Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze

Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	CELKEM

Zkouškový test č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4

30. května 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

1. Vysvětlete, co jsou soustavy $\mathscr{H}_r$ a $\mathscr{S}_r$ a dokažte, že jedna z nich je podmnožinou druhé.

2. Je jednodimenzionální míra $\mu(X)$ zadaná vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \frac{3x|x|}{x^2+4}$$

konečná, případně $\sigma-$konečná?

3. Vysvětlete, jak se vypočítává dolní integrální součet pro Riemannův integrál.

4. Vyslovte Greenovu větu a všechny pojmy v ní korektně definujte.

5. Funkce $y = y(x, z)$ je zadána implicitně rovnicí $y^3 - 2zy^2 + 3x = 12$. Vypočítejte $\frac{\partial y}{\partial z}(4, 3)$.

6. Jaká informace o bodu $\vec{a}$ lze vyvodit z následujících indicií?

$$\mathrm{grad} g(\vec{a}) = \vec{0} \wedge (\forall \delta > 0)\,(\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a}))\ :\qquad g(\vec{x}_1) > g(\vec{a}) > g(\vec{x}_2).$$

7. Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Ve formátu $\vec{\varphi}(\tau) : \langle \alpha, \beta\rangle \mapsto \mathbf{R}^n$ zapište křivkovou parametrizaci úhlopříčky kvádru

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| \leqslant a \wedge |y| \leqslant b \wedge |z| \leqslant c\}.$$

Neopomeňte explicitně zapsat, co je $\alpha, \beta, n, \vec{\varphi}$.

8. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí výroky $\mathrm{e}^{-x^2} \in \mathscr{L}(\mathbf{R}, \mu)$, $\mathrm{e}^{-x^2} \in \mathscr{L}^\star(\mathbf{R}, \mu)$, je-li míra $\mu(X)$ zadána vytvořující funkcí $\varphi(x) = \Theta(x)x^2$.

9. Jak se definuje rotace vektorové funkce? Má každá vektorová funkce rotaci nebo ne?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 2 z předmětu 01ANB4/01MAB4

8. června 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

1 Nechť $\mathscr{A}$ je soustava všech konečněprvkových podmnožin množiny přirozených čísel. Rozhodněte, zda se jedná o polookruh, okruh či algebru. Své odpovědi vysvětlete!

2 Dokončete implikaci

$$f(\vec{x}) \in C^1(\mathbf{R}^3) \wedge \exists \delta > 0\Big(0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow f(\vec{a}) - f(\vec{x}) < 0\Big) \qquad \Rightarrow \qquad ???$$

3 Zapište křivkovou parametrizaci křivky

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \geqslant 0 \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \sqrt{\frac{z}{c}} = 0\right\}.$$

4 Vysvětlete, jak a za jakých podmínek lze skládat dva funkční vektory.

5 Nechť $a \in \mathbf{R}$ je pevně zvolené číslo. Podle definice ukažte, že otevřený interval $I = \langle a, +\infty)$ patří do $\mathscr{S}_1$ a poté vyčíslete jeho míru $\mu_\sigma(I)$ pomocí vytvořující funkce míry $\varphi(x)$.

6 Funkce $G(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ má gradient v bodě (x_0, y_0, z_0) rovný vektoru $(8, -4, 4)$. Hessova matice ve stejném bodě má podobu

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 20 \\ 8 & 0 & -4 \\ 20 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ zadána implicitně rovnicí $G(x, y, z) = 0$ a nechť $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Čemu se rovná

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)?$$

7 Vypočtěte

$$\int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \,\mathrm{d}(x, y).$$

8 Zapište tvar cylindrických souřadnic v $\mathbf{R}^3$ a vyčíslete jejich jacobián.

9 Kdy řekneme, že plocha $S \subset \mathbf{R}^3$ je jednoduchá?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 3 z předmětu 01ANB4/01MAB4

14. června 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

1. Řekněte, co znamená, že míra je $\sigma-$ konečná.

