

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 1 z předmětu 01ANB3

9/1/2025, 9:00 — 10:15

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

- 1 Nalezněte diferenciální operátor $\hat{L}$ tak, aby prostor všech řešení rovnice $\hat{L}(y(x)) = q(x)$ byl tvaru

$$\left\{ \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} + \frac{4}{x^2} : (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Jakého typu je nalezený operátor (rovnice)?

- 2 Dokažte srovnávací kritérium pro stejnoměrnou konvergenci. Celé tvrzení nejprve vyslovte.

- 3 Vyslovte definici vnitřního bodu množiny a rozhodněte, zda je některý z bodů $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 2)$ a $\vec{c} = (2, 1)$ vnitřním bodem čtverce $\langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$, je-li metrika zavedena vztahem

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \lceil 4 \cdot |x_1 - y_1| \rceil + |x_2 - y_2|.$$

- 4 Může existovat funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, která je v $\vec{a}$ spojitá, ale nemá v $\vec{a}$ totální diferenciál? Vysvětlete!

- 5 Vysvětlete, proč je v důkazu věty o Taylorových koeficientech nezbytné použít základní větu teorie mocninných řad.

- 6 Nalezněte fundamentální systém rovnice

$$y'x^3 + yx^2 - 2x(x^2y - 1) + 1 = 0.$$

- 7 Nechť $y_1(x), y_1(x), \dots, y_n(x)$ je n lineárně nezávislých řešení diferenciální rovnice $\hat{L}(y(x)) = 0$, která je řádu n . Nechť $z(x)$ je také řešením této rovnice. Dokažte, že za těchto okolností je soubor

$$\{z(x), y_1(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

lineárně závislý.

- 8 Vyslovte definici Hilbertova prostoru a v ní použitý klíčový pojem vysvětlete.

- 9 Nalezněte předpis pro tečnou nadrovinu ke grafu funkce

$$g(x, y, z) = xy^2 + \sqrt{2} \arctg \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right) - y^2 - z$$

v bodě $(x_0, y_0, z_0) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 2 z předmětu 01ANB3

22/1/2025, 9:00 — 10:15

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

① Vymyslete vlastní příklad homogenní diferenciální rovnice, která má stupeň homogenity rovný třem. Rovnici neřešte!

② Následující výrok přepište do jednoduchého (a minimalistického) tvaru.

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{g(1 - 2c, 3 - 4c, 4c) - g(1, 3, 0)}{c} = 5.$$

③ Nechť je na prostoru $\mathbf{R}^2$ definována metrika $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) := \lceil |x_1 - y_1| \rceil + 2 \cdot |x_2 - y_2|$. Rozhodněte, která z posloupností $\vec{a}_n = (1/n, -1/n)$, $\vec{b}_n = (1/n, 0)$, $\vec{c}_n = (0, -1/n)$ v tomto prostoru konverguje. Zdůvodněte.

④ Pokud má platit výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in \langle -1, 1 \rangle)(\forall n > m) : \left| \sum_{i=1}^n g_i(x) - e^{-2x} \right| < \varepsilon,$$

čemu se musí rovnat $g_i(x)$, má-li to být polynom?

⑤ Které z následujících výroků (o spojitě funkci více proměnných $g : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$) jsou pravdivé?

- A: Obrazem otevřené množiny $A \subset \mathbf{R}^r$ je vždy opět otevřená množina.
- B: Funkce má totální diferenciál ve všech bodech $\mathbf{R}^r$.
- C: Funkce má gradient ve všech bodech $\mathbf{R}^r$.
- D: Funkce má limitu ve všech bodech $\mathbf{R}^r$.
- E: Obrazem kompaktní množiny $A \subset \mathbf{R}^r$ je vždy opět kompaktní množina.

Odpovědi na tuto úlohu (ve tvaru ANO/NE) vepište přímo za výroky A-E zde na zadání.

⑥ Nechť je dána funkce

$$g(x, y) = \frac{xy - 2x + y - 2}{x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5}.$$

Najděte bod její nespojitosti a poté sestrojte posloupnost bodů, která k tomuto bodu konverguje a pro kterou konverguje posloupnost příslušných funkčních hodnot k číslu $\frac{4}{17}$. Naleznete alespoň dvě řešení.

⑦ Oborem konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ je interval $\langle \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \rangle$. Jaký poloměr konvergence má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^3}{a_{n+1}} x^n?$$

⑧ Rozhodněte, zda předpis $|x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$ splňuje axiomy normy na $\mathbf{R}^3$.

