Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zkoušková práce č. 1 z předmětu 01ANB3

14. ledna 2026, 13:00 — 14:40

1 (8 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu:

$$y'' - 5\frac{y'}{x} + 5\frac{y}{x^2} = \frac{16}{x},\ y(1) = 8,\ y'(1) = -4.$$

2 (4 body)
Definujte vlastní metriku na $\mathbf{R}^2$ tak, aby množina na zadní straně zadání byla okolím bodu $(3,0)$ o poloměru $\varepsilon = 12$. Pro tuto metriku dále rozhodněte, je-li posloupnost

$$\vec{x_n} = \left(\frac{1+n^4}{n^4}, \frac{6n^4+16}{3n^4}\right)$$

konvergentní.

3 (8 bodů)
Vypočtěte

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty x\mathrm{e}^{-n^4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Užijte faktu, že $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Neopomeňte diskutovat oprávněnost všech operací.

4 (4 body)
Určete obě signatury třídimenzionální kvadriky $Q(x,y,z) = 2x(y+z+2) = 0$.

5 (8 bodů)
Řešte rovnice

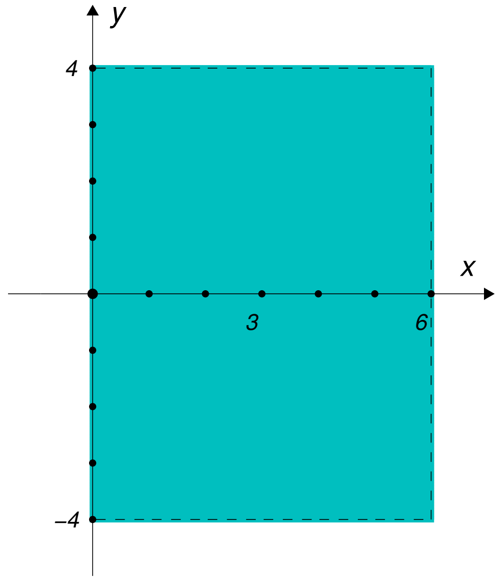
$$x^2y'' + (2x^2 - 4x)y' + (6-4x)y = 6\mathrm{e}^{-2x}x^4, \quad y''' = 0.$$

Užijte faktu, že operátory obou rovnic mají neprádný průnik svých jader.

6 (8 bodů)
Rozhodněte, zda řada funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(3n)!!!}{(3n+1)!!!}\frac{x^2}{\sqrt{2x^6+n^6}}$$

konverguje na $\mathbf{R}$ stejnoměrně. Podrobně komentujte!


y
4
x
3
6
−4

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zkoušková práce č. 2 z předmětu 01ANB3

14. ledna 2026, 13:00 — 14:40

1 (8 bodů)
V Hilbertově prostoru jistých funkcí definovaných na $(0,+\infty)$ je zadán skalární součin prostřednictvím vztahu

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Rozhodněte, zda posloupnost $(\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x})_{n=1}^\infty$ je v tomto prostoru konvergentní.

2 (9 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!}\frac{x^2}{\sqrt{2x^6+n^6}}$$

na množině $\mathbf{R}$.

3 (4 body)
Nechť je v Hilbertově prostoru $\mathbf{R}^2$ zadán skalární součin předpisem

$$\vec{x}^\mathrm{T}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\vec{y}.$$

Jaký úhel (ve stupních) svírají vektory $\vec{u}=(3,4)$ a $\vec{v}=(0,-1)$?

4 (5 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$y''' + 8y = 8.$$

5 (7 bodů)
Rozhodněte, zda řada v níže uvedeném vztahu konverguje na $\langle 0,+\infty)$ stejnoměrně a poté vypočítejte

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(4n)!!!!}\,\mathrm{d}x.$$

6 (7 bodů)
Pro funkci

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2x^2}{(y^2+x^2)^{3/2}}+2x+3y+1 & \ldots (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \ldots (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

vypočítejte směrovou derivaci ve směru $\vec{s}=(1,1)$ v bodě $(0,0)$ a hodnotu

$$\frac{\langle \vec{s}\,|\,\mathrm{grad}\,g(0,0)\rangle}{\|\vec{s}\|}$$

a diskutujte vztah mezi oběma výsledky. Jaký fakt z něho vyplývá?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zkoušková práce č. 3 z předmětu 01ANB3

27. ledna 2026, 13:00 — 14:40

1 (8 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{(2n)!!}\, x^n (1-2x)^n$$

na množině $M = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Důkladně vysvětlete.