2. Zapište definici plošné parametrizace a poté ji použijte na sestavení parametrizace eliptického válce

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1\right\}.$$

3. Prověřte předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem pro případ integrálu

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^3} \sin^2(\alpha x)\, \mathrm{d}x.$$

4. Nalezněte alespoň jeden kritický generující bod pro implicitní funkci $z = z(x, y)$, která je zadána prostřednictvím rovnice

$$x^2 + 4(y + z)^2 + 4y = 8.$$

Pozn. Je třeba nalézt konkrétní bod, tedy nikoli nějaký bod s obecnými souřadnicemi.

5. Jakou plošnou míru má kruh o poloměru R centrovaný do počátku souřadné soustavy, je-li míra generována vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = 5x + 3$ a $\psi(y) = y^3$?

6. Jaký útvar (geometricky) představuje nosič funkce $g(x, y) = \Theta(1 - x^2 - y^2)\, xy$? Načrtněte.

7. Předpokládejte, že je již definován Riemannův integrál přes interval. Jakým způsobem se definuje Riemannův integrál přes obecnou množinu? Neopomeňte na předpoklady. Lze takto integrovat přes libovolnou množinu?

8. Co nejčistším matematickým zápisem (v symbolech, tj. beze slov) zapište, co znamená, řekneme-li, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ jsou $\mu-$ekvivalentní.

9. Nechť je dána funkce $g(\vec{x}) : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ tří proměnných. Co je třeba doplnit na čtyři prázdná místa ve výraze

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial \square}(\vec{a} + \tau \square) - \frac{\partial g}{\partial \square}(\square)}{\tau},$$

aby tento výraz reprezentoval prostřední prvek Hessovy matice funkce $g(\vec{x})$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze									
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9

CELKEM

Zkouškový test č. 4 z předmětu 01ANB4/01MAB4

20. června 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

1 Co přesně znamená výrok, že plocha $S \subset \mathbf{R}^3$ je hladká regulární?

2 Kdy řekneme, že zobrazení $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$ je prosté na množině $Q \subset \mathbf{R}^r$? Vyžaduje se precizní matematická definice.

3 Doplňte (nejkratším možným zápisem) následující implikaci:

$$A \subset \mathbf{R} \wedge f(\vec{x}) \in C(\mathbf{R}^r) \wedge B = f^{-1}(A) \wedge (\forall a \in A)(\exists \varkappa > 0)(|z-a| < \varkappa \Rightarrow z \in A) \quad \Rightarrow \quad B =$$

Vaši odpověd zapište přímo do tohoto zadání.

4 Zapište, jakým způsobem (a za jakých předpokladů) lze vyčíslit abstraktní Lebesgueův integrál $\int_B f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ prostřednictvím integrálu přes klasickou Lebesgueovu míru $\lambda(X)$?

5 Označme symbolem A množinu všech analytických funkcí a symbolem B množinu všech hladkých funkcí, tj. $B = C^\infty(\mathbf{R}^r)$. Který z následujících výroků je pravdivý. Vaše odpovědi zapište přímo do tohoto zadání.

- $g(\vec{x}) \in A \quad \Rightarrow \quad g(\vec{x}) \in B$;
- $g(\vec{x}) \in B \quad \Rightarrow \quad g(\vec{x}) \in A$;
- $g(\vec{x}) \in A \quad \Leftrightarrow \quad g(\vec{x}) \in B$;
- $A \cap B = \emptyset$.

6 Vyslovte definici křivkového integrálu druhého druhu.

7 Vypočítejte směrovou derivaci funkce $x = x(y, z)$ ve směru $(-1, 1)$ v bodě $(y_0, z_0) = (-3, 0)$. Funkce $x = x(y, z)$ nechť je zadána rovnicí

$$x^3 - 3x^2 z - y^2 - z^2 + 10 = 0.$$

8 Vyslovte přesné znění nutné podmínky pro lokální extrém funkce více proměnných a na příkladě funkce $h(x, y) = (x-2)^3 + (y+1)^2$ ukažte, jak tuto větu aplikovat.