⑨ Diferenciální rovnici $y''' + s(x)y'' + r(x)y' + t(x)y = q(x)$ řeší všechny funkce tvaru $y(x) = \alpha x e^{-2x} + x^3 e^x + x^2$ pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$. Jakou substituci použijete ke snížení řádu zadané rovnice?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 3 z předmětu 01ANB3

30/1/2025, 9:00 — 10:15

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

- 1 Oborem konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ je interval $(\frac{17}{9}, \frac{19}{9})$. Jaký poloměr konvergence má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}^2} x^n?$$

- 2 Hilbertův prostor $\mathbf{R}^3$ je zadán skalárním součinem

$$(y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 4 & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Jaké hodnoty musejí mít parametry α, β a γ , aby bod $(2, -1, 2)$ byl hraničním bodem okolí $\mathcal{U}_{\sqrt{8}}(1, 1, 1)$? Najděte všechny přípustné kombinace.

- 3 Má-li být rovnost

$$(x^2 - 3y^2)^2 - 5x + y = 7$$

formálním řešením diferenciální rovnice, jaký konkrétní tvar musí tato rovnice mít?

- 4 Za jakých podmínek lze ve výrazu $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ zaměnit pořadí operací?

- 5 Dokažte, že Cachyova úloha pro rovnici $\hat{L}(y(x)) = q(x)$ nemůže mít dvě různá řešení.

- 6 Nalezněte směrovou derivaci funkce $g(x, y, z) = x^2 + 3yz^2 - 4xz + 11$ v bodě $\vec{d} = (1, 1, 1)$ ve směru $\vec{s} = (1, -2, 2)$

- 7 Zkonstruujte Taylorovu řadu funkce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

v bodě $x_0 = 2$. Obor její konvergence nevyšetřujte.

- 8 Podle definice ukažte, že množina $A = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle \setminus \{(0, 0)\}$ není v Euklidovském prostoru $\mathbf{E}^2$ kompaktní.

- 9 Ukažte, že jsou-li dva vektory lineárně závislé, pak pro ně ve Schwarzově-Cauchyově-Buňakovského nerovnosti platí rovnost.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 4 z předmětu 01ANB3

4/2/2025, 9:00 — 10:15

Všechny úlohy jsou dvoubodové.

Celkové hodnocení: $\langle 17, 18 \rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17 \rangle \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16 \rangle \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15 \rangle \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14 \rangle \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12 \rangle \mapsto \mathbf{F}$;

1 Ukažte, že v Hilbertově prostoru funkcí lze na základě známých hodnot $\langle f|f \rangle$, $\langle g|g \rangle$, a $\langle g|f \rangle$ jednoznačně určit vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a také úhel, který tyto funkce svírají. Oba údaje vypočítejte pro hodnoty

$$\langle f|f \rangle = 25, \quad \langle g|g \rangle = 4, \quad \langle g|f \rangle = 4 - 3i.$$

2 Nechť je dán prostor $\mathbf{R}^2$ s metrikou

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \lceil |x_1 - y_1| \rceil + 7|x_2 - y_2|$$

a množina $A = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : |a| + |b| \leq 1\}$. Najděte všechny izolované body této množiny.

3 Dokažte:

$$f(x), g(x) \in \Omega_q \quad \Rightarrow \quad f(x) - g(x) \in \Omega_0.$$

4 Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 2025 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

nalezněte posloupnost $(\vec{a}_n)_{n=1}^\infty$, která konverguje k nulovému vektoru, a pro níž je limitou funkčních hodnot $g(\vec{a}_n)$ číslo $-2/5$.

5 Rozhodněte, zda je Weierstrassovo kritérium účinným nástrojem při vyšetřování stejnoměrné konvergence řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x}{x^2 + k^2}$$

6 Ve kterém bodě je tečná rovina ke grafu funkce

$$g(x, y, z) = x^4 + (y + z^2)^2$$

rovnoběžná s rovinou $4x - 2y - 8z - u = 0$?

7 Je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou generovanou pomocí normy a v něm množina $D \subset \mathbf{R}^r$ a bod $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$. Jakou vlastnost bodu $\vec{a}$ popisuje následující výrok?

$$(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^r) : \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \vec{x} \in D.$$

Otoč! →

8 Dokažte, že funkce

$$H(x, y) = \int_{\alpha}^x f(s, y) \, ds + \int_{\beta}^y g(\alpha, t) \, dt$$

reprezentuje formální řešení exaktní diferenciální rovnice $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$. V důkaze ukažte na místo, kde se využívá podmínky exaktnosti, tj. definice exaktní diferenciální rovnice.

9 Na příkladě nekompaktní množiny

$$B = \langle -2, 2 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle \setminus \{(1, 1)\}$$

demonstrujte smysl definice kompaktnosti, tj. podle definice ukažte, že B není kompaktní v $\mathbb{E}^2$.