2 (7 bodů)
Pro trojrozměrnou kvadratickou plochu

$$-3 + x^2 + 2y - 4xy + 5y^2 + 4z + 2xz + 2yz + 10z^2 = 0$$

určete název, hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a střed.

3 (8 bodů)
Nechť je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2(x-3)^2}{\sqrt{y^2+(x-3)^2}} - x + 3y + 7 & \dots\ (x,y) \neq (3,0), \\ 4 & \dots\ (x,y) = (3,0). \end{cases}$$

Nalezněte všechny přímky, vzhledem k nimž je tato funkce spojitá v bodě $(3,0)$. Dále vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3,0)$ pro $\vec{s} = (2,1)$.

4 (8 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 6x^2 \mathrm{e}^{2x}.$$

Užijte faktu, že vektorový prostor

$$V = \{y(x) \in C^3(\mathbf{R}) :\ xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 0 \ \wedge\ y''' - 4y'' + 4y' = 0\}$$

má dimenzi jedna.

5 (4 body)
Pro funkce $f(x)$, $g(x)$ z Hilbertova prostoru platí vztahy:

$$\langle f|g\rangle = 3 - 3\mathtt{i}, \quad \|f\| = 2\sqrt{2}, \quad \langle g|g\rangle = 3.$$

Leží funkce $g(x)$ v okolí funkce $f(x)$ o poloměru $\varepsilon = \sqrt{5}$? A jaký svírají úhel?

6 (5 bodů)
Najděte partikulární řešení rovnice $y''' - 4y'' + 4y' = 48\mathrm{e}^{2x}$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zkoušková práce č. 5 z předmětu 01ANB3

9. února 2026, 13:00 — 14:40

1 (7 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+4y}}$$

a určete její definiční obor.

2 (6 bodů)
V Hilbertově prostoru $H = [x, x^2, x^3]_\lambda$ je skalární součin zaveden předpisem

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nalezněte všechny funkce z prostoru H, které jsou současně kolmé k funkcím $f(x) = x + x^3$ a $g(x) = x - x^3$ a jejich norma je rovna $\sqrt{10}$.

3 (7 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 3y' - 2y = 6\mathrm{e}^{-x} - 4x\mathrm{e}^{x}.$$

4 (7 bodů)
Rozhodněte, zda funkční řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n \cdot n!}{(3n+1)!!!} \sqrt{\frac{x}{x^5+4n^5}}$$

konverguje stejnoměrně na množině $G = (0, +\infty)$.

5 (9 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$\frac{y'}{4} = \frac{2-x-y}{19+4x+13y}$$

procházející bodem $(x_0, y_0) = (7, -5)$. Určete, jakou křivku představuje a najděte její střed.