9 Co je norma dělení dvojrozměrného intervalu $J = \langle \alpha_1, \beta_1\rangle \times \alpha_2, \beta_2\rangle$?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 5 z předmětu 01ANB4/01MAB4

26. června 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17,18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16,17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15,16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14,15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12,14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0,12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Parametrizujte křivku

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \wedge z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right\}$$

a poté rozhodněte, zda je uzavřená.

❷ Vyslovte postačující podmínku pro lokální extrém.

❸ Vyslovte přesné znění Lebesgueovy věty o integrabilní majorantě a na příkladě výrazu

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x \left(\frac{n}{n+1}\right)^x \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

ukažte, co je onou integrabilní majorantou. Zdůvodněte!

❹ Jaké integrály (typově) mezi sebou převádí Stokesova věta?

❺❻ Určete objem koule o poloměru R při míře, která je generovaná vytvořující funkcí $\varphi(\tau) = \tau^3$.

❼ Popište třetí (poslední) krok Lebesgueova integrálu a pokuste se pomocí něho vyčíslit integrál $\int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

❽ Jakou vlastnost musí splňovat funkce a jakou množina, abychom měli stoprocentní jistotu, že funkce bude mít na tého množině globální maximum?

❾ Nechť je dán bod $\vec{\lambda} = (a,b,c)$ a generující funkce $H(x,y,z)$, pro níž platí, že $\operatorname{grad} H(\vec{\lambda}) = (6,-3,3)$ a Hessova matice $\mathbb{H}(\vec{\lambda})$ má všechny prvky rovné číslu 2. Rovnice $H(x,y,z) = 0$ nechť zadává implicitní funkci $z = z(x,y)$. Jakou hodnotu má

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(a,b)?$$

Poznámka k hodnocení: ❺ Hodnotí se správné sestavení integrálu. ❻ Hodnotí se správnost číselného výsledku.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 6 z předmětu 01ANB4/01MAB4

12. července 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Ukažte, jak lze dokázat, že jednodimenzionální klasická Lebesgueova míra jednoprvkové množiny je nula.

❷ Vyslovte a dokažte základní větu o měřitelnosti funkce..

❸ Sestavte integrál, který reprezentuje výpočet plošného integrálu z funkce $e^{-x^2-y^2-z^2}$ přes rovinu

$$3x - 2y + z = 5.$$

Hodnotu integrálu nevyčíslujte.

❹ Vyslovte větu o polynomické aproximaci funkce více proměnných.

❺ Rozhodněte, které z výroků

- $x \in \mathscr{L}(\mathbf{R}, \lambda)$,
- $x \in \mathscr{L}^\star(\mathbf{R}, \lambda)$,
- $x^2 \in \mathscr{L}(\mathbf{R}, \lambda)$,
- $x^2 \in \mathscr{L}^\star(\mathbf{R}, \lambda)$

jsou pravdivé a které ne.

❻ Co musí splňovat bod $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$, aby byl kritickým bodem při pokusu konstruovat implicitní funkce z dvojice generujících rovnic

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \qquad H(x, y, z, u, v) = 0\,?$$

❼ Vyslovte a dokažte větu o aditivitě Riemannova integrálu v mezích.

❽ Kdy řekneme, že je soustava množin polookruhem?

❾ O čem pojednává tzv. integrální formule pro Lebesgueovu míru?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze										CELKEM
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zkouškový test č. 7 z předmětu 01ANB4/01MAB4

28. srpna 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

1 Funkce $g(x,y) = xy^3$ má v bodě $(x,y) = (0,0)$ zcela jistě totální diferencál. Čemu konkrétně se rovná výraz

$$\frac{\eta(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}$$

z definice totálního diferenciálu? Ve výrazu musejí být všechny operace/symboly rozepsány pouze pomocí elementárních matematických operací.

