Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 01

pondělí 30. května 2022, 9:30–11:30

1 (9 bodů)
Burgersovu nelineární parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu(x,\tau)\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mathtt{D}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$$

upravte na lineární verzi.

2 (9 bodů)
Nechť model TASEP (s obecným počtem buněk) splňuje podmínku komutativity. Jakou maximální hodnotu může nabýt pravděpodobnost, že poslední trojice buněk bude obsazená a čtvrtá buňka od konce bude volná? Při jaké volbě parametrů α, β toto maximum nastane? Zapište také, jaký má zkoumaná konfigurace konfigurační kód.

3 (9 bodů)
Představte a řešte model Louise A. Pipese a Elliotta W. Montrolla z let 1967–1969. V rámci řešení ukažte, jak lze matematickými úpravami dospět ke Greenbergově makroskopické závislosti (publikované o třicet let dříve) mezi intenzitou a hustotou. Ukažte, jak se na základě empirických dat kalibrují konstanty, které vystupují ve finálním vztahu.

4 (6 bodů)
Představte koncept repulzivní dopravní síly (a k ní příslušného potenciálu), tj. definujte obecné matematické vlastnosti repulzivní síly, představte tabulku nejčastěji diskutovaných potenciálů a k ní doplňte, jakého typu (z jaké distribuční rodiny) je distribuce světlostí v termodynamickém plynu. Proč je třeba ve vašich úvahách uvažovat krátkodosahovou verzi plynu?

5 (9 bodů)
V termodynamickém plynu o rezistivitě $\beta = 1$ je vzájemná interakce mezi sousedními částicemi popsána repuzivní silou

$$F(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}.$$

Vypočítejte statistické rozdělení rozestupů mezi třemi sousedními částicemi. Distribuci není třeba normovat ani škálovat, tj. počítejte s libovolně označenou normalizační a škálovací konstantou.

6 (8 bodů)
Analýzou dopravních dat byly zjištěny následující momenty časové světlosti:

$$\mu_k = \frac{1}{2}(2k+2)!!.$$

Jaká je příslušná hustota pravděpodobnosti pro časovou světlost? Užijte faktu, že příslušný Laplaceův obraz a jeho derivace úzce souvisejí s velikostí momentů hledané hustoty.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 02

pondělí 13. června 2022, 9:30–11:30

1 (6 bodů)

Nechť je fundamentální závislost dopravního proudění popsána rovností

$$I = 3200 - 3200\left(\frac{\varrho}{40} - 1\right)^2.$$

Jakou rychlostí se pohybuje dopravní vzorek, jehož rychlost kinematického vlnění je rovna -20 km/h?

2 (11 bodů)

Na základě znalosti distribuce prostorových světlostí a užitím faktu, že rychlosti vozidel jsou rozděleny normálně odvoďte statistické rozdělení časových odstupů mezi sousedními vozidly. Výsledek upravte do tvaru řady a určete v něm hlavní člen. Dále dokažte, že zbylé členy lze v rozvoji chápat jako členy poruchové, tj. členy, jež se při normalizaci neprojevují. Nápověda:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}}\int_{\mathbf{R}} x^m\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{m!\,\alpha^m}{m!!} \quad (m \text{ sudé}).$$

3 (9 bodů)

Představte a řešte model Louise A. Pipese a Elliotta W. Montrolla z let 1967–1969. V rámci řešení ukažte, jak lze matematickými úpravami dospět ke Greenbergově makroskopické závislosti (publikované o třicet let dříve) mezi intenzitou a hustotou. Ukažte, jak se na základě empirických dat kalibrují konstanty, které vystupují ve finálním vztahu.

4 (8 bodů)

Aplikací tzv. vyhlazeného počtu částic odvoďte (ze známých poznatků z matematické analýzy) rovnici kontinuity pro dopravní proudění. Na základě jejího tvaru poté ukažte, že empirickou interpretací rovnice kontinuity je zákon zachování počtu vozidel.

5 (9 bodů)

Představte základní koncept termodynamického dopravního plynu a jeho fyzikálně-matematický popis. Neopomeňte vysvětlit, co je dosah a homogenita/heterogenita potenciálu, stochastická rezistivita, a také jakého tvaru je sdružená hustota pravděpodobnosti pro kompletní vektor mikroveličin.

6 (7 bodů)

Nechť je dán model TASEP o velkém sudém počtu buněk s hodnotami parametrů $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta > \frac{1}{2}$. Existují dvě konfigurace systému (detekované v ustáleném stavu), v nichž model nabude střídavého uspořádání mezer a obsazených buněk? Poměr pravděpodobností těchto konfigurací je $8/5$. Čemu se rovná β?