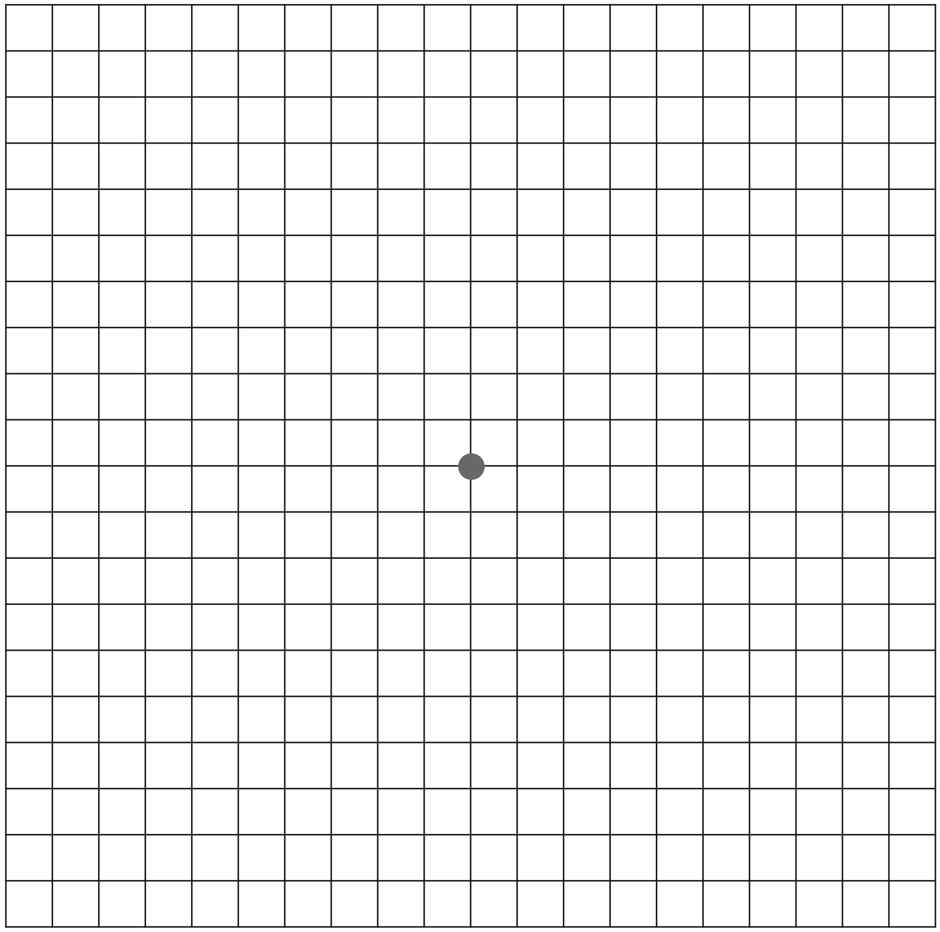
6 (4 body)
Do obrázku na zadní straně vykreslete okolí bodu $\vec{a} = (0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 9$, je-li metrika zadána předpisem

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + 3\lceil |x_2 - y_2| \rceil.$$

6 (4 body)

Do přiloženého obrázku vykreslete okolí bodu $\vec{a} = (0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 9$, je-li metrika zadána předpisem

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + 3\lceil |x_2 - y_2| \rceil.$$



Nezapomeňte popsat měřítko na obou osách a zřetelně odlišit, kde je hranice hledaného okolí otevřená a kde uzavřená.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zkoušková práce č. 6 z předmětu 01ANB3

9. března 2026, 8:00 — 9:40

1 (6 bodů)
Nechť $a > 0$ je zvoleno libovolně. Na funkcionálním Hilbertově prostoru je zadán skalární součin předpisem

$$\langle f|g\rangle := \int_0^\infty x^2 f(x)g(x)\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x.$$

Vypočtěte úhel, který v tomto prostoru svírají funkce $h(x) = -4$ a $\ell(x) = x$. Lze užít vztahu

$$\int_0^{+\infty} y^m \mathrm{e}^{-ay}\,\mathrm{d}y = \frac{m!}{a^{m+1}}.$$

2 (10 bodů)
Formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{2y(x+2y)}{x^2 - 8y^2}, \quad y(-2) = 1$$

reprezentuje jistou kuželosečku. Zjistěte jakou a určete její střed, pokud ho má. Lineární řešení nehledejte.

3 (7 bodů)
Pro která $\mu \in \mathbf{R}$ je kvadratická forma

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} \mu & 3 & 3 \\ 3 & \mu & 3 \\ 3 & 3 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

semidefinitní? Stanovte, zda pozitivně či negativně. Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují!

4 (3 body)
V jakém tvaru budete předpokládat partikulární řešení rovnice

$$y''' + y'' - y' - y = 7x^3\mathrm{e}^{-x}\,?$$

5 (9 bodů)
Sestavte Taylorovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{7+x}}$$

v bodě $x = 9$. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály. Určete také obor konvergence vypočtené řady.

6 (5 bodů)
Najděte součtovou funkci řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$ a její definiční obor.