Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	Bonus	

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01RMF

12/01/2015, 9:00–11:00

❶ (8 bodů)
Nechť $\mathscr{H}$ je funkcionální Hilbertův prostor. Nechť $\varphi_n(x)$, kde $n \in \mathbf{N}$, jsou všechny ortonormalizované vlastní funkce operátoru $\widehat{L} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ příslušné vlastním hodnotám λ_n. Nechť jsou všechny vlastní hodnoty prosté. Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$ a $\langle f|\varphi_n\rangle = \frac{1}{n}$ a $\langle g|\varphi_n\rangle = \frac{1}{n+1}$. Vypočtěte vzdálenost funkcí $f(x), g(x)$ v daném Hilbertově prostoru. Jakou vlastnost operátoru musíte pro získání řešení předpokládat?

Poznámka: V záznamu řešení důsledně rozlišujte číselné řady a řady podle normy. Pro sumaci podle normy užijte symboliky $\underline{\sum}_{\ell=1}^{\infty} \varkappa_\ell(\vec{x})$.

❷ (8 bodů)
Metodou iterovaných jader (tj. užitím rezolventy) řešte Volterrovu integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \frac{y^2\,\varphi(y)}{x}\,\mathrm{d}y + 8\mathrm{e}^{\frac{\mu}{2}x^2}.$$

Tvar iterovaného jádra ověřte detailně indukcí! Odlišná metoda řešení je nepřípustná!

❸ (11 bodů)
Je dobře známo, že

$$\lim_{\sigma\to 0_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \overset{\mathscr{D}'}{=} \delta.$$

Vy ale sestavte posloupnost regulárních distribucí, která konverguje k δ' a své tvrzení dokažte dvěma různými postupy.

❹ (8 bodů)
Užitím Laplaceovy transformace vypočtěte pro $\alpha, \beta, \gamma > 0$ integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}\left(\cos^2(\beta x) + \sin^2(\gamma x) - \cos^2(\gamma x) - \sin^2(\beta x)\right)\mathrm{d}x.$$

❺ (7 bodů)
Dokažte:

$$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G) \wedge H \subset G \wedge \mu(H) < +\infty \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(H).$$

❻ (8 bodů)
Odvoďte vztah pro $\mathfrak{F}[(\mathrm{i}x)^n f(x)]$ ve Schwartzově prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ a pro $\mathfrak{F}[\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}]$ v prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ temperovaných distribucí.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	Bonus	

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01RMF

19/01/2015, 9:00–11:00

❶ (8 bodů)
Nechť $\mathscr{H}$ je funkcionální Hilbertův prostor a $\widehat{L} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ lineární a spojitý operátor na $\mathscr{H}$. Nechť jeho ortonormalizované vlastní funkce $\varphi_n(x)$ příslušné vlastním hodnotám λ_n generují bázi v $\mathscr{H}$. Jak se změní vzdálenost dvou obrazů $\widehat{L}(f), \widehat{L}(g) \in \mathscr{H}$ v porovnání se vzdáleností původních vzorů $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$, víte-li, že všechna vlastní čísla $\lambda_n \in \mathbf{C}$ leží na jednotkové kružnici?

Poznámka: V záznamu řešení důsledně rozlišujte číselné řady a řady podle normy. Pro sumaci podle normy užijte symboliky $\underline{\sum}_{\ell=1}^{\infty} \varkappa_\ell(\vec{x})$.

❷ (10 bodů)
V prostoru jednorozměrných zobecněných funkcí vypočtěte limitu

$$\lim_{\mu\to+\infty} \mu \mathrm{e}^{-\mu^2 x^2} \cos(\mu\beta x).$$

Pomocný integrál vypočtěte užitím věty o derivaci integrálu podle parametru.

❸ (10 bodů)
Nalezněte vztah $\eta = \eta(x, y)$, který společně se vztahem $\xi = y\mathrm{e}^x$ převádí parciální diferenciální rovnici

$$8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial u}{\partial x} + 5y\frac{\partial u}{\partial y} = 8y^6\mathrm{e}^{4x}$$

na normální tvar. Rovnici vyřešte.

❹ (6 bodů)
S pomocí Fourierovy transformace nalezněte všechna řešení algebraické rovnice

$$x^n u(x) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$$

v prostoru temperovaných distribucí.