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \alpha$	$\frac{\alpha\,\alpha}{\sqrt{\pi}\,(\alpha-\alpha)}\left(\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2}-\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2}\right)\frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \alpha$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)^3}\,\frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \alpha$	$\frac{2\,\alpha}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)}\,\frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \alpha = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \alpha$	$\frac{\alpha\,(1-2\,\alpha)}{(\alpha-\alpha)\,(1-\alpha)}\,\frac{1}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \alpha < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\,\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\,\frac{N}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \alpha$	$\frac{1}{(\alpha\alpha)^N}$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 03

úterý 12. července 2022, 9:30–11:30

1 (8 bodů)
Nechť je dán model TASEP o velkém sudém počtu buněk s hodnotami parametrů $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta > \frac{1}{2}$. Existují dvě konfigurace systému (detekované v ustáleném stavu), v nichž model nabude střídavého uspořádání mezer a obsazených buněk. Poměr pravděpodobností těchto konfigurací je $8/5$. Čemu se rovná β? (viz také tabulka na druhé straně zadání)

2 (8 bodů)
Pro která α má částicový systém s generátorem

$$g(x) = \Theta(x)\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

kompresibilitu větší než jedna? A jakému potenciálu v termodynamickém plynu nalezené hodnoty α odpovídají? Co je na tomto potenciálu nejvíce překvapivé? Neopomeňte, že kompresibilitu je nutné stanovovat pro škálovaný systém!

3 (7 bodů)
Vysvětlete, co se skrývá pod termíny kinematické vlnění a rychlost kinematického vlnění. Načrtněte graf závislosti rychlosti kinematického vlnění na hustotě provozu založený na Greenshieldsových hypotézách.

4 (12 bodů)
Odvoďte statistickou distribuci roztečí v termodynamickém dopravní plynu s hyperbolickým (krátkodosahovým) potenciálem. Užijte k tomu aproximaci integrálu v sedlovém bodě. Jaký typ distribuce je výsledkem? A jakou hodnotu má normalizační konstanta získané distribuce. Nápověda:

$$x^a K_a(x) = 2^{a-1}\int_0^\infty y^{a-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y.$$

5 (9 bodů)
V roce 1971 navrhl Pipes fundamentální závislost ve tvaru

$$V = V_0\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\alpha.$$

Určete, jaké α a jaké V_0 odpovídá dopravním datům, která vykazují následující vlastnosti:

- V okamžiku, kdy tok vozidel nuceně ustal (kvůli vysoké hustotě vozidel), byl průměrný hrubý rozestup mezi vozidly roven $6,666666$ metrů.
- V okamžiku, kdy došlo ke změně trendu v závislosti intenzity na hustotě (tj. narůst přešel v pokles), byla hustota provozu $30\,veh/km$ a intenzita $1536\,veh/h$.

6 (6 bodů)
Vysvětlete, zda (a případně za jakých podmínek) lze dopravní systém pokládat za systém poissonovský. Poissonovský systém také dobře definujte a specifikujte, jaká hustota pravděpodobnosti je generátorem tohoto systému.

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(\beta-\alpha)} \left(\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\,\beta-1)^2}\right) \frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)^3}\ \frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(2\,\beta-1)}\ \frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta\,(1-2\,\alpha)}{(\beta-\alpha)\,(1-\alpha)}\ \frac{1}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\,\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\ \frac{N}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 04

pondělí 22. srpna 2022, 9:30–11:30

1 (8 bodů)
Nechť je dán model TASEP o velkém sudém počtu buněk s hodnotami parametrů $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta > \frac{1}{2}$. Existují dvě konfigurace systému (detekované v ustáleném stavu), v nichž model nabude střídavého uspořádání mezer a obsazených buněk. Poměr pravděpodobností těchto konfigurací je $8/5$. Čemu se rovná β? (viz také tabulka na druhé straně zadání)

2 (6 bodů)
Vysvětlete, zda (a případně za jakých podmínek) lze dopravní systém pokládat za systém poissonovský. Poissonovský systém také dobře definujte a specifikujte, jaká hustota pravděpodobnosti je generátorem tohoto systému.

3 (7 bodů)
Vysvětlete, co se skrývá pod termíny kinematické vlnění a rychlost kinematického vlnění. Načrtněte graf závislosti rychlosti kinematického vlnění na hustotě provozu založený na Greenshieldsových hypotézách.

4 (12 bodů)
Odvoďte statistickou distribuci roztečí v termodynamickém dopravní plynu s obecným krátkodosahovým potenciálem. Užijte k tomu aproximaci integrálu v sedlovém bodě. O jaký typ distribuce se jedná, je-li potenciál zvolen jako hyperbolický? A jakou hodnotu má normalizační konstanta získané distribuce. Nápověda:

$$x^a K_a(x) = 2^{a-1} \int_0^\infty y^{a-1} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y.$$

5 (9 bodů)
V roce 1971 navrhl Pipes fundamentální závislost ve tvaru

$$V = V_0 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\alpha .$$

Určete, jaké α a jaké V_0 odpovídá dopravním datům, která vykazují následující vlastnosti:

- V okamžiku, kdy tok vozidel nuceně ustal (kvůli vysoké hustotě vozidel), byl průměrný hrubý rozestup mezi vozidly roven $6,666666$ metrů.
- V okamžiku, kdy došlo ke změně trendu v závislosti intenzity na hustotě (tj. narůst přešel v pokles), byla hustota provozu $30\,veh/km$ a intenzita $1536\,veh/h$.

6 (8 bodů)
Pro která α má částicový systém s generátorem

$$g(x) = \Theta(x) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

rozptyl **škálovaných** světlostí z intervalu $\left\langle \frac{1}{4}, 1 \right\rangle$?

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(\beta-\alpha)} \left(\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\,\beta-1)^2}\right) \frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)^3}\ \frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(2\,\beta-1)}\ \frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta\,(1-2\,\alpha)}{(\beta-\alpha)\,(1-\alpha)}\ \frac{1}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\,\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\ \frac{N}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$