2 Sestavte plošnou parametrizaci eliptického paraboloidu

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{25} - 2y + \frac{z^2}{16} = 0\right\}.$$

3 Co musí splňovat bod $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$, aby byl kritickým bodem při pokusu konstruovat implicitní funkce z trojice generujících rovnic

$$F(x,y,z,u,v) = 0, \qquad G(x,y,z,u,v) = 0\,, \qquad H(x,y,z,u,v) = 0\,?$$

Sami si zvolte, která z písmenek budou reprezentovat implicitní funkce a která jejich proměnné.

4 Ukažte, že zobrazení $(r,s) = (x^2 - y^2; xy)$ je regulární na $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0]\}$, ale není prosté.

5 Kdy řekneme, že množina $C \subset \mathbf{R}^r$ je hladkou regulární křivkou?

6 Rozhodněte (a zdůvodněte), zda je množinová soustava

$$\mathscr{B} = \{A \subset \mathbf{R}^2 : A \text{ je oblast}\}$$

okruhem.

7 Nekonečně diferencovatelná funkce má v bodě $\vec{a}$ všechny složky gradientu nulové a její Hessova matice má tvar

$$\mathbb{H}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jaký závěr o bodu $\vec{a}$ lze z těchto indicií udělat?

8 Vyslovte větu o monotonii Lebesgueova integrálu.

9 Předchozí větu dokažte.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze									
Jméno a příjmení studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9

CELKEM

Zkouškový test č. 8 z předmětu 01ANB4/01MAB4

14. září 2023, 9:15 — 10:30

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Hessova matice analytické funkce $f(x,y,z)$ ve stacionárním bodě $\vec{a} = (1,-3,2)$ je tvaru

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zapište její Taylorův polynom druhého řádu. Užijte také faktu, že její graf prochází bodem $(1,-3,2,7)$.

❷ V definici měřitelnosti funkce $f(\vec{x})$ se testuje,

- A: zda je definiční obor funkce měřitelnou množinou;
- B: zda je obor hodnot měřitelnou množinou;
- C: zda je vzor množiny $(\alpha, +\infty)$ měřitelnou množinou (rozumí se pro všechny α);
- D: zda je funkce $f(\vec{x})$ finitní;
- E: zda je množina $(\alpha, +\infty)$ měřitelná (rozumí se pro všechny α);

Která z odpovědí je správná? Zakroužkujte ji zde v zadání.

❸ Je bod $\vec{a}$ z úlohy ❶ bodem ostého lokálního extrému? Podrobně vysvětlete.

❹ Rozhodněte, zda je množinová soustava

$$\mathscr{A} = \Big\{\emptyset; \{\square\}; \{\ominus\}; \{\heartsuit, \triangle\}; \{\square, \heartsuit, \triangle\}; \{\ominus, \square, \heartsuit, \triangle)\Big\}$$

okruhem, resp. polookruhem.

❺ U integrálu $\int_0^\infty x^2 \sin(ax) \mathrm{e}^{-x^4}\, \mathrm{d}x$ nalezněte integrabilní majorantu, o níž pojednává věta o derivaci integrálu podle parametru, Integrabilitu potvrďte výpočtem.

❻ Za jakých podmínek platí rovnost

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{r} s_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{a})\,?$$

❼ Zapište plošnou parametrizaci horní poloviny jednodílného eliptického hyperboloidu

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z \geqslant 0 \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

Neopomeňte určit její definiční obor.

Další úlohy ❽❾ jsou na druhé straně tohoto zadání!

❽ Předpokládejte, že je již zaveden Riemannův integrál přes uzavřený interval $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Jakým způsobem se pak zavádí Riemannův integrál přes obecnou množinu $A \subset \mathbf{R}^2$. Jakou vlastnost musí mí množina A?

❾ Jakou podmínku musí splňovat bod (x_0, y_0, z_0, u_0), aby byl kritickým bodem při pokusu konstruovat implicitní funkce z trojice generujících rovnic

$$F(x, y, z, u) = 0, \qquad G(x, y, z, u) = 0\,?$$

Sami si zvolte, která z písmenek budou reprezentovat implicitní funkce a která jejich proměnné.