Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 1/A z předmětu 01RMF

15/01/2016, 9:00-10:00

❶ Je funkcionál definovaný předpisem

$$(\tilde{g};\varphi(x)) := \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

ze třídy $\mathscr{D}'(G)$, kde $G = (1,+\infty)$. Vysvětlete!

❷ Čemu se rovná $\mathfrak{L}[f(x) \star g(x)]$ a za jakým podmínek? Odvoďte a výpočet podrobněji komentujte. Neopomeňte diskutovat, zda $f(x) \star g(x)$ má skutečně Laplaceův obraz!

❸ Vyslovte a dokažte větu o Parsevalově vzorci a Parsevalově rovnosti.

❹ Nechť $\hat{L}$ a $\hat{K}$ jsou Volterrovy integrální operátory s jádry $\mathscr{K}(x,y)$ a $\mathscr{L}(x,y)$. Jakého tvaru je jádro $\mathscr{M}(x,y)$ integrálního operátoru $\hat{M} := \hat{L}\hat{K}$? Je $\hat{M}$ také Volterrův?

❺ U každé z níže uvedených tříd uveďte (ANO/NE), zda funkce $h(x) = \Theta(x)x^2\mathrm{e}^{-2x}$ do dané třídy patří:

- $\mathscr{D}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{S}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{P}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{L}_1(\mathbf{R})$.

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSÍ být důkazová úloha č. 3!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM BODŮ
Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F): **Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 1/B z předmětu 01RMF

15/01/2016, 10:30–11:30

1 (15 bodů)
Vypočtěte limitu

$$\lim_{\mu\to\infty}\left(\frac{\sin^2(\mu x)}{\mu x}\cdot\mathcal{P}\frac{1}{x}\otimes\delta(y)\right). \tag{1}$$

Podrobně komentujte! Neopomeňte také komentovat, jak chápete součin v levém argumentu tenzorového součinu (1). Je definován korektně?

2 (11 bodů)
Dokažte větu: Nechť $f, g \in \mathscr{D}'$ a g je finitní. Pak existuje konvoluce $f \star g$ a pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí

$$(f \star g, \varphi(\vec{x})) = (f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})),$$

kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce, která ... *(doplňte!)*.

3 (8 bodů)
Nechť $\hat{L}$ je operátor s čistě bodovým spektrem, jehož spektrum leží v $\mathbf{R}$. Nechť $\lambda, \mu \in \sigma(\hat{L})$ a $\lambda \neq \mu$. Označme

$$Q_\lambda = \{\varphi(x) \in \mathscr{H} : \hat{L}(\varphi(x)) = \lambda\varphi(x)\}, \quad Q_\mu = \{\psi(x) \in \mathscr{H} : \hat{L}(\psi(x))\psi = \mu\psi(x)\}.$$

Dokažte, že $Q_\lambda \perp Q_\mu$. Jsou všechny předpoklady této věty nezbytné? Proč? Dále rozhodněte, zda jsou Q_λ a Q_μ vektorové prostory. Argumentujte.

4 (6 bodů)
Odvoďte Fourierův obraz $\mathfrak{F}[xy\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}]$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	

Zkoušková písemná práce č. 2/A z předmětu 01RMF

22/01/2016, 9:00–10:00

❶ Leží (ANO/NE) funkce $\Theta(x)\mathrm{e}^{3x}$, resp. distribuce $\widetilde{\Theta(x)\mathrm{e}^{3x}}$ v následující třídě? Vaši odpověď zapište přímo do tohoto zadání!

- $\mathscr{D}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{S}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{P}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

❷ Dokažte, že zobrazení $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$ je spojité.

❸ Vyslovte a dokažte (se všemi náležitostmi) základní větu o řešení diferenciální rovnice v $\mathscr{D}'$.

❹ Formulujte Cauchyovu úlohu pro dopravní rovnici a převeďte ji do řeči zobecněných funkcí.

❺ Jak je definována superstejnoměrná konvergence v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a jak konvergence v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$?

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSÍ být důkazové úlohy č. 2 a 3!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM BODŮ
Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F): **Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 2/B z předmětu 01RMF

22/01/2016, 10:30–11:30

1 (9 bodů)
Řešte:

$$\varphi(x) = 2\int_0^\infty \left(x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + xy^2\mathrm{e}^{-x^2}\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Vysvětlete, proč při řešení této úlohy není možné užít ani metodu postupných aproximací ani metodu iterovaných jader.

2 (10 bodů)
Dokažte komutativitu tenzorového součinu. Postupujte formálně korektně a jednotlivé kroky důkazu komentujte.

3 (14 bodů)
Integrální transformace je definována předpisem

$$\mathcal{T}[f(x)] := \int_{\mathbf{R}} f(x)x\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x.$$

Dokažte, že Laplaceův prostor $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ může být vhodným definičním oborem takové transformace. V analogii ke známějším integrálním transformacím se poté pokuste zformulovat co nejobecnější pravidlo pro $\mathcal{T}$–obraz konvoluce. Při hodnocení se ve zvýšené míře dbá na kreativitu řešení a poctivost teoretických argumentací.

4 (7 bodů)
Jak souvisí hodnota funkcionálního diskriminantu $\mathcal{D}(x,y)$ s oblastmi excentricity parciální diferenciální rovnice druhého řádu? Dokažte a své závěry podrobně zdůvodňujte.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	

Zkoušková písemná práce č. 3/A z předmětu 01RMF

02/02/2016, 9:00–10:00

1 Vyslovte definici nosiče zobecněné funkce a podle ní rozhodněte, jak vypadá nosič zobecněné funkce

$$(\tilde{g}, \varphi(x)) := \int_2^7 x^3 \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

2 Vyslovte a dokažte větu o řešení Fredholmovy integrální rovnice metodou postupných aproximací. Dokažte také pomocné tvrzení o omezenosti Fredholmova integrálního operátoru. Kde se tohoto tvrzení v důkaze využívá?

3 Definujte Schwartzův prostor a rozhodněte, zda do něj funkce $g(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$ patří.

4 Vyslovte a dokažte větu o ortogonalitě vlastních funkcí.

5 Vyslovte větu o zjednodušení definice zobecněné konvoluce na $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$.

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSEJÍ být důkazové úlohy č. 2 a 4!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM BODŮ
Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F):	**Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 3/B z předmětu 01RMF

02/02/2016, 10:30–11:30

1 (9 bodů)
Dokažte, že řešení Volterrovy integrální rovnice získané metodou postupných aproximací je jediné. Dokažte také potřebnou vlastnost týkající se množin W_0 a W_f.

2 (7 bodů)
Aplikací teorie integrálních transformací dokažte rovnost

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-2}} \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1 = A \int_0^x (x-s)^{n-1} f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Čemu musí rovna konstanta A? Při hodnocení se ve zvýšené míře dbá na kreativitu řešení a poctivost teoretických argumentací.

3 (12 bodů)
Nechť je dán operátor $\hat{L} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ s čistě bodovým spektrem, jehož všechny vlastní čísla jsou prostá a jsou tvaru

$$\lambda_n = 8\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 8\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Pokuste se co nejpřesněji určit (a své tvrzení doložit náležitým výpočem) podobu množiny

$$U = \left\{ \frac{\|\hat{L}(f) - \hat{L}(g)\|}{\|f-g\|} \;:\; f(x), g(x) \in \mathscr{H} \;\wedge\; f(x) \neq g(x) \right\}.$$

Jak se změní výsledek, bude-li mít každé z vlastních čísel geometrickou násobnost rovnou třem?

4 (12 bodů)
Ve třídě zobecněných funkcí vypočítejte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)'.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						CELKEM
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	

Zkoušková písemná práce č. 4/A z předmětu 01RMF

10/02/2016, 9:00-10:00

❶ Dokažte, že jsou-li $\tilde{f}, \tilde{g}$ regulární distribuce s generátory $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_1(\mathbf{E}^r)$, pak $\tilde{f} \star \tilde{g}$ existuje a je také regulární. Co je jejím generátorem?

❷ Vyslovte definice operátoru s čistě bodovým spektrem a unfoldovaného spektra.

❸ Vyslovte a dokažte větu o zobecněné derivaci skokové funkce.

❹ Kde je chyba v následujícím tvrzení? A proč by to takto nemohlo fungovat? *Nechť* $f, g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$. *Pak existuje konvoluce* $f \star g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ *a pro každou testovací funkci* $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ *platí*

$$(f \star g, \varphi(x)) = (f(x) \otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)),$$

kde $\eta_1(x), \eta_2(y) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ *jsou libovolné testovací funkce, které jsou na okolí intervalu* $\langle 0, \infty)$ *rovny jedné a existuje pro ně* $\mathrm{K} < 0$ *tak, že platí implikace* $x < \mathrm{K} \wedge y < \mathrm{K} \Rightarrow \eta_1(x) = \eta_2(y) = 0$.

❺ Odvoďte obecný vztah mezi $\mathfrak{L}[y''(x)]$ a $\mathfrak{L}[y(x)]$.

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSEJÍ být důkazové úlohy č. 1 a 3!

Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	CELKEM BODŮ

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F): **Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 4/B z předmětu 01RMF

10/02/2016, 10:30–11:30

1 (7 bodů)
Jaké jsou předpoklady ve Fubiniově větě? A jak je jejich splnění garantováno ve větě o záměně Fourierova vzoru a Fourierova obrazu v integrálu, tj. $\int_{\mathbf{R}} f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$? Tvrzení dokažte (2 body), ale podstatně více pozornosti věnujte podrobnému stanovení předpokladů ve Fubiniově větě a zaručení jejich naplnění.

2 (11 bodů)
Nechť je dán operátor $\hat{L}$ s čistě bodovým spektrem operující na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť $f(x) \in \mathscr{H}$ je zvoleno pevně. Označme příslušnou operátorou bázi $B = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots\}$. Pro zadané objekty je známo, že

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad \langle \hat{L}f|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{2^n}{n!}},$$

$$\langle f|\varphi_1\rangle = \pi,$$

$$\forall n \in \mathbf{N}: \langle f|\varphi_{n+1}\rangle = \frac{\langle f|\varphi_n\rangle}{3}.$$

Vypočítejte, čemu se rovná podíl $\frac{\|\hat{L}(f)\|}{\|f\|}$.

3 (10 bodů)
Bez použití Sochockého vzorců a integrálních transformací vypočítejte $x \cdot \frac{1}{x \pm \mathrm{i}0}$. Větší pozornost věnujte teoretickým zdůvodněním.

4 (12 bodů)
Rozhodněte, definuje-li předpis

$$(\tilde{g}; \varphi(x)) := \int_{\mathbf{R}} \ln|x| \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

zobecněnou funkci. Pokud ano, rozhodněte, je-li tato zobecněná funkce regulární, a vypočtěte její první derivaci.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						CELKEM
Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	

Zkoušková písemná práce č. 5/A z předmětu 01RMF

18/02/2016, 9:00–10:00

❶ Vyslovte a dokažte větu o harmonickém řešení dopravní rovnice.

❷ Definujte pojem meze integrálního jádra a pro Fredholmovo jádro dokažte její konečnost. Dále ukažte, že z existence meze plyne spojitost příslušného operátoru v $\mathscr{L}_2(G)$. Co je navíc nutno předpokládat o G?

❸ Vyslovte a dokažte Besselovu nerovnost.

❹ Definujte prostor testovacích funkcí.

❺ Definujte konvoluci v $\mathscr{D}'$ a na jejím základě vypočítejte $\tilde{f} \star \delta_\mu$. Ve výpočtu řádně zdůvodněte, proč na některém místě lze a na jiném nelze zaměnit limitu a funkcionální závorky. Úlohu řešte pro $\tilde{f} \in \mathscr{D}'$, pro niž není garantováno, že je regulární.

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSEJÍ být důkazové úlohy č. 1 a 3!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM BODŮ
Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F): **Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 5/B z předmětu 01RMF

18/02/2016, 10:30–11:30

1 (10 bodů)
Ukažte, že znáte-li pro operátor s čistě bodovým spektrem tzv. *maticové elementy*, tj. prvky tvaru $\langle \hat{L}(\varphi_k)|\varphi_n\rangle := \beta_{kn}$ určené pro všechny prvky operátorové báze, pak je pomocí nich (a také pomocí fourierovských koeficientů) možno vyčíslit normu $\|\hat{L}f\|$ pro libovolnou funkci $f(x) \in \mathscr{H}$. Jakou podmínku byste kladli na maticové elementy, aby byla garantována hermiticita operátoru $\hat{L}$? Jaké vlastnosti má matice $\mathbb{B} = (\beta_{kn})_{k,n}$?

2 (8 bodů)
Užitím Laplaceovy transformace vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

3 (13 bodů)
Rozhodněte, definuje-li předpis

$$(\tilde{h}; \varphi(x)) := \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

zobecněnou funkci. Pokud ano, rozhodněte, je-li tato zobecněná funkce regulární, a maximálně zjednodušte výraz $x \cdot \tilde{h}'$. V odvození ukažte místo, kde by argumentace selhala, kdyby v definici superstejnoměrné konvergence nebylo garantováno stejnoměrné omezení nosiče.

4 (9 bodů)
Zodpovězte a vaše tvrzení podpořte korektním výpočtem: Nechť

$$u(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2) \setminus \mathscr{C}^2(\mathbf{R}^2).$$

Nechť $\tilde{w}(x,t)$ je zobecněná funkce generovaná klasickou funkcí $\Theta(t)u(x,t)$. Čemu je v $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$ roven výraz

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(x,t)\,?$$

Jak lze výsledek zjednodušit za předpokladu, že $u(x,t) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	

Zkoušková písemná práce č. 6/A z předmětu 01RMF

30/03/2016, 9:00-10:00

❶ Nechť $\omega(x)$ je Cimrmanova buřinka o jednotkovém poloměru, tj. $\varepsilon = 1$. U každé z níže uvedených tříd uveďte (ANO/NE), zda funkce $h(x) = \omega(x)x^2 \mathrm{e}^{-2x}$ do dané třídy patří:

- $\mathscr{D}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{S}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{P}(\mathbf{R})$,
- $\mathscr{L}_1(\mathbf{R})$.

❷ Z definice hermiticity operátoru odvoďte podmínku pro jádro $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$ integrálního operátoru $\hat{K}$ definovaného na $\mathscr{L}_2(G)$ postačující pro to, aby $\hat{K}$ byl hermiteovský.

❸ Vyslovte a dokažte (se všemi náležitostmi) základní větu o řešení diferenciální rovnice v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

❹ Definujte geometrickou násobnost vlastního čísla operátoru.

❺ Vyslovte a dokažte větu o harmonickém řešení dopravní rovnice.

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSEJÍ být důkazové úlohy č. 3 a 5!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM BODŮ
Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F):	**Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 6/B z předmětu 01RMF

30/03/2016, 10:30–11:30

1 (10 bodů)

Pro parciální diferenciální operátor

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial x}, \qquad (a > 0 \wedge b > 0)$$

zformulujte příslušnou Cauchyovu úlohu, převeďte ji do prostoru zobecněných funkcí a nalezněte fundamentální řešení. Pro účely tohoto příkladu si na základě vlastností Fourierova desatera odvoďte Fourierův obraz funkce $g(x) = \mathrm{e}^{-c(x-d)^2}$.

2 (10 bodů)

Rozhodněte, zda předpis

$$\int_0^\infty 3\mathrm{e}^{2x^2} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

definujte zobecněnou funkci z $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Pokud ne, ukažte na konkrétním příkladě, kde předpis (2) selhává. Pokud ano, čemu se taková distribuce rovná? Dále rozhodněte, zda předpis (2) definujte zobecněnou funkci z $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$.

3 (10 bodů)

Dokažte, že je-li $g(x) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ hustotou pravděpodobnosti, k níž existují všechny necentrální momenty, pak lze sestavit Maclaurinovu řadu jejího Laplaceova obrazu. Rozeberte také všechny technikality na pozadí (analytičnost Laplaceova obrazu, obor konvergence, definiční obor Laplaceova obrazu). Bude-li třeba, klaďte na funkci $g(x)$ další omezení.

4 (10 bodů)

Ve třídě zobecněných funkcí $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$ maximálně zjednodušte výraz

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^3 x^3 \mathrm{e}^{-\lambda^2 x^2} \mathcal{P}\frac{1}{x} \otimes y^2 \frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}y^2}.$$

Příjmení a jméno	❶	❷	❸	❹	❺	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 7/A z předmětu 01RMF

04/05/2016, 9:00-10:00

❶ Vyslovte a dokažte (se všemi náležitostmi) základní větu o řešení diferenciální rovnice v $\mathscr{D}'$.

❷ Vyslovte a dokažte větu o řešení Volterrovy integrální rovnice metodou postupných aproximací. Neopomeňte prokázat jednoznačnost řešení.

❸ Definujte regulární distribuci.

❹ Jak je zavedena konvergence v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$?

❺ Jakého typu excentricity je diferenciální rovnice

$$4y\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 4x\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - (6x + 9y)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0\,?$$

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSEJÍ být důkazové úlohy č. 1 a 2!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM BODŮ
Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F): **Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 7/B z předmětu 01RMF

04/05/2016, 10:30–11:30

1 (10 bodů)
Dokažte komutativitu tenzorového součinu. Vyslovte též znění lemmatu, bez kterého by nebylo možno důkaz provést.

2 (10 bodů)
Dokažte, že pokud je $g(x)$ exponenciálního růstu, pak limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|g(x)|}{x}$$

vždy existuje a její hodnota je rovna indexu růstu dané funkce.

3 (10 bodů)
Ve třídě zobecněných funkcí $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$ maximálně zjednodušte výraz

$$\lim_{c\to\infty} \mathrm{e}^x \sin(cy) \left(\delta(x-\mu) \otimes \frac{\sin(cy)}{cy} \cdot \mathcal{P}\frac{1}{y}\right).$$

Užijte faktu, že $\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^2(\beta x)}{x^2} \mathrm{d}x = \pi\,|\beta|$.

4 (10 bodů)
Je dobře známo, že

$$\lim_{\sigma\to 0_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \overset{\mathscr{D}'}{=} \delta.$$

Vy ale sestavte posloupnost regulárních distribucí, která konverguje k δ' a své tvrzení dokažte dvěma různými postupy.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	

Zkoušková písemná práce č. 8/A z předmětu 01RMF

31/05/2016, 13:00-14:00

❶ Definujte omezenost a hermiteovskost operátoru. Jak jsou tyto pojmy provázány?

❷ Vyslovte a dokažte větu o Parsevalově vzorci a Parsevalově rovnosti.

❸ Vyslovte a dokažte větu o řešení Fredholmovy integrální rovnice metodou postupných aproximací. Neopomeňte prokázat jednoznačnost řešení.

❹ Jak je zavedena superstejnoměrná konvergence v prostoru testovacích funkcí?

❺ Nechť $\hat{L}$ a $\hat{K}$ jsou Volterrovy integrální operátory s jádry $\mathscr{K}(x, y)$ a $\mathscr{L}(x, y)$. Jakého tvaru je jádro $\mathscr{M}(x, y)$ integrálního operátoru $\hat{M} := \hat{L}\hat{K}$? Je $\hat{M}$ také Volterrův?

K postupu do dalšího kola je třeba zodpovědět alespoň 4 otázky správně. Mezi správně zodpovězenými úlohami MUSEJÍ být důkazové úlohy č. 2 a 3!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM BODŮ
Jméno studenta (tiskacím písmem)	1	2	3	4	ČÁST A	BONUS	

Celkové hodnocení zkoušky (ve formátu A,B,C,D,E,F): **Podpis studenta:**

Zkoušková písemná práce č. 8/B z předmětu 01RMF

31/05/2016, 14:30-15:30

1 (10 bodů)

Proveďte dekonvoluci

$$2\Theta(x)x^2 \star g(x) = [3 - 4x + 2x^2 - \mathrm{e}^{-2x}(3 + 2x)]\Theta(x), \quad g(x) = ?$$

2 (10 bodů)

Pro kterou z funkcí $x\mathrm{e}^{-x^2}$, $x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ vrací konečná část $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ větší hodnotu? Kde má smysl tuto úlohu řešit? Je vůbec $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ z příslušné třídy? Podrobně komentujte!

3 (10 bodů)

Laplaceovou transformací řešte Cauchyovu úlohu pro integrodiferenciální rovnici

$$z'' + 3z' - 4\int_0^x z(s)\,\mathrm{d}s = 8\Theta(x) \quad \& \quad z(0_+) = -2 \quad \& \quad z'(0_+) = 9.$$

4 (10 bodů)

Nechť

$$f_\varepsilon(x,y) = \Theta(x,y)\,\frac{xy}{\varepsilon^4}\,\mathrm{e}^{-\frac{x+y}{\varepsilon}}.$$

Nechť $\widetilde{f_\varepsilon}$ je zobecněná funkce, jejímž generátorem je funkce $f_\varepsilon(x,y)$. Vypočtěte limitu $\lim_{\varepsilon\to 0_+}\widetilde{f_\varepsilon}$ ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$.