkappa > 0): \qquad 0 < \langle \vec{x} - \vec{a} | \vec{x} - \vec{a} \rangle < \varkappa \;\Rightarrow\; g(\vec{x}) < g(\vec{a}).$$

Jaký tvar má rovnice tečné roviny ke grafu funkce $\Gamma(g)$ sestrojená v bodě $(a_1, a_2, a_3, g(\vec{a}))$?

❷ Vysvětlete, proč je při odvozování tvaru Taylorových koeficientů nezbytné přemýšlet o tom, zda Taylorova řada konverguje alespoň někde (kde?) stejnoměrně. Naznačte, jak odvození probíhá.

❸ Jakého tvaru je Bernoulliova diferenciální rovnice? Ukažte také, jak ji lze převést na rovnici lineární.

❹ Vyslovte Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

❺ Které z následujících výroků (o spojité funkci více proměnných $g : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$) jsou pravdivé?

- A: Obrazem otevřené množiny $A \subset \mathbf{R}^r$ je vždy opět otevřená množina.
- B: Funkce má totální diferenciál ve všech bodech $\mathbf{R}^r$.
- C: Funkce má gradient ve všech bodech $\mathbf{R}^r$.
- D: Funkce má limitu ve všech bodech $\mathbf{R}^r$.
- E: Obrazem kompaktní množiny $A \subset \mathbf{R}^r$ je vždy opět kompaktní množina.

❻ Diferenciální rovnici

$$y''' + s(x)y'' + r(x)y' + t(x)y = q(x)$$

řeší všechny funkce tvaru $y(x) = x\mathrm{e}^{-x^2} + \alpha x^3$ pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$. Jakou substituci použijete ke snížení řádu zadané rovnice?

❼ Nechť je dán prostor $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + \lceil |x_2 - y_2| \rceil$$

a množina $A = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : a^2 + b^2 \leqslant 9\}$. Najděte všechny izolované body této množiny.

❽ Sestavte diferenciální rovnici, jejíž množina všech řešení je tvaru

$$[\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}]_\lambda + x^2.$$

❾ Kvadratická plocha $-6xy + 2xz - 8x + 3y^2 - 4yz - 2y + z^2 - 2z - 9 = 0$ má nekonečně mnoho středů. Nalezněte ten, který leží v rovině $x = 1$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 7 z předmětu 01ANB3

15/3/2023, 10:00 — 11:15

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

1 Diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + w(x)y^{(3)} + s(x)y'' + r(x)y' + t(x)y = q(x)$$

řeší všechny funkce tvaru $y(x) = \cos(2x) + \alpha\sin(2x) + \beta x\sin(2x)$ pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Jakou substituci použijete ke snížení řádu zadané rovnice?

2 Diferenciální rovnici

$$y'' + r(x)y' + t(x)y = q(x)$$

řeší všechny funkce tvaru $y(x) = \cos(2x)+\alpha\sin(2x)+\beta x\sin(2x)$ pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Proč v tomto případě nemá cenu snižovat řád této diferenciální rovnice?

3 Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & \dashrightarrow\ x \neq 0 \vee y \neq 0, \\ 0 & \dashrightarrow\ x = 0 \wedge y = 0, \end{cases}$$

nalezněte posloupnost $(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k nulovému vektoru, a pro níž je limitou funkčních hodnot $g(\vec{a}_n)$ číslo $-2/5$.

4 Vykreslete (co nejpřesněji) tvar okolí $\mathcal{U}_6(0, 0)$ v Hilbertově prostoru se skalárním součinem

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

5 Je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou generovanou pomocí normy a v něm množina $D \subset \mathbf{R}^r$ a bod $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$. Jakou vlastnost bodu $\vec{a}$ popisuje následující výrok?

$$(\exists\delta > 0)(\forall\vec{x} \in \mathbf{R}^r): \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \ \Rightarrow\ \vec{x} \in D.$$

6 Za jakých podmínek prohlásíme o množině A, že je souvislá?

7 Dokažte, že je-li posloupnost v metrickém prostoru konvergentní, pak je také cauchyovská. Jak se nazývají prostory, kde platí i obrácená implikace?

8 Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \sqrt{5}\frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \dashrightarrow\ x \neq 0 \vee y \neq 0, \\ 0 & \dashrightarrow\ x = 0 \wedge y = 0, \end{cases}$$

vypočítejte $\frac{\partial g}{\partial \vec{s}}(0, 0)$, kde $\vec{s} = (-3, 4)$.

9 Vyslovte Weierstrassovo kritérium.