❺ (9 bodů)
Laplaceovou transformací (ovšem nikoli přes fundamentální řešení operátoru) řešte Cauchyovu úlohu

$$y^{(3)}(x) + 2y''(x) - 4y'(x) - 8y(x) = -24x - 12$$

$$y(0) = 2 \quad \& \quad y'(0) = 6 \quad \& \quad y''(0) = 12.$$

❻ (7 bodů)
Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Dokažte, že

$$\|(f \star g)(\vec{x})\| \leqslant \|f(\vec{x})\| \cdot \|g(\vec{x})\|, \tag{1}$$

kde $\|h(\vec{x})\| := \int_{\mathbf{E}^r} |h(\vec{x})| \,\mathrm{d}x$. Existenci konvoluce nepovažujte za zřejmou! Za jakých podmínek nastává ve vztahu (1) rovnost? Zdůvodněte.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	Bonus	

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01RMF

26/01/2015, 9:00-11:00

❶ (7 bodů)
Dokažte, že operátor $\widehat{T} := \int_{\mathbf{R}} x\mathrm{e}^{-sx} \bullet \,\mathrm{d}x$ připouští volbu

$$\mathrm{Dom}(\widehat{T}) = \mathscr{S}_+ := \{\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}) : \mathrm{supp}(\varphi) \subset \langle 0, +\infty)\}.$$

Jakou jinou volbu definičního oboru zadaný operátor také připouští? A proč?

❷ (10 bodů)
Označme $\mathscr{S}_+ := \{\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}) : \mathrm{supp}(\varphi) \subset \langle 0, +\infty)\}$ a na $\mathscr{S}_+$ definujme integrální transformaci předpisem

$$\mathcal{T}[\varphi(x)] := \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) x \mathrm{e}^{-sx} \,\mathrm{d}x.$$

Odvoďte (v analogii s fourierovskými, resp. laplaceovskými desatery) pravidlo o $\mathcal{T}-$obrazu první derivace, o $n-$té derivaci $\mathcal{T}-$obrazu a o záměně obrazu a vzoru.

❸ (9 bodů)
Dokažte následující tvrzení: *Nechť jsou dány omezené operátory $\widehat{L}, \widehat{K} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ s čistě bodovými spektry, pro které existuje totožný systém vlastních funkcí. Pak operátory $\widehat{L}$, $\widehat{K}$ nutně komutují.* Co lze z daných předpokladů usoudit o vlastních funkcích složeného operátoru? Věnujte zvýšený důraz poctivé argumentaci vašich tvrzení. Při bodovém hodnocení je ke kvalitě argumentací výrazně přihlíženo!

❹ (6 bodů)
Vypočtěte konvoluci:

$$12\Theta(x)\, x^2 \,\star\, \Theta(x) \cos^2(x).$$

❺ (10 bodů)
V prostoru dvourozměrných temperovaných distribucí vypočtěte limity

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda^2(x^2+y^2)}, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \mathfrak{F}\left[\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda^2(x^2+y^2)}\right].$$

❻ (8 bodů)
Nalezněte regulární transformaci převádějící parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

do normálního tvaru. Normální tvar zapište a stanovte typ zadané rovnice.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	Bonus	

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01RMF

05/02/2015, 9:00-11:00

❶ (8 bodů)
Pro funkce $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ dokažte rovnost

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell}(\varphi \star \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} \star \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

a podrobně prokažte, že obě strany zůstávají v $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

❷ (8 bodů)
Nechť $a, b > 0$ jsou parametry. Aplikací Laplaceovy transformace vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-a^2 x} - \mathrm{e}^{-b^2 x}}{x^{3/2}} \, \mathrm{d}x.$$

❸ (9 bodů)
Nalezněte fourierovský obraz záporné Sochockého distribuce, tj.

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{x - \mathrm{i}0}\right].$$

Odvození podrobně komentujte a pomocný Fourierův obraz $\mathfrak{F}[\mathcal{P}\frac{1}{x}]$ detailně odvoďte! Hodnotu pomocného integrálu $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} \, \mathrm{d}x$ odvoďte užitím Laplaceovy transformace. Výsledek úlohy maximálně zjednodušte!

❹ (8 bodů)
Dokažte, že je-li $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$, pak funkcionál $\widetilde{g}$ zavedený nad $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ předpisem

$$(\widetilde{g}; \varphi(\vec{x})) := \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \, \mathrm{d}\vec{x}$$

je z $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Věnujte zvýšený důraz poctivé argumentaci vašich tvrzení. Při bodovém hodnocení je ke kvalitě argumentací výrazně přihlíženo!

❺ (9 bodů)
Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a\mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{1+1})$.

❻ (8 bodů)
Čemu se v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ rovná limita

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \Theta(x)\lambda^2(1 - \lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x} \ ?$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	Bonus	

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01RMF

11/02/2015, 9:00-11:00

❶ (8 bodů)
Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a\mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{1+1})$.

❷ (10 bodů)
Aplikací Laplaceovy transformace řešte

$$y'' - 2y' + y = 3 - 4\int_0^x \sin(x-u)\cos(u)\,\mathrm{d}u \quad \& \quad y(0) = 6 \quad \& \quad y'(0) = 3.$$

Před mechanickým počítáním dejte raději přednost úvaze o možných zjednodušeních postupu.

❸ (9 bodů)
Metodou iterovaných jader (tj. pomocí rezolventy) řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu\int_0^x \frac{y^3}{x^3}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + 5x\mathrm{e}^{\mu x}.$$

Tvar ℓ–tého iterovaného jádra ověřte detailně indukcí!

❹ (8 bodů)
Rozhodněte, definuje-li předpis

$$(\tilde{h};\varphi(x)) := \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

zobecněnou funkci. Pokud ano, rozhodněte, je-li tato zobecněná funkce regulární, a maximálně zjednodušte výraz

$$x \cdot \tilde{h}'.$$

❺ (8 bodů)
Nechť $a, b > 0$ jsou parametry. Aplikací Laplaceovy transformace vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-a^2x} - \mathrm{e}^{-b^2x}}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$$

❻ (7 bodů)
Korektními postupy vypočítejte

$$x^2\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}0}\right)'$$

v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	❻	Bonus	

Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01RMF

05/03/2015, 9:00–11:00

❶ (8 bodů)
Nalezněte vlastní funkce a vlastní čísla integrálního operátoru

$$\widehat{K} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}(x+y)y \bullet \,\mathrm{d}y.$$

❷ (10 bodů)
Ve třídě zobecněných funkcí $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$ maximálně zjednodušte výraz

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\lambda x^3 \mathrm{e}^{-\lambda^2 x^2}\mathcal{P}\frac{1}{x} \otimes \lambda^2 y^2 \frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}y^2}\right).$$

❸ (8 bodů)
Maximálně zjednodušte konvoluci

$$\Theta_\mu(\mathrm{e}^\mu - \mathrm{e}^x) \star \delta''.$$

Zjednodušení proveďte aplikací definic, tj. bez použití tvrzení o konvolucích tvaru $f(\vec{x}) \star \delta^{(n)}$.

❹ (8 bodů)
(8 bodů)
Nechť $\mathscr{H}$ je funkcionální Hilbertův prostor a $\widehat{L} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ lineární a spojitý operátor na $\mathscr{H}$. Nechť jeho ortonormalizované vlastní funkce $\varphi_n(x)$ příslušné vlastním hodnotám λ_n generují bázi v $\mathscr{H}$. Je norma obrazů $\widehat{L}(f) \in \mathscr{H}$ v porovnání s normou původních vzorů $f(x) \in \mathscr{H}$ větší, menší nebo stejná? Stanovte příslušný poměr a na jeho základě rozhodněte. Užijte faktu, že vlastní čísla $\lambda_n \in \mathbf{C}$ splňují vztah

$$\forall k \in \mathbf{N}: \quad \mathrm{Re}^2(\lambda_{2k+1}) + \mathrm{Im}^2(\lambda_{2k+1}) = 4 \quad \& \quad \mathrm{Re}^2(\lambda_{2k}) + \mathrm{Im}^2(\lambda_{2k}) = 1.$$

Poznámka: V záznamu řešení důsledně rozlišujte číselné řady a řady podle normy. Pro sumaci podle normy užijte symboliky $\underline{\sum}_{\ell=1}^{\infty} \varkappa_\ell(\vec{x})$.

❺ (8 bodů)
Laplaceovou transformací řešte Cauchyovu úlohu pro integrodiferenciální rovnici

$$z'' + 3z' - 4\int_0^x z(s)\,\mathrm{d}s = 8\Theta(x) \quad \& \quad z(0_+) = -2 \quad \& \quad z'(0_+) = 9.$$

❻ (8 bodů)
Nalezněte funkci $\varphi(x)$ splňující rovnost

$$\varphi(x) = 2\int_0^\infty \left(x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + xy^2\mathrm{e}^{-x^2}\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2}.$$