

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze |   |   |   |   |   |   |   |   |   | CELKEM |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Jméno a příjmení studenta                                              | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |        |
|                                                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

## Zkouškový test č. 1 z předmětu 01ANB3

11/1/2024, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení:  $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$ ;  $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$ ;  $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$ ;  $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$ ;  $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$ ;  $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$ ;

- 1 Vyslovte definici pojmu *parciální derivace ve směru* a podle ní vypočítejte pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{5x+2y}{x+y} & \dots x \neq -y, \\ (x - y + 3)^2 & \dots x = -y, \end{cases}$$

směrovou derivaci v bodě  $(0, 0)$ , ve směru  $\vec{s} = (1, -1)$ .

- 2 Definujte konvergenci podle normy.

- 3 Zapište tvar diferenciálního operátoru figurujícího v definici Eulerovy diferenciální rovnice. **Odpověď na tuto otázku napište přímo zde:**

- 4 V  $\mathbf{R}^2$  s metrikou  $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  je dána množina  $P = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 : x_2 = x_1^2 \wedge -2 \leq x_1 \leq 2\}$  a body  $\vec{a} = (0, 0)$ ,  $\vec{b} = (2, 4)$ ,  $\vec{c} = (-2, 4)$  a  $\vec{d} = (-1, 1)$ . Které z těchto bodů jsou hromadnými body množiny  $P$ ? **Odpověď na tuto otázku napište přímo zde:**

- 5 Za jakých podmínek lze ve výrazu  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$  zaměnit pořadí operací?

- 6 Podle definice ukažte, že množina  $A = \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$  není v metrickém prostoru  $\{\mathbf{R}^2, \varrho_2\}$  kompaktní.

- 7 Jakým způsobem se dokazuje, že Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici má vždy řešení? A kde se v důkaze využívá tvrzení základní věty teorie diferenciálních rovnic?

- 8 Najděte množinu, vzhledem k níž je nespojitá funkce

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{8x(y-1)^3}{x^2+15(y-1)^6} & \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 1) \\ 1 & \Leftrightarrow (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

spojitá v bodě  $\vec{a} = (0, 1)$ .

- 9 Co je součtovou funkcí funkční řady  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ? A co je jejím definičním oborem?

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze |   |   |   |   |   |   |   |   |   | CELKEM |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Jméno a příjmení studenta                                              | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |        |
|                                                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

## Zkouškový test č. 2 z předmětu 01ANB3

17/1/2024, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení:  $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$ ;  $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$ ;  $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$ ;  $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$ ;  $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$ ;  $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$ ;

1 Rovnici  $\hat{L}(y) = q(x)$  řeší funkce  $a(x) = x^2 + \frac{1}{x} + e^x$  a  $b(x) = x^2 + \frac{3}{x} + e^x$ . Jakou substituci použijete ke snížení řádu zadané rovnice? **Odpověď na tuto otázku napište přímo zde:**

2 Funkční vektor má složky  $a(x, y, z) = x^2 \cos(3z)$ ,  $b(x, y, z) = y^3$  a  $c(x, y, z) = x^2 \sin(3z)$ . Jakou hodnotu má jeho jacobíán?

3 V prostoru  $\mathbf{R}^2$  s metrikou

$$\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = \lceil |a_1 - b_1| \rceil + |a_2 - b_2|$$

je dána množina  $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \geq y \geq x^2\}$ . Má tato množina nějaké izolované body? Pokud ano, tak jaké? **Odpověď na tuto otázku napište přímo zde:**

4 Řešte Cauchyovu úlohu

$$2y'' - 12y' + 18y = e^{4x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

5 Vyslovte a dokažte větu o spojitosti skalárního součinu.

6 Definujte Taylorovu řadu funkce jedné proměnné.

7 Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x}{a}\right)^n$ , kde  $a > 0$ , má poloměr konvergence  $R = 3$ . Jaký poloměr konvergence má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{b_{n+1}} x^n?$$

8 Následující výrok přepište do jednoduchého (a minimalistického) tvaru.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(2, -2, 1) - g(4\tau + 2, 2\tau - 2, 4\tau + 1)}{\tau} = -3.$$

9 Vyslovte a dokažte Weierstrassovo kritérium.

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze |   |   |   |   |   |   |   |   |   | CELKEM |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Jméno a příjmení studenta                                              | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |        |
|                                                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

## Zkouškový test č. 3 z předmětu 01ANB3

22/1/2024, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení:  $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$ ;  $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$ ;  $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$ ;  $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$ ;  $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$ ;  $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$ ;

