Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 01

pondělí 13. května 2024, 16:00 — 17:40

Výsledný bodový zisk bude násoben pěti čtvrtinami.

1 (8 bodů)
Ukažte, že hustotní distribuce dopravního proudu zavedená pomocí Borsalinova jádra konverguje (pro zmenšující se délku nosiče) k Diracovým hrábím. Poznámka: Mohou se hodit vztahy na další straně zadání.

2 (8 bodů)
Uvažujme model TASEP o N buňkách splňující podmínku komutativity a jeho konfiguraci

$$\mathcal{T} = (1,1,1,1,1,?,?,?,?,\ldots,?,?,?,?,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0).$$

Pro jaké nastavení parametrů α, β bude pravděpodobnost této konfigurace maximální?

3 (8 bodů)
Z řešení termodynamického dopravního modelu s obecným potenciálem $\varphi(x)$ byl na přednáškách odvozen tvar headway distribuce

$$g(x) = A\mathrm{e}^{-\beta\varphi(x)}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Theta(x).$$

Jakou distribuční třídu obdržíme po dosazení konkrétní síly $F(x) = x^{-2}$? Pro tuto volbu určete tvar škálovací rovnice a rozhodněte, zda je distribuce $g(x)$ balancovaná a zdá má či nemá nezbytné dopravní plató v bodě $x = 0$. Poznámka: Mohou se hodit vztahy na další straně zadání.

4 (8 bodů)
Na základě znalosti distribuce prostorových světlostí a užitím faktu, že rychlosti vozidel jsou rozděleny normálně odvoďte statistické rozdělení časových odstupů mezi sousedními vozidly. Výsledek upravte do tvaru řady a určete v něm hlavní člen. Dále dokažte, že zbylé členy lze v rozvoji chápat jako členy poruchové, tj. členy, jež se při normalizaci neprojevují. Nápověda:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}}\int_{\mathbf{R}}(x-a)^m\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{m!\,b^m}{m!!} \quad (m \text{ sudé}).$$

5 (8 bodů)
V dopravním systému jsou škálované rozestupy mezi sousedními vozidly popsány hustotou pravděpodobnosti

$$g(x) = 4\Theta(x)x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Určete přesný tvar trendové funkce tohoto systému a načrtněte ji v grafu.

$$x^a K_a(x) = 2^{a-1}\int_0^{+\infty} y^{a-1}\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\,\mathsf{e}^{-y}\,\mathsf{d}y, \quad (x>0)$$

$$K_a(x) = K_{-a}(x)$$

$$K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x}K_a(x),$$

$$K_a'(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x}K_a(x),$$

$$K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K_a'(x),$$

$$K_a'(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x}K_a(x),$$

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\,\beta-1)^2}\right)\frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)^3}\,\frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(2\,\beta-1)}\,\frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta\,(1-2\,\alpha)}{(\beta-\alpha)\,(1-\alpha)}\,\frac{1}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\,\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\,\frac{N}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1-\beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$

Borsalinovo jádro je funkce definovaná předpisem

$$B(x|\sigma) := \frac{1}{\sigma}\omega\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

kde

$$\omega(x) = \frac{\Theta(1-|x|)}{Z_B}\,\mathsf{e}^{\frac{1}{x^2-1}},$$

a $Z_B \approx 0.4439940$ je konstanta zaručující normalizaci.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 02

pondělí 20. května 2024, 14:00 — 15:40

Výsledný bodový zisk bude násoben pěti čtvrtinami.

1 (8 bodů)
Představte základní koncept termodynamického dopravního plynu a jeho fyzikálně-matematický popis. Neopomeňte vysvětlit, co je interakční dosah a homogenita/heterogenita potenciálu, stochastická rezistivita, a také jakého tvaru je sdružená hustota pravděpodobnosti pro kompletní vektor mikroveličin.

2 (10 bodů)
Odvoďte tvar hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost částic v termodynamickém dopravní plynu s obecným potenciálem. Užijte k tomu aproximaci v sedlovém bodě.

3 (7 bodů)
Burgersovu nelineární parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu(x,\tau)\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mathtt{D}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$$

upravte na lineární verzi.

4 (8 bodů)
Ukažte, že hustotní distribuce dopravního proudu zavedená pomocí Borsalinova jádra konverguje (pro zmenšující se délku nosiče) k Diracovým hrábím. Poznámka: Mohou se hodit vztahy na další straně zadání.

5 (7 bodů)
Uvažujme model TASEP o 100 buňkách splňující podmínku $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$ a jeho konfiguraci

$$\mathcal{T} = (1,0,1,0,1,0,1,0,\ldots,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0).$$

Jaká je pravděpodobnost této konfigurace?

$$
\begin{aligned}
x^a K_a(x) = 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}} \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y, \quad (x > 0) \\
K_a(x) = K_{-a}(x) \\
K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x} K_a(x), \\
K_a'(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x} K_a(x), \\
K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K_a'(x), \\
K_a'(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x} K_a(x),
\end{aligned}
$$

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(\beta-\alpha)} \left(\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\,\beta-1)^2} \right) \frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)^3} \frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(2\,\beta-1)} \frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta\,(1-2\,\alpha)}{(\beta-\alpha)\,(1-\alpha)} \frac{1}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\,\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{N}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$

Borsalinovo jádro je funkce definovaná předpisem

$$
B(x|\sigma) := \frac{1}{\sigma} \omega \left(\frac{x}{\sigma} \right),
$$

kde

$$
\omega(x) = \frac{\Theta(1 - |x|)}{Z_B} \, \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}},
$$

a $Z_B \approx 0.4439940$ je konstanta zaručující normalizaci.