① Rozhodněte (a přímo zde v zadání zakroužkujte), které z následujících tvrzení platí a které ne. Pro rovnici  $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 2x$  je

- $\Omega_0 = [e^x, 1, -x^2]_L$  platí / neplatí
- $\Omega_0 = [e^x, 1, xe^x, x^2e^x]_L$  platí / neplatí
- $\Omega_0 = [e^x, 1, xe^x, x]_L$  platí / neplatí
- $\Omega_0 = [e^x, 1, xe^x, x^2e^x, -x^2]_L$  platí / neplatí
- $\Omega_0 = [1 + e^x, 1 + xe^x, 1 + x^2e^x, 2]_L$  platí / neplatí

② Vyslovte a dokažte supremální kritérium pro posloupnosti funkcí.

③ V zápise

$$\square + 3e^y - y^3e^x + (3xe^y - 3y^2e^x + 3x^2y^2)y' = 0$$

doplňte chybějící člen tak, aby rovnice byla exaktní.

④ Jakou vlastnost vyjadřuje následující výrok?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0, x \in \langle 0, +\infty \rangle \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m g_k(x) - \frac{x}{1+x^2} \right| < \frac{\varepsilon}{25}.$$

⑤ V prostoru  $\mathbf{R}^2$  s metrikou

$$\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = \lceil |a_1 - b_1| \rceil + |a_2 - b_2|$$

je dána množina  $P$ , která je obvodem čtverce  $\check{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$ . Má množina  $P$  nějaké vnitřní body? Pokud ano, tak jaké?

⑥ Vyslovte a dokažte větu o superpozici.

⑦ Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{14x^2y}{12x^4+y^2} & \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

nalezněte posloupnost  $(\vec{d}_n)_{n=1}^\infty$ , která konverguje k nulovému vektoru, a pro níž je limitou funkčních hodnot  $g(\vec{d}_n)$  číslo 2.

⑧ Vysvětlete (podrobně), proč lze ve větě, v níž se dokazuje, jakého tvaru jsou Taylorovy koeficienty funkce jedné proměnné, zaměnit derivaci a sumu.

⑨ Vyberte si jedno z tvrzení a to dokažte:

- Je-li posloupnost v metrickém prostoru cauchyovská, pak je v něm také konvergentní.
- Je-li posloupnost v metrickém prostoru konvergentní, pak je v něm také cauchyovská.

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze |   |   |   |   |   |   |   |   |   | CELKEM |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Jméno a příjmení studenta                                              | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |        |
|                                                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

## Zkouškový test č. 4 z předmětu 01ANB3

30/1/2024, 9:30 — 10:45

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení:  $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$ ;  $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$ ;  $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$ ;  $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$ ;  $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$ ;  $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$ ;

① Rozhodněte (a přímo zde v zadání zakroužkujte), ze kterého z následujících výroků vyplývá, že funkce  $f(\vec{x})$  má v bodě  $\vec{a}$  totální diferenciál.

- funkce  $f(\vec{x})$  je spojitá na jistém okolí  $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ ;      vyplývá / nevyplývá
- funkce  $f(\vec{x})$  má v bodě  $\vec{a}$  symetrickou Hessovu matici;      vyplývá / nevyplývá
- funkce  $f(\vec{x})$  je třídy  $C^3(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$  na jistém okolí  $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ ;      vyplývá / nevyplývá
- funkce  $f(\vec{x})$  má v bodě  $\vec{a}$  všechny parciální derivace;      vyplývá / nevyplývá
- funkce  $f(\vec{x})$  je analytická v bodě  $\vec{a}$ ;      vyplývá / nevyplývá

② Jakého tvaru je prostor  $\Omega_0$  pro operátor

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x-2}{x} \frac{d}{dx} - \frac{2x-2}{x^2} \text{ ?}$$

③ V  $\mathbf{R}^2$  jsou dány tři metriky

$$\varrho_A(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad \varrho_B(\vec{x}, \vec{y}) = \lceil |x_1 - y_1| \rceil + |x_2 - y_2|, \quad \varrho_C(\vec{x}, \vec{y}) = \lceil |x_2 - y_2| \rceil + |x_1 - y_1|.$$

Pro které z nich jsou množiny  $X = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$  a  $Y = (2, 5) \times \langle 0, 1 \rangle$  oddělené? Svou odpověď **zakroužkujte přímo zde**:

- pro všechny uvedené;
- jen pro A, B;
- jen pro A, C;
- jen pro B, C;
- jen pro A;
- jen pro B;
- jen pro C;
- pro žádnou.

④ Kdy prohlásíme, že je prostor úplný? A jakého typu prostoru se toto prohlášení týká? (prehilbertovského/normovaného/metrického)

5 Jakého typu je diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{4xy(y^2 + x^2)}{x^4 + y^4 + 6x^2y^2} ?$$

Své odpovědi **zakroužkujte přímo zde** v zadání:

- Bernoulliho rovnice;      ano / ne
- rovnice se separovanými proměnnými;      ano / ne
- exaktní rovnice;      ano / ne
- rovnice řešitelná metodou integračního faktoru;      ano / ne
- homogenní rovnice;      ano / ne

6 Vyslovte definici směrové parciální derivace.

7 Pro jaké varianty je předpis

$$(y_1, y_2) \begin{pmatrix} 2 & \beta \\ \alpha & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

skalárním součinem v  $\mathbf{R}^2$ ?

8 Vysvětlete, proč je v důkazu věty o spojitosti součtové funkce mocninné řady nezbytné použít základní větu teorie mocninných řad.

9 Velice krátce a populárně vysvětlete, jakým problémem se zabývá věta o variaci konstant. Uveďte také, na jaké typy rovnic ji **nelze** použít.

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze |   |   |   |   |   |   |   |   |   | CELKEM |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Jméno a příjmení studenta                                              | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |        |
|                                                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

## Zkouškový test č. 5 z předmětu 01ANB3

8/2/2024, 9:30 — 10:45

- 1 Dokažte rovnoběžníkovou rovnost. Na jakém typu prostoru rovnost dokazujete?
- 2 Nalezněte polynom druhého stupně, který na okolí bodu  $(1, 1)$  nejlépe aproximuje funkci

$$f(x, y) = e^{5-x^2-4y^2}.$$

- 3 Pro jaké varianty je předpis

$$(y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 4 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

skalárním součinem v  $\mathbf{R}^3$ ? Zajímají nás pouze nenulové a celočíselné varianty parametrů  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , z nichž alespoň jeden je záporný. Svou odpověď **napište přímo zde**:

$$(\alpha; \beta; \gamma; \delta) = (\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}).$$

- 4 Který z výroků je pravdivý? Své odpovědi **zakroužkujte přímo zde** v zadání:

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0, x \in (-1, 1) \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m x^{2k} - \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon;$       ano / ne
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0, x \in (-1, 1) \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m x^{2k} + \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon;$       ano / ne
- $(\forall x \in (-1, 1))(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m x^{2k} - \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon;$       ano / ne
- $(\forall x \in (-1, 1))(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m x^{2k} + \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon;$       ano / ne
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0, x \in (-1/2, 1/2) \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m x^{2k} - \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon;$       ano / ne
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : m > n_0, x \in (-1/2, 1/2) \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m x^{2k} + \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon;$       ano / ne

- 5 Nalezněte předpis pro tečnou rovinu ke grafu funkce

$$f(x, y) = xy^2 + \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} + y \right) - \ln(8)$$

v bodě  $(x_0, y_0) = (4, 3)$ .

- 6 Sestavte diferenciální rovnici, jejíž prostor všech řešení je tvaru

$$\{ \alpha x + \beta x^2 + x^3 : (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \}.$$

Jakého typu je nalezená rovnice?

7 Vyslovte Abelovo kritérium.

8 Jak se nazývá věta, která prokazuje, že má-li lineární diferenciální rovnice pravou stranu složenou ze dvou komponent, pak je možné hledat partikulární řešení odděleně pro každou komponentu a oba nalezené výsledky poté sečíst? Svou odpověď **napište přímo zde**:

9 Pouze jediný z předpisů

$$\varrho_A(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - 4y_1| + |x_2 - 4y_2|,$$

$$\varrho_B(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - 4y_2|,$$

$$\varrho_C(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + 4|x_2 - y_2|,$$

$$\varrho_D(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - 4y_1|, |x_2 - 4y_2|\},$$

$$\varrho_E(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - 4y_2|\},$$

$$\varrho_F(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, 4|x_2 - y_2|\},$$

je vymyšlen tak, že je zároveň metrikou v  $\mathbf{R}^2$  a zároveň má okolí vybraného bodu tvar obdélníku. Který to je? Svou odpověď **napište přímo